

ベルヌーイ数が展開する数学の分野

はじめに

ベルヌーイ数は数論でしばしば表れる重要な数列である。ベルヌーイ数は、様々な関数の展開係数に含まれていたり、高次の調和級数であるゼータ関数の値を表すために用いられたり用途が広い。

筆者がベルヌーイ数を初めて見たのは正接関数 (tangent) の展開係数に含まれる形態であった。筆者は当時、正弦関数や余弦関数のマクローリン展開の展開係数が容易に見つけられることから、正接関数の級数展開に試みたのだが、その展開係数の規則性をうまく見つけられなかった。そのとき手に取った数学公式集にベルヌーイ数を用いた正接関数のマクローリン級数が載っていたのだ。しかし、数がの公式集に記載されていた、 $B_0 = 1, B_1 = -1/2, B_2 = 1/6, \dots$ にその偉大さを見出すことができなかった。残念なことである。正接関数の展開係数は、ベルヌーイ数の応用例の一つにすぎない。他のテキストによると、ベルヌーイ数は $x/(e^x - 1)$ の展開係数であるとも定義されている。この定義からベルヌーイ数の取り扱いを始めたとしても、ベルヌーイ数の偉大さに気づくのは難しいかもしれない。

ヤコブ・ベルヌーイが導入した歴史にしたがうと、ベルヌーイ数が様々な数学に応用されることが導かれ、ベルヌーイ数の偉大さにを感じるができる。ベルヌーイ数は、歴史的には、自然数のべき乗和を計算する公式を一般化するために導入された数列である。この数列は、1713年に発行されたヤコブ・ベルヌーイの「推測術 (*Ars Conjectandi*)」で取り上げられたことから、ベルヌーイ数と呼ばれる。一方、ほぼ同時期に日本の和算家 関孝和も独自にベルヌーイ数の導入にたどり着いていたようだ。べき乗和の一般化にとどまらず、ベルヌーイ数は正接関数を含む三角関数や双曲線関数の展開係数として、さらには、リーマンのゼータ関数や、積分と離散的な総和を関係づけるオイラー・マクローリンの公式にも登場する。

ゼータ関数は、20世紀に形成された量子力学において重要な役割を演じる。本文でも紹介するが、具体例として、 $1 + 2 + 3 + \dots$ のような発散級数に解析学における解析接続と呼ばれる手法を適用すると、 $\zeta(-1) = -1/12$ というゼータ関数に関係づけられるのだ。実際に $1 + 2 + 3 + \dots$ が $-1/12$ に等しいわけがないのだが、級数に隠された本質的な値と解釈すればよいかもしれない。超ひも理論において、光量子のようなボーズ粒子を表現する弦モデルの次元数を決定する際に、この発散級数が登場するのだ。その発散級数に $-1/12$ を代入することで、ボーズ粒子の弦モデルが26次元であることが決定されている。実は、

発散級数を避け、一般に予想される物理的条件から次元を決定しても 26 次元になるのである。これは驚くべき結果である。

このように 18 世紀に発見された数列が、素粒子を記述する新しい物理学で用いられるのは驚きに値する。本書では、ベルヌーイ数の導入から始め、そこから枝葉を広げ、ベルヌーイ数が登場する数学の分野を紹介する。本書は数式の導出をなるべく省略せずに行っている。導出を理解するためには、理数系の大学 2 年生程度の専門知識が必要である。具体的には、解析学におけるテイラー展開の知識、複素関数論における正則性、留数定理の知識があることが望ましい。

目次

第1章	ベルヌーイ数の導入	1
1.1	べき乗和	1
1.2	二項定理	4
1.3	べき乗和の一般化	7
1.4	母関数による解析	12
1.4.1	母関数の導入	12
1.4.2	数列の評価例	13
1.4.3	ベルヌーイ数の指数型母関数	16
1.4.4	ベルヌーイ数の一般項	18
1.5	数列の和と畳み込み和	19
1.5.1	べき乗和	20
1.5.2	フィボナッチ数列	20
1.5.3	上昇階乗の和	22
1.5.4	上昇階乗の逆数	24
第2章	スターリング数	25
2.1	上昇階乗と下降階乗	25
2.2	第1種スターリング数	26
2.3	第2種スターリング数	28
2.4	ベルヌーイ数との関係	32
2.5	組み合わせ数学での意味	35

2.5.1	第1種スターリング数	35
2.5.2	第2種スターリング数	37
第3章	タンジェント数とオイラー数	41
3.1	タンジェント数	41
3.1.1	正接関数のテイラー展開	41
3.1.2	ベルヌーイ数による表現	42
3.2	オイラー数	45
3.2.1	セカント数	45
3.2.2	オイラー数	47
3.3	タンジェント数と交代順列の組み合わせ	49
3.3.1	交代順列の組み合わせ	49
3.3.2	タンジェント・セカント数との関係	51
3.3.3	Seidel-Entringer の三角形	53
第4章	ゼータ関数	57
4.1	調和級数	57
4.1.1	オイラー定数	60
4.1.2	素数の逆数和	62
4.1.3	交代調和級数	64
4.2	バーゼル問題	67
4.3	ゼータ関数	70
4.3.1	ゼータ関数の収束	71
4.3.2	素数による表現	71
4.3.3	偶数ゼータ関数	74
4.3.4	奇数ゼータ関数	77
4.3.5	奇数ゼータ類似の級数	81

4.4	母関数	84
4.4.1	ベルヌーイ数との関係	84
4.4.2	整数ゼータ関数の母関数	85
4.4.3	オイラー定数との関係	86
4.5	定義域の拡張	87
4.5.1	解析接続	88
4.5.2	ゼータ関数の積分表示	91
4.5.3	部分積分による解析接続	93
4.5.4	複素数での積分表示	99
4.5.5	負整数のゼータ関数	105
第5章	ベルヌーイ多項式とオイラー多項式	111
5.1	ベルヌーイ多項式	111
5.1.1	ベルヌーイ多項式の性質	112
5.1.2	べき乗和との関係	113
5.1.3	指数型母関数	114
5.1.4	周期ベルヌーイ多項式	115
5.1.5	偶数ゼータ関数	119
5.2	オイラー多項式	119
5.2.1	オイラー多項式の性質	120
5.2.2	指数型母関数	122
5.2.3	周期オイラー多項式	122
5.2.4	奇数ゼータ関数類似の級数	125
第6章	総和公式	127
6.1	オイラー・マクローリンの総和公式	127
6.1.1	公式の導出	129

6.1.2	べき乗和への応用	131
6.1.3	階乗の漸近形式	131
6.1.4	オイラー定数	134
6.1.5	ゼータ関数の計算	137
6.1.6	発散級数の評価	139
6.2	オイラー・ブールの総和公式	142
6.2.1	公式の導出	143
6.2.2	メルカトル級数の誤差	145
6.2.3	ライプニッツ級数の誤差	146
6.3	アーベルの部分 and	147
6.3.1	アーベルの部分 and	147
6.3.2	ゼータ関数のローラン展開	151
6.3.3	スティルチェス定数	156
付録 A 微積分の公式		159
A.1	ロピタルの定理	159
A.2	ウォリスの公式	163
付録 B 部分分数展開		165
付録 C 第 2 種スターリング数の一般項		169
付録 D 負整数のゼータ関数の考察		173

第1章 ベルヌーイ数の導入

本書の主体であるベルヌーイ数を導入するのが本章の目的である。ベルヌーイ数は、数論でしばしば現れる数列であり、歴史的には、整数のべき乗和を計算する公式を一般化したことに端を発する。本章では、歴史に基づき、べき乗和を一般化することによってベルヌーイ数を導入し、ベルヌーイ数の性質を探っていく。

1.1 べき乗和

べき乗和とは連続した整数をべき乗した値の総和である。本節では、 $S_k(n) \equiv 0^k + 1^k + 2^k + \cdots + (n-1)^k$ によって定義されるべき乗和のうち、 k が5以下のケース、すなわち5次以下のべき乗和を扱ってみよう。

べき乗和のよく知られた簡単な例は、 $S_1 = 0 + 1 + 2 + \cdots + (n-1)$ のような連続する整数の和である。これは、 $k = 1$ としたべき乗和、すなわち、1次のべき乗和である。とにかく、小学生の頃、1から10まで、あるいは、1から100までの総和を計算した人は少なくないだろう。この整数和に関しては、あの数学者のガウスが小学生だった頃、数学的才能を発揮して教師を驚かせた話が有名である。その話は、1から100までの和を計算する問題に関する話である。まだ7歳だったガウスはものの数分で1から100までの総和を計算したのだ。ガウスは暗算の達人だったわけではない。少年だったガウスは、彼の数学センスで1から100までの和を即座に計算できる計算方法を考案したのだ。ガウスは1から100まで値を直接加算するかわりに、 $(1 + 100) + (2 + 99) + \cdots + (50 + 51) = 50 \times 101 = 5050$ という工夫によって、短時間で和を計算したのだ。この方法を応用すれば、1から1000000の和であっても即座に計算できるのである。その教師は、教え子に時間を要する課題を与えておいて、その間に、たまっていた雑用を片付けてしまおうと考えていたのかもしれないが、天才ガウスには通じなかった。優秀すぎる生徒は、時として教師には迷惑なものである。

上に示したガウス少年の手法は $k = 1$ のべき乗和に関して有効な手法であるが、 $k \geq 2$ のべき乗和には応用できない。これに対し、任意の k について応用可能なアプローチがあ

るので紹介しよう。まず,

$$\sum_{j=0}^{n-1} j^2 = 0^2 + 1^2 + \cdots + (n-1)^2,$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} (j+1)^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2,$$

なる2つの和を比較する。これらの差をとると,

$$\sum_{j=0}^{n-1} (2j+1) = n^2,$$

が得られる。この式の左辺が $2S_1(n) + n$ であることに注意すると、1次のべき乗和 $S_1(n)$ は、 $S_1(n) = n(n-1)/2$ によって簡単に計算できることが示される。この結果は、ガウス少年のアプローチで得られる結果と一致する。

連続する整数の自乗和 $S_2(n)$, すなわち、2次のべき乗和を計算するには、上の導出過程を参考にして、 $(n+1)^3 - n^3$ の総和を考えればよい。上の導出過程から予想がつくように、

$$3S_2(n) + 3S_1(n) + n = n^3,$$

が成立するはずである。既に求められている $S_1(n)$ を代入すると、

$$S_2(n) = \frac{1}{6}n(n-1)(2n-1),$$

が得られる。この自乗和があれば、図 1.1 に示すピラミッドのブロック数を簡単に計算す

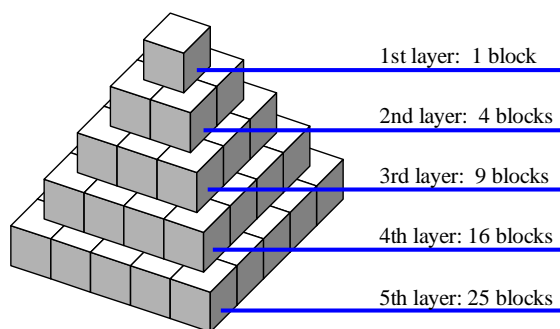


図 1.1: ピラミッドを構成するブロックの数

ることができる。図に示すように、ピラミッドの頂点から数えて第1層、第2層、第3層を構成するブロックは、それぞれ、1個、4個、9個、のように層番号の自乗になっている。図に描かれている第5層までを構成するブロックの数は、 $1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$ のように計算できる。これを上に示した公式で計算するには、 $S_2(n)$ に $n = 6$ を代入すればよい。すると、

$$S_2(6) = \frac{1}{6} \times 6 \times (6-1) \times (12-1) = 55,$$

となり、単純に各層のブロック数を加算したときと同じ結果を示す。第5層くらいではありがたみを感じないが、ピラミッドの層が多くなると上の公式が必要となるだろう。例えば、ピラミッドが99層 ($n = 100$) のとき、ピラミッドを構成するブロックの数は、

$$S_2(100) = \frac{1}{6} \times 100 \times (100 - 1) \times (200 - 1) = 328\,350,$$

となる。さすがに、公式を用いても容易に暗算できる数ではないが、99層分の加算を繰り返すことに比べると大きな労力の軽減である。そう考えると、この公式の有効性を理解できるだろう。

次数が3以上のべき乗和についても同様、 $(n + 1)^4 - n^4$ の総和を評価すれば、連続する整数の3乗和 $S_3(n)$ が求まり、 $(n + 1)^5 - n^5$ を評価すれば、連続する整数の4乗和 $S_4(n)$ が求まる。結果のみを書くと、

$$\begin{aligned} S_3(n) &= \frac{1}{4}n^2(n - 1)^2, \\ S_4(n) &= \frac{1}{30}n(n - 1)(2n - 1)(3n^2 - 3n - 1), \\ S_5(n) &= \frac{1}{12}n^2(n - 1)^2(2n^2 - 2n - 1), \end{aligned}$$

となる。同様の操作を繰り返していけば、さらに高次のべき乗和を計算することができる。容易に予想がつくように、 k 次のべき乗和は n の $k + 1$ 次式で記述できる。

これまでに示したべき乗和 $S_1(n)$ から $S_5(n)$ までを観察すると、共通した因数をもっていることが容易に見いだせる。その事実を性質として記述するなら、次の二つの性質を書くことができる。

- 任意の(ただし1以上の)次数のべき乗和 $S_k(n)$ は、 $n(n - 1)$ を因数として因数分解できる。
- 偶数次のべき乗和 $S_{2k}(n)$ は $2n - 1$ を因数として因数分解できる。

第1の性質を証明するのは簡単である。まず、1次のべき乗和が $S_1(n) = n(n - 1)/2$ であるので性質1を満足している。ここで、 $k - 1$ 次のべき乗和まですべてが $n(n - 1)$ で因数分解できると仮定しよう。そのとき、 k 次のべき乗和の公式を導出する過程で、

$$n^{k+1} - n = (k + 1)S_k(n) + \sum_{j=1}^{k-1} \binom{k+1}{j} S_j(n),$$

なる数式が得られる。この数式の左辺は、

$$n^{k+1} - n = n(n - 1)(n^{k-1} + n^{k-2} + \cdots + n + 1),$$

のように $n(n-1)$ で因数分解できる。右辺の第2項以降は、現時点で仮定した事実のため $n(n-1)$ で因数分解できる。したがって、 k 次のべき乗和 $S_k(n)$ は $n(n-1)$ で因数分解できるはずである。

第2の性質は、ベルヌーイ多項式を利用すると容易に証明できる。ベルヌーイ多項式は第5章で取り扱うので、証明はその時点まで延ばしておきたい。現時点では、第2の性質も成立するものとして受け止めていただきたい。

1.2 二項定理

べき乗和を一般化するための前提情報として、2つの変数の和 $a+b$ のべき乗、すなわち、 $(a+b)^n$ について考えてみよう。まず、指数 n をいくつか挙げて具体的にべき乗を計算してみると、

$$\begin{aligned} (a+b)^0 &= 1, \\ (a+b)^1 &= a+b, \\ (a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2, \\ (a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3, \\ (a+b)^4 &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4, \\ (a+b)^5 &= a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5, \end{aligned}$$

が得られる。この計算結果を見ると、各項の a の次数と b の次数の和は、必ず、 n に等しい。また、縦方向にべき乗の次数、横方向に b についての次数をとり、その展開係数を表にすると表 1.1 に示すように、ゼロでない係数が3角形をなす。その3角形はパスカルの三角形と呼ばれ、配置された数値には一定の規則性がある。表 1.1 の第 n 行、第 k 列に位置する

表 1.1: パスカルの三角形

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

係数を $\binom{n}{k}$ としよう。そのとき、表に書かれた係数は、

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \quad (1.1)$$

の関係を満足する。ただし、表の外や、空白の場所に該当する係数はゼロであるとする。漸化式 (1.1) によると、表 1.1 に書かれる数値は、左斜め上の数値と上の数値の和である。この規則性を利用してパスカルの三角形を書いていけば、 $(a+b)^n$ を実際に計算することなく、その展開係数がわかるのである。パスカルの三角形に関する規則性は、古い記録では、11 世紀ペルシアのウマル・ハイヤムによって発見された* ことが知られている。なお、この三角形がパスカルの三角形と呼ばれるのは、17 世紀にこの規則性を再発見したパスカルにちなんでいる。

パスカルの三角形に関する漸化式 (1.1) を証明するのは容易である。パスカルの三角形に書かれる係数 $\binom{n}{k}$ が $(a+b)^n$ の展開係数であるので、

$$(a+b)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^{n-k-1} b^k,$$

と書くことができる。ところで、この時点では係数 $\binom{n}{k}$ の正体は未知であるとする。上の展開式に $a+b$ を乗じると、

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= (a+b) \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^{n-k-1} b^k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^{n-k} b^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^{n-k-1} b^{k+1} \\ &= \binom{n-1}{0} a^n + \sum_{k=1}^{n-1} \left[\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \right] a^{n-k} b^k + \binom{n-1}{n-1} b^n, \end{aligned}$$

が得られる。この結果によって、漸化式 (1.1) の成立が示される。また、パスカルの三角形の頂点の値 $\binom{0}{0} = 1$ より、 $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ であることが漸化式 (1.1) から導かれる。また、 $(a+b)^n = (b+a)^n$ から $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ である性質も導かれる。

漸化式 (1.1) を満足する展開係数 $\binom{n}{k}$ は二項係数と呼ばれる。二項係数の具体的な値は、漸化式 (1.1) から導くのは困難であろう。その代わりに、パスカルの三角形 (表 1.1) を見ると、

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!},$$

であることが推測できる。この推測が漸化式 (1.1) を満たすことは容易に示せるはずである。また、二項係数の値は、階乗記号 (!) を用いて、

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!},$$

*E. Hairer, G. Wanner, “解析教程 上,” シュプリンガー・ジャパン, 新装版, 蟹江幸博訳, p. 22, 2006.

のように書いてもよい。これで、あえて未知としてきた係数 $\binom{n}{k}$ の正体がはっきりしたわけである。このような展開係数を用いて、 $a + b$ のべき乗は、

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k, \quad (1.2)$$

のように書くことができる。この関係は二項定理と呼ばれ、解析学で頻繁に利用される。もちろん、本書でも二項定理が多用される。よく使う形態としては、 $a = 1, b = x$ とおいた展開式:

$$(1 + x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k, \quad (1.3)$$

であろう。解析学では、 $x \ll 1$ なる条件において、 $(1 + x)^n \simeq 1 + nx$ なる近似を多用する。ここでは、指数 n は自然数であるが、解析学によると n は任意の数 (複素数) であっても、その近似は成立する。一方、関係式 (1.3) に $x = 1, x = -1$ を代入すると、

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n, \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0, \quad (1.4)$$

なる面白い関係式が導かれる。

二項係数は組み合わせ数学においても意味のある値を与える。具体的には、 n 個の要素から k 個を選ぶ組み合わせの数が $\binom{n}{k}$ で与えられるのである。ただし、各要素には番号がつけられていて互いに区別できるようになっているが、選んだ順序は気にしないものとする。例えば、0 から 6 の番号をつけた 7 個のボールから 3 個を選ぶ組み合わせを考えよう。そのとき、選ばれるボールの組み合わせは、

$$\begin{array}{cccccc}
\mathbf{[0, 1, 2]}, & \mathbf{[0, 1, 3]}, & \mathbf{[0, 1, 4]}, & \mathbf{[0, 1, 5]}, & \mathbf{[0, 1, 6]}, & \\
\mathbf{[0, 2, 3]}, & \mathbf{[0, 2, 4]}, & \mathbf{[0, 2, 5]}, & \mathbf{[0, 2, 6]}, & \mathbf{[0, 3, 4]}, & \\
\mathbf{[0, 3, 5]}, & \mathbf{[0, 3, 6]}, & \mathbf{[0, 4, 5]}, & \mathbf{[0, 4, 6]}, & \mathbf{[0, 5, 6]}, & \\
[1, 2, 3], & [1, 2, 4], & [1, 2, 5], & [1, 2, 6], & [1, 3, 4], & \\
[1, 3, 5], & [1, 3, 6], & [1, 4, 5], & [1, 4, 6], & [1, 5, 6], & \\
[2, 3, 4], & [2, 3, 5], & [2, 3, 6], & [2, 4, 5], & [2, 4, 6], & \\
[2, 5, 6], & [3, 4, 5], & [3, 4, 6], & [3, 5, 6], & [4, 5, 6], &
\end{array}$$

の 35 通りである。これらの組み合わせはボールの順序は気にしていない。例えば、 $[0, 1, 2]$ と $[0, 2, 1]$ は同じ組み合わせが重複していると考える。上に列記した組み合わせは、そのような順序入れ替えによる重複がないように並べている。タネ明かしをすれば、左より右の番号が大きくなるように番号を並べているのである。仮に、構成する 3 つの数値のうち任意の 2 つを入れ替えれば、左の番号が右の番号より大きくなる。だから、左より右の番号が大きくなるように並べれば、順序入れ替えによる重複が発生しないのである。

上記、35 通りの組み合わせのうち、太字で記述したのはボール 0 が選ばれる組み合わせである。その組み合わせは 15 通り存在する。このようにボール 0 が選ばれる組み合わせ

を強調したのは以下の考えによる。太字の組み合わせは、1 から 6 の番号をつけた 6 個のボールから 2 個を選び、その選択結果にボール 0 を追加した組み合わせと考えるもよい。それ以外の組み合わせは、1 から 6 の番号をつけた 6 個のボールから 3 個を選んだ結果 (つまり、ボール 0 は選ばれない) である。このように考えると、7 個のボールから 3 個を選ぶ組み合わせの数は、6 個のボールから 2 個を選ぶ組み合わせの数と、6 個のボールから 3 個を選ぶ組み合わせの数との和である。同様に考えると、 n 個のボールから k 個を選ぶ組み合わせの数は、 $n - 1$ 個のボールから $k - 1$ 個を選ぶ組み合わせの数と、 $n - 1$ 個のボールから k 個のボールを選ぶ組み合わせの数との和である。この関係は、まさに、漸化式 (1.1) が示す関係なのである。そのように考えると、 n 個の番号付きのボールから k 個を選ぶ組み合わせの数が二項係数で与えられることが納得できるだろう。

Break: ポーカーの手の数

トランプゲームのポーカーは、52 枚のカードから引いた 5 枚のカードの組み合わせを競うゲームである。つまり、ポーカーの手の数は、

$$\binom{52}{5} = 2\,598\,960$$

だけの組み合わせがあるのである。そのうち、ロイヤルストレートフラッシュは、同一マークの 10, J, Q, K, A がそろわなければならないので 4 通りしかない。ストレートフラッシュは、同一マークの連続する数字でなければならないので全部で 36 通りである。よって、ロイヤルストレートフラッシュの発生確率は 649 740 回に 1 回、ストレートフラッシュの発生確率は 72 193 回に 1 回である。

1.3 ベキ乗和の一般化

話題をベキ乗和に戻そう。次数が小さいベキ乗和の公式を導出した。前々節の方法で、逐次、ベキ乗和の次数を上げていくと、その都度計算が複雑になることは明らかである。そこで、ベキ乗和を一般化し、 k 次のベキ乗和 $S_k(n) \equiv 0^k + 1^k + 2^k + \dots + (n-1)^k$ の公式を導出しようというのが本節の目的である。実は、ベキ乗和を一般化する過程で、本書の主題であるベルヌーイ数が導入されるのである。

ベキ乗和の一般化した形態として、 k 次のベキ乗和を導出しよう。これから導出する k 次のベキ乗和とは、

$$S_k(n) \equiv \sum_{p=0}^{n-1} p^k,$$

のように定義される。前節では、1 次のベキ乗和を計算するには、 $(j+1)^2 - j^2$ の和を評価し、2 次のベキ乗和を計算するには、 $(j+1)^3 - j^3$ を評価した。そこから類推すると、 k 次

のべき乗和を計算するには,

$$(p+1)^{k+1} - p^{k+1} = \sum_{j=0}^k \binom{k+1}{j} p^j,$$

を評価すればよい。なお, $(p+1)^{k+1}$ には二項定理を適用した。この数式で示す量について p を 0 から $n-1$ まで増加させて和をとると,

$$n^{k+1} = \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{j=0}^k \binom{k+1}{j} p^j,$$

となる。この式の右辺は,

$$\text{RHS} = \sum_{j=0}^k \binom{k+1}{j} S_j(n) = (k+1) S_k(n) + \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k+1}{j} S_j(n),$$

のように変形できるので,

$$S_k(n) = \frac{1}{k+1} \left[n^{k+1} - \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k+1}{j} S_j(n) \right], \quad (1.5)$$

なる関係が導かれる。この関係式から k 次のべき乗和 $S_k(n)$ は n についての $k+1$ 次式となることが予想できる。その理由は次のとおりである。まず, 一次のべき乗和 $S_1(n) = n(n-1)/2$ が n についての 2 次式であるので, (1.5) によって 2 次のべき乗和 $S_2(n)$ は n についての 3 次式となる。同様に, (1.5) によって 3 次のべき乗和 $S_3(n)$ は n についての 4 次式となり, これを繰り返していくと, k 次のべき乗和 $S_k(n)$ は n についての $k+1$ 次式となるのである。そこで, $S_k(n)$ を,

$$S_k(n) = \sum_{j=0}^{k+1} B_{kj} n^j,$$

なる n のべき級数で表現し, 未知の展開係数 B_{kj} を決定しよう。そのうち, $S_k(n)$ のゼロ次の係数について, $B_{k0} = 0$ なる関係が, 必ず, 成立する。なぜなら, 1 次のべき乗和 $S_1(n) = n(n-1)/2$ は n の倍数であり, (1.5) によって $S_2(n)$ が n の倍数であることが示される。さらに, (1.5) を繰り返すと, 任意の k について $S_k(n)$ が n の倍数であることが示せるからである。

展開係数 B_{kj} を決定するために, $S_k(n+1) - S_k(n) = n^k$ なる関係に注目しよう。この関係式の両辺を n について微分すると,

$$\frac{dS_k(n+1)}{dn} - \frac{dS_k(n)}{dn} = kn^{k-1},$$

となるが, n を 0 から $N-1$ まで増加させながら和をとると,

$$\frac{dS_k(N)}{dn} - \frac{dS_k(0)}{dn} = \sum_{n=0}^{N-1} kn^{k-1},$$

が得られる。ただし、 $dS_k(N)/dn$ なる記号は、 S_k を n のべき級数として微分し、その結果に対して、 $n = N$ を代入した値である。この式の左辺と右辺を別々に計算すると、

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= \frac{dS_k(N)}{dn} - B_{k1}, \\ \text{RHS} &= k \sum_{j=1}^N j^{k-1} = k S_{k-1}(N), \end{aligned}$$

となるので、

$$\frac{dS_k(n)}{dn} = k S_{k-1}(n) + B_{k1}, \quad (1.6)$$

なる関係が得られる。なお、ベルヌーイがべき乗和を一般化した際には、本書のように微分を利用していなかった。当時のベルヌーイの導出にしたがうより、微分を用いた導出の方がわかりやすいため、本書では歴史的な導出にしたがわず、微分を用いる。関係式(1.6)を繰り返し適用すれば高階の導関数が得られる。例えば、 p 階の導関数は、

$$\frac{d^p S_k(n)}{dn^p} = \frac{k!}{(k-p)!} S_{k-p}(n) + \frac{k!}{(k-p+1)!} B_{k-p+1,1}, \quad (1.7)$$

となる。この結果を用いて、 $n = 0$ を中心に $S_k(n)$ をテイラー展開すると、

$$\begin{aligned} S_k(n) &= \sum_{p=0}^{k+1} \frac{d^p S_k(0)}{dn^p} \frac{n^p}{p!} = \sum_{p=0}^{k+1} \frac{k!}{p! (k-p+1)!} B_{k-p+1,1} n^p \\ &= \frac{1}{k+1} \sum_{p=1}^{k+1} \binom{k+1}{p} B_{k-p+1,1} n^p = \frac{1}{k+1} \sum_{p=0}^k \binom{k+1}{p} B_{p1} n^{k-p+1}, \end{aligned}$$

が得られる。この式を見ると、導入された未知の展開係数 B_{kj} のうち、 B_{k1} だけがテイラー展開の係数として残っている。そこで、 $B_p \equiv B_{p1}$ のように置き換えると、テイラー展開は、

$$S_k(n) = \frac{1}{k+1} \sum_{p=0}^k \binom{k+1}{p} B_p n^{k-p+1}, \quad (1.8)$$

のように書き換えることができる。この残った未知の展開係数 B_p がベルヌーイ数と呼ばれる数列である。

それでは未知の係数であるベルヌーイ数の特定を始めよう。まず、数列の和 $S_k(n)$ の級数展開(1.8)に $n = 1$ を代入してみる。左辺は $S_k(1) = 0$ であるから、

$$\sum_{p=0}^k \binom{k+1}{p} B_p = 0,$$

なる関係が得られる。この関係式は、

$$\sum_{p=0}^{n-1} \binom{n}{p} B_p = 0, \quad (1.9)$$

あるいは,

$$B_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{p=0}^{n-1} \binom{n+1}{p} B_p, \quad (1.10)$$

のように書き換えることもできる。この式はベルヌーイ数を逐次的に得るための漸化式である。まず、初項として $B_0 = 1$ である。これは、 $S_1(n) = n(n-1)/2$ の関係から導かれる。続いて、この初項を漸化式に代入し、計算していくと、順次、ベルヌーイ数が求められる。初項が有理数であり、漸化式 (1.10) によって計算されることから、ベルヌーイ数が有理数であることがわかる。漸化式を実行し、最初の 30 項を計算すると下表のような結果が得られる。

表 1.2: 分数表現によるベルヌーイ数

n	B_n	n	B_n	n	B_n
0	1	10	5/66	20	-174611/330
1	-1/2	11	0	21	0
2	1/6	12	-691/2730	22	854513/138
3	0	13	0	23	0
4	-1/30	14	7/6	24	-236364091/2730
5	0	15	0	25	0
6	1/42	16	-3617/798	26	8553103/6
7	0	17	0	27	0
8	-1/30	18	43867/798	28	-1869628555/58
9	0	19	0	29	0

計算したベルヌーイ数を見ると、 B_1 以外の奇数項がゼロである。それ以降のベルヌーイ数も奇数項がゼロであると推測できる。その推測は正しく、ベルヌーイ数には $B_{2k+1} = 0$ ($k = 1, 2, \dots$) なる特徴がある。その特徴は、第 3.1 節で証明する。

また、ベルヌーイ数が、元来、べき乗和の一般化のため導入されたことに注目し、これらの係数がべき乗和を与えることを $k = 3$ を例に検証してみよう。ベルヌーイ数を用いて展開した後、具体的な値を代入すると、

$$\begin{aligned} S_3(n) &= \frac{1}{4}(B_0 n^4 + 4B_1 n^3 + 6B_2 n^2 + 4B_3 n) \\ &= \frac{1}{4}(n^4 - 2n^3 + n^2) = \frac{1}{4}n^2(n-1)^2, \end{aligned}$$

となるので、ベルヌーイ数がべき乗和を与える係数であることが確認できる。当然、さらに高次のべき乗和について検証しても正当性が実証できるはずだ。

歴史的な記述 ヤコブ・ベルヌーイが導出したべき乗和の公式は本書の公式とはわずかに異なる形態である。現代の数式の記述法で書くと、ベルヌーイが導出した公式は、

$$1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k = \frac{1}{k+1}n^{k+1} + \frac{1}{2}n^k + \frac{k}{2}An^{k-1} + \frac{k(k-1)(k-2)}{2 \cdot 3 \cdot 4}Bn^{k-3} \\ + \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}Cn^{k-5} \\ + \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)(k-5)(k-6)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}Dn^{k-7} + \cdots$$

であった。この数式は無限に項が続くように見えるかもしれないが、 n の指数が正の範囲に限定される。この数式に記載されている展開係数として、

$$A = \frac{1}{6}, \quad B = -\frac{1}{30}, \quad C = \frac{1}{42}, \quad D = -\frac{1}{30}, \quad \dots$$

である。これらの係数がベルヌーイ数である。しかし、ベルヌーイが示した公式には、本書が取り扱う公式と異なる点がある。それは、本書が 0^k から $(n-1)^k$ の和を取り扱うのに対し、ベルヌーイの公式は 1^k から n^k の和を取り扱っていることである。日本の和算学者である関孝和が取り扱った公式もベルヌーイと同様であった。その歴史的なべき乗和の公式と本書のべき乗和の公式の関係を調べてみよう。

ベルヌーイや関孝和によるべき乗和を $\hat{S}_k(n)$ としよう。そのべき乗和を一般化したときの展開係数を \hat{B}_n とすると、歴史的なべき乗和の公式は、

$$\hat{S}_k(n) = \frac{1}{k+1} \sum_{p=0}^k \hat{B}_p n^{k-p+1} \quad \text{where } \hat{S}_k(n) = \sum_{j=1}^n j^k,$$

のように記述できるはずだ。べき乗和 $\hat{S}_k(n)$ は 0^k から $(n-1)^k$ までの和ではなく、 1^k から n^k までの和である。つまり、 $\hat{S}_k(n) = S_k(n) + n^k$ なる関係が成立する。この関係に注意すると、

$$\hat{S}_k(n) = \frac{B_0}{k+1} n^{k+1} + (B_1 + 1)n^k + \frac{1}{k+1} \sum_{p=2}^k \binom{k+1}{p} B_p n^{k-p+1},$$

となる。よって、ベルヌーイと関孝和が導入した数列は、 $\hat{B}_0 = 1$, $\hat{B}_1 = 1/2$, $\hat{B}_k = B_k$ である。また、 $\hat{B}_1 = -B_1 = 1/2$, $\hat{B}_{2m+1} = -B_{2m+1} = 0$ ($m = 1, 2, \dots$) と考えれば、一般化した関係式として $\hat{B}_n = (-1)^n B_n$ が成立すると考えることもできる。

べき乗和の公式は本書で取り扱うように 0^k から $(n-1)^k$ の和を取り扱うのが現代の主流である。しかし、歴史的なべき乗和の記述によってベルヌーイ数を導入するテキストがある[†]ことにも注釈しておく。そのような歴史的な形態に基づくテキストでは、ベルヌーイ数は B_n でなく \hat{B}_n を用いるため、ベルヌーイ数の第1項は $-1/2$ でなく、 $1/2$ と記載されていることに注意を要する。

[†]例えば、荒川恒男、金子昌信、伊吹山知義，“ベルヌーイ数とゼータ関数,” 牧野書店, 2001.

1.4 母関数による解析

数列を展開係数とする級数を調べるため、母関数 (generating function) を導入することがある。母関数を導入するとは、評価対象の数列を展開係数とする級数をつくってみることである。その級数が形成する関数形から対象とする数列の一般項や漸近的振る舞いが考察できるのである。本節ではベルヌーイ数の母関数を評価し、ベルヌーイ数の性質を調べる。

1.4.1 母関数の導入

母関数は級数展開における数列の性質を調べるための数学的ツールである。母関数、つまり、母なる関数などと、たいそうな名前がついているが、その正体は非常に簡単である。数列 a_n の母関数とは、単に、その数列を展開係数とする級数[‡]のことである。代表的な母関数として、次に説明する3つの母関数が挙げられる。

通常母関数 単に母関数と言え、この種類の母関数であることが多い。通常母関数は、数列 a_n を展開係数とするべき級数であり、

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

の形で定義される。例えば、数列 $\{a_n^{(1)}\} = \{1, 1, 1, \dots\}$ の通常母関数は、

$$G(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x},$$

である。また、 $\{a_n^{(2)}\} = \{0, 1, 0, -1/3, 0, 1/5, 0, -1/7, \dots\}$ の通常母関数は、

$$G(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \arctan x,$$

である。この母関数が逆正接関数 (arctangent) となり、その変数に $x = 1$ を代入すれば、数列 $\{a_n^{(2)}\}$ の無限級数が $\pi/4$ となることが導かれる。

指数型母関数 指数型母関数は、 $e^x = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + \dots$ の形を模倣し、

$$G_E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n,$$

なる形で定義される。後に示すように、ベルヌーイ数の性質を調べるにはこのタイプの母関数を利用する。

[‡]母関数とは、単なるべき級数なのだが、それにしてはたいそうな名前である。その名前がゆえに、母関数に何らかの特別な意味を求め、母関数をとっつきにくいものになっている印象がある。ちなみに、英語では母関数を generating function (生成関数) という。英語でもたいそうな名前だ。

ポアソン型母関数 ポアソン型母関数は、パラメータ λ のポアソン分布の確率が $\lambda^k e^{-\lambda} / k!$ であることに模倣した形式:

$$G_P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} x^n,$$

で定義される。残念ながら、この型の母関数は本書で取り扱わない。

1.4.2 数列の評価例

母関数による評価対象としてフィボナッチ数列を考えてみよう。フィボナッチ数列は $F_0 = 0, F_1 = 1$ と、 $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ なる漸化式によって定義される。この漸化式を用いて、フィボナッチ数列を初項から順に列記すると、

$$\{F_n\} = \{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots\},$$

のように書くことができる。

フィボナッチ数列の通常母関数を計算し、フィボナッチ数列の性質を調べるのが本節の目的である。通常母関数は、

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = F_1 x + F_2 x^2 + F_3 x^3 + F_4 x^4 + \dots, \quad (1.11)$$

のように書くことができる。なお、 $F_0 = 0$ であることから、ゼロ次の項は既に取り除いている。次に、この母関数に x を乗じた結果と、 x^2 を乗じた結果を並べて書くと、

$$\begin{aligned} xG(x) &= F_1 x^2 + F_2 x^3 + F_3 x^4 + F_4 x^5 + \dots, \\ x^2 G(x) &= F_1 x^3 + F_2 x^4 + F_3 x^5 + \dots, \end{aligned}$$

が得られる。次に、 $F_1 = F_2 = 1$ と漸化式 $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ に注意しながら、上の計算結果と (1.11) を比較すると、

$$G(x) = (x^2 + x)G(x) + x,$$

なる関係が得られる。この関係式より、ただちに、

$$G(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}, \quad (1.12)$$

が導出される。これがフィボナッチ数列の母関数、すなわち、フィボナッチ数列を展開係数とする級数の正体である。言い換えると、

$$\frac{x}{1 - x - x^2} = x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + 8x^6 + 13x^7 + \dots,$$

なる級数展開が得られたことを意味する。とは言え、フィボナッチ数列を展開係数とする級数の正体がわかったところで、有用性を感じないかもしれない。しかし、次の段落で母関数の有用性を示してみよう。

母関数を利用すると、フィボナッチ数列の一般項を計算する数式を特定できる。そのためには、母関数 (1.12) を級数展開するのである。とは言っても、単純にフィボナッチ数列を係数とする級数展開を再確認するのではなく、別の展開表現を探すのである。フィボナッチ数列の母関数 (1.12) の分母には x の 2 次の項を含むので、(1.12) を部分分数展開し、2 次の項が現れないようにしておこう。分母が、

$$1 - x - x^2 = \left(1 - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}x\right) \left(1 - \frac{1 - \sqrt{5}}{2}x\right),$$

のように因数分解できることを利用すれば、フィボナッチ数列の母関数は、

$$\begin{aligned} \frac{x}{1 - x - x^2} &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{x}{1 - (1 - \sqrt{5})x/2} - \frac{x}{1 - (1 + \sqrt{5})x/2} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{1 - (1 + \sqrt{5})x/2} - \frac{1}{1 - (1 - \sqrt{5})x/2} \right), \end{aligned}$$

のように部分分数展開できる。この式の右辺の第 1 項と第 2 項について、

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots,$$

を応用して級数展開すれば、

$$\frac{1}{1 - x - x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right] x^n,$$

が得られる。もともと、この関数はフィボナッチ数列の母関数であったので、各次数の係数を比較し、

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(-\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{-n} \right], \end{aligned} \tag{1.13}$$

が得られる。つまり、母関数はフィボナッチ数列の一般項を特定するために役に立ったのである。フィボナッチ数列は整数しか取らないはずなのに、一般項を計算する公式には $\sqrt{5}$ のような無理数が含まれていることが奇妙に見えるかもしれない。ところが、(1.13) に順次 n を代入してみると、正しく一般項を与えることが示せるはずである。

一般項 (1.13) の右辺の第 2 項は n の増加と共に小さくなり, $n \rightarrow \infty$ の極限でゼロに収束するので, フィボナッチ数列の隣り合う項の比率は,

$$\phi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \simeq 1.61803\ 39887 \dots,$$

の関係を満たす。この比率 ϕ は黄金比と呼ばれる比率であり, 幾何学的にも代数的にも対称性をもつ比率である。幾何学的な対称性は, 図 1.2 によって示すことができる。図 1.2 (a) は縦横比が黄金比となる長方形 (黄金長方形) である。この長方形の左側から正方形を切り取ると, 残された右部は縦長の黄金長方形となる。さらにその下側から正方形を切り取ると, 上部に横長の黄金長方形が残る。この正方形分割を繰り返すと, 分割される正方形は操作を重ねるたびに黄金比の逆数 ($= 1/\phi$) 倍のように小さくなっていく。しかも, 残された形状は, 必ず, 黄金長方形である。横長の黄金長方形の高さを 1 とし, 幅を x とする。左側の長方形を切り取ると, 右側に縦長の黄金長方形が残される事実は, $x - 1 = 1/x$ なる方程式に相当する。この方程式は, $x^2 - x - 1 = 0$ なる 2 次方程式に書き換えられるので, 確かに, x は黄金比 ($= \phi$) となる。なお, 図 1.2 (b) に描かれた螺旋は, 黄金長方形を分割した正方形に接する螺旋であり, 黄金螺旋と呼ばれる。黄金螺旋は, 対数螺旋[§]の一種である。

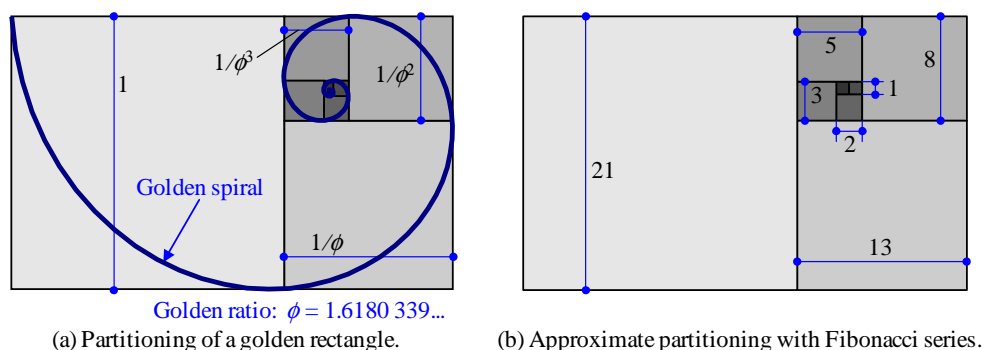


図 1.2: 黄金長方形の正方形分割

一方, 図 1.2 (b) はフィボナッチ数列を辺の長さとする正方形を配置した様子を表している。フィボナッチ数列を大ききとする正方形は, この図のように隙間なく並べることができる。しかも, それによって得られる長方形は近似的に黄金長方形となる。

代数的な対称性としては, 連分数表現における対称性である。黄金長方形の分割のときに述べた方程式 $x - 1 = 1/x$ から, 黄金比 ϕ は,

$$\phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

[§]極座標における角度とともに半径が指数関数的に変化する曲線。

のように、無限に続く連分数で表現できる。この連分数は、数値計算の目的では役に立たないが、数値の対称性の意味で興味深い。

黄金比は、その対称性に起因するのか、自然界に多く見られる。また、人間の感覚として美を感じる比率らしく、古代ギリシャのパルテノン神殿の縦横比は黄金比に近い比率である[¶]と言われている。

1.4.3 ベルヌーイ数の指数型母関数

対象をベルヌーイ数に戻そう。母関数を利用すれば数列の性質がわかることがあるのは前節で例を示したとおりである。ベルヌーイ数の性質を調べるには、指数型母関数を利用すると都合がよい。ベルヌーイ数の指数型母関数とは、

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!},$$

のような級数である。指数型母関数は e^x のマクローリン級数を模倣した形をしている。前に導出した関係式:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} B_k = 0 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

に注目し、指数型母関数に類似した次の関数を計算してみる。

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} B_k \right] \frac{x^n}{(n+1)!} \\ &= B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} B_k = 1. \end{aligned} \quad (1.14)$$

この関数は次のように計算することもできる。

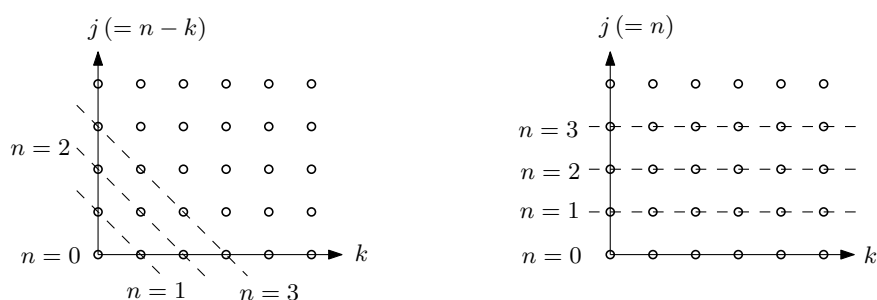
$$\begin{aligned} \text{LHS} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{B_k}{k!} x^k \frac{x^{n-k}}{(n-k+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^k = \frac{e^x - 1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^k. \end{aligned} \quad (1.15)$$

ここで、第1行目から第2行目の数式変形について説明しておこう。この数式変形は、総和における添え字の順序を変更することによって成り立つ。具体的に説明すると、(1.15)で演算される総和は、

$$\sum_{k,j} \frac{B_k}{k!} x^k \cdot \frac{x^j}{(j-1)!},$$

[¶]Kimberly Elam, "Balance in Design," Princeton Architecture Press, pp. 6–11, 2001.
渡邊泰治, "黄金比の謎," 化学同人, pp. 99–102, 2007.

のように書くことができる。ここで、総和をとるにあたり、添え字 k と j の組み合わせを図 1.3 に示す格子点で表現してみる。格子点の座標 $[k, j]$ が総和をとるときの添え字に対応している。図 1.3 (a) は、ゼロから始まり順次増加する番号 n に対して、右下に傾いた破線に沿って総和を計算していく順序を表している。すなわち、この図は (1.15) の第 1 行目の演算に相当する。これに対して、図 1.3 (b) は、番号 n に対して水平方向に伸びる破線に沿って総和をとる順序を表している。これは (1.15) の第 2 行目の演算に相当する。図 1.3 の (a) と (b) は経路こそ違おうが、どちらもすべての格子点を 1 回だけ通過するため、(1.15) の第 1 行目から第 2 行目への変形が正しいことを意味する。



(a) Order of summation of the first line. (b) Order of summation of the second line.

図 1.3: 指数型母関数を計算するための総和の順序

さらに、(1.15) の右辺を導出するにあたり、指数関数のテイラー展開:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

を用いた。もともと (1.14) と (1.15) は同じ数式であるので、これらを等号で結べば、

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^k = \frac{x}{e^x - 1}, \quad (1.16)$$

なる関係式が得られる。つまり、ベルヌーイ数 B_n は $x/(e^x - 1)$ の展開係数を与える数列である。数学的には、この母関数がベルヌーイ数の定義として用いられている。言い換えると、 $x/(e^x - 1)$ を $x = 0$ を中心にテイラー展開したときの k 次の展開係数を $B_k/k!$ とおくことによって、ベルヌーイ数 B_k が定義されている。しかしながら、テイラー展開によるベルヌーイ数の定義はベルヌーイ数を計算するには不向きであり、むしろ、前節で導出した漸化式を利用したほうが容易である。

ベルヌーイ数の指数型母関数が (1.16) なる性質を示すこと重要である。この事実が成立するゆえに、ベルヌーイ数が正接関数 (tangent) のマクローリン展開の展開係数を与えるのだ。後に明らかになるように、ベルヌーイ数が数学的に重要であるのは、この指数型母関数に起因する要素が少なくない。

1.4.4 ベルヌーイ数の一般項

既にベルヌーイ数を順次計算するための漸化式を得ることができたので、ベルヌーイ数を計算できる。本節では、漸化式ではなく、ベルヌーイ数の任意の項を与える公式を導出してみよう。

ベルヌーイ数の一般項を得るには、次のような第2種スターリング数を知っておくと便利である。第2種スターリング数は次章で説明するが、 $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ m \end{smallmatrix} \right\}$ のように2つのパラメータをもつ量である。この量の数学的な説明は次章に譲るとして、第2種スターリング数は、

$$m! \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ m \end{smallmatrix} \right\} \equiv \sum_{p=1}^m (-1)^{m-p} \binom{m}{p} p^n,$$

なる関係で表される。このパラメータを2つもつ数列とベルヌーイ数との関連性を調べてみよう。第2種スターリング数を n についての数列とみなし、指数型母関数を計算してみると、

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} m! \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ m \end{smallmatrix} \right\} \frac{t^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{p=0}^m (-1)^{m-p} \binom{m}{p} p^n \right] \frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^m (-1)^{m-p} \binom{m}{p} \frac{(pt)^n}{n!} = \sum_{p=0}^m (-1)^{m-p} \binom{m}{p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(pt)^n}{n!} \\ &= \sum_{p=0}^m (-1)^{m-p} \binom{m}{p} e^{pt} = (e^t - 1)^m, \end{aligned}$$

が得られる。この結果を改めて書くと、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ m \end{smallmatrix} \right\} \frac{t^n}{n!} = \frac{(e^t - 1)^m}{m!}, \quad (1.17)$$

となる。この関係式がベルヌーイ数の一般項を得る便利な公式である。

さて、ベルヌーイ数の指数型母関数を変形して、ベルヌーイ数の一般項を求める等式を得てみよう。前節で、ベルヌーイ数の指数型母関数が $x/(e^x - 1)$ となることが導かれたので、その母関数を変形していくと、

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!} &= \frac{x}{e^x - 1} = \frac{\log[1 - (1 - e^x)]}{e^x - 1} = -\frac{1}{e^x - 1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(1 - e^x)^m}{m} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(1 - e^x)^{m-1}}{m} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(1 - e^x)^m}{m+1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (e^x - 1)^m}{m+1} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} m! \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ m \end{smallmatrix} \right\} \frac{(-1)^m x^n}{(m+1)n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m m!}{m+1} \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ m \end{smallmatrix} \right\} \right] \frac{x^n}{n!}, \end{aligned}$$

この式の右辺も指数型母関数の形になっている。つまり、右辺の括弧内の第2種スターリング数を含む項がベルヌーイ数 B_n である。右辺からベルヌーイ数の部分だけを抜き出し、第2種スターリング数を定義にしたがって分解していくと、

$$\begin{aligned} B_n &= \sum_{m=0}^n (-1)^m \frac{m!}{m+1} \left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\} \\ &= \sum_{m=0}^n \frac{1}{m+1} \sum_{p=0}^m (-1)^p \binom{m}{p} p^n, \end{aligned}$$

となる。この式がベルヌーイ数の一般項を与える式である。もう少し整理して書くと、

$$B_n = \sum_{p=0}^n (-1)^p p^n \sum_{m=p}^n \frac{1}{m+1} \binom{m}{p}, \quad (1.18)$$

が得られる。ここに得られたベルヌーイ数 B_n の一般項は、総和記号が二重に組まれているので、しかも、整数 p に関する総和の被加算項に p^n が含まれているので、手軽な計算手法とはいえない。むしろ、ベルヌーイ数の漸化式、あるいは、次章で紹介するタンジェント・セカント数を用いたほうが手軽にベルヌーイ数を計算することができる。

1.5 数列の和と畳み込み和

数列の和を計算するには畳み込み和 (telescoping sum)¹ を利用すると便利ことが多い。畳み込み和とは、 $1/(4k^2 - 1)$ の和を計算する問題が典型的な例である。その問題となる数式は部分分数展開によって、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2 - 1} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \left(\frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n-1} \right) + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \right], \end{aligned}$$

のように展開される。展開した隣り合う括弧の中の第2項と第1項が互いに打ち消しあっているのが、この式から明らかである。この打ち消し合いが数式の先頭から最後尾まで伝播し、結局、

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2 - 1} = \frac{n}{2n+1},$$

が得られる。このように、数列の和を計算する過程において、打ち消し合いが伝播し、両端の値しか残らない総和を畳み込み和と呼ぶ。本節では、畳み込み和の応用例を紹介する。

¹実は、「畳み込み和」が一般的な用語か定かではない。英語の telescoping sum に対応する言葉を書いた和文書籍が見当たらないのだ。インターネットの Wikipedia で、「畳み込み和」と「望遠鏡和」が見つかったので、本書では前者の名称を用いる。

1.5.1 べき乗和

畳み込みは、本節で新たに導入した技法ではなく、べき乗和を一般化する時点で既に登場していた。本章の前半で、 k 次のべき乗和を求めるには、 $(p+1)^{k+1} - p^{k+1}$ について p を 0 から $n-1$ まで増加させた和をとっていたことを思い出そう。簡単のため、 $k=1$ の場合について、書いてみると、

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{n-1} [(p+1)^2 - p^2] &= (1^2 - 0^2) + (2^2 - 1^2) + (3^2 - 2^2) + \cdots \\ &\quad \cdots + ((n-1)^2 - (n-2)^2) + (n^2 - (n-1)^2) = n^2, \end{aligned}$$

となる。これが畳み込み和になっているのである。ところが、この式の左辺が、

$$\sum_{k=0}^{n-1} [(p+1)^2 - p^2] = 2 \sum_{k=0}^{n-1} p + 2 \sum_{k=0}^{n-1} 1 = 2 \sum_{k=0}^{n-1} p + n,$$

と書ける。この式と畳み込み和の結果を等号で結ぶことによって、

$$\sum_{k=0}^{n-1} p = \frac{1}{2}n(n-1),$$

が得られたというわけである。既に示したように、次数 k が大きくなっても、この畳み込み和を応用してべき乗和の公式が得られる。そのような考察の結果としてベルヌーイ数が導入されたのである。

1.5.2 フィボナッチ数列

畳み込み和の応用の練習材料としてフィボナッチ数列を扱ってみよう。フィボナッチ数列 F_k は、 $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$ なる漸化式から畳み込み和を利用した関係式をつくりやすい。フィボナッチ数列の漸化式が、 $F_k = F_{k+1} - F_{k-1}$ のように書き換えられることに注意すると、

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} F_k &= F_0 + (F_2 - F_0) + (F_3 - F_1) + (F_4 - F_2) + \cdots \\ &\quad \cdots + (F_{n-1} - F_{n-3}) + (F_n - F_{n-2}) \\ &= F_n + F_{n-1} - 1 = F_{n+1} - 1, \end{aligned}$$

が得られる。つまり、先頭から連続するフィボナッチ数列の和は、総和計算に用いた最終項の2つ後の項から1を減じた値に等しい。

畳み込み和を応用したフィボナッチ数列の性質はこれだけではない。漸化式が, $F_{2k+1} = F_{2k+2} - F_{2k}$ のように書き換えられることに注意すると,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} F_{2k+1} &= (F_2 - F_0) + (F_4 - F_2) + \cdots + (F_{2n} - F_{2n-2}) \\ &= F_{2n}, \end{aligned}$$

が得られる。この結果が意味しているのは、フィボナッチ数列の奇数項の総和は、総和計算に用いた最終項の次に現れる偶数項に等しいということである。偶数項の総和でも類似の関係式がある。フィボナッチ数列の漸化式は $F_{2k} = F_{2k+1} - F_{2k-1}$ のように書き換えてもよいので,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} F_{2k} &= F_0 + (F_3 - F_1) + (F_5 - F_3) + \cdots + (F_{2n-1} - F_{2n-3}) \\ &= F_{2n-1} - F_1 + F_0 = F_{2n-1} - 1, \end{aligned}$$

が成立するはずである。しがたって、フィボナッチ数列の偶数項の総和は、総和計算に用いた最終項の次に現れる奇数項から 1 を減じた結果に等しい。

続いて、漸化式 $F_k = F_{k+1} - F_{k-1}$ の両辺に F_k を乗じた積 $F_k^2 = F_k(F_{k+1} - F_{k-1})$ について畳み込み和を適用すると,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} F_k^2 &= F_0^2 + (F_1F_2 - F_0F_1) + (F_2F_3 - F_1F_2) + \cdots \\ &\quad \cdots + (F_{n-1}F_n - F_{n-2}F_{n-1}) = F_{n-1}F_n, \end{aligned}$$

が得られる。つまり、フィボナッチ数列の自乗和は、総和計算に用いた最終項 F_{n-1} とその次に現れる項 F_n の積に等しい。

いささかトリッキーであるが、 $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$ を考えてみよう。この漸化式を使うと、和が畳み込めない。その代わりに、 $(-1)^k F_k$ の総和はどうであろうか? 隣り合う項の間で漸化式の符号が入れ替わるので、和が畳み込めるはずである。計算してみると,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k F_k &= F_0 - F_1 + (F_1 + F_0) - (F_2 + F_1) + \cdots \\ &\quad \cdots + (-1)^{n-1} (F_{n-2} + F_{n-3}) = (-1)^{n-1} F_{n-2} - 1, \end{aligned}$$

のように、和の畳み込めている。よって、フィボナッチ数列を交替的に(符号を入れ替えながら)加算した総和は、最終項の直前の項に符号を付加し 1 を減じた結果に等しい。なお、付加した符号は、総和を求める際に最終項に与えた符号と同一の符号である。

さらに、漸化式を $F_k = F_{k+2} - F_{k+1} = 2F_{k+2} - F_{k+3}$ のように変形してみる。この式に関して、畳み込み和が成立させるには、 $F_k/2^{k+1}$ の総和を考えればよいだろう。計算してみ

ると,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{F_k}{2^{k+1}} &= \left(F_2 - \frac{F_3}{2}\right) + \left(\frac{F_3}{2} - \frac{F_4}{4}\right) + \left(\frac{F_4}{4} - \frac{F_5}{8}\right) + \cdots \\ &\cdots + \left(\frac{F_n}{2^{n-2}} - \frac{F_{n+1}}{2^{n-1}}\right) + \left(\frac{F_{n+1}}{2^{n-1}} - \frac{F_{n+2}}{2^n}\right) = 1 - \frac{F_{n+3}}{2^n}, \end{aligned}$$

が得られる。この関係式は興味深い。これに類似した漸化式の変形として、 $F_{2k} = F_{2k+2} - F_{2k+1} = F_{2k+3} - 2F_{2k+1}$ を利用すると異なる結果が得られる。この場合は、 $F_{2k}/2^{k+1}$ の総和を考えると畳み込み和の形になる。具体的に計算してみると、

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{F_{2k}}{2^{k+1}} &= \left(\frac{F_3}{2} - F_1\right) + \left(\frac{F_5}{4} - \frac{F_3}{2}\right) + \left(\frac{F_7}{8} - \frac{F_5}{4}\right) + \cdots \\ &\cdots + \left(\frac{F_{2k+1}}{2^{n-1}} - \frac{F_{2k-1}}{2^{n-2}}\right) + \left(\frac{F_{2k+3}}{2^n} - \frac{F_{2k+1}}{2^{n-1}}\right) = \frac{F_{2k+3}}{2^n} - 1, \end{aligned}$$

が得られる。類似した形をしているが、これら2つの結果は意味が異なる。実は、 $n \rightarrow \infty$ の極限で、 $F_k/2^{k+1}$ の総和が1に収束するのだが、 $F_{2k}/2^{k+1}$ の総和は発散するのである。前に説明したように、 F_{k+1}/F_k は $k \rightarrow \infty$ の極限で黄金比 ($\phi \simeq 1.618$) に近づく。ところで、 $k \rightarrow \infty$ の極限で、 $F_k/2^{k+1}$ は $(\phi/2)^k$ に比例し、 $F_{2k}/2^{k+1}$ は $(\phi/\sqrt{2})^{2k}$ に比例する。上で値を記載したとおり、 $\sqrt{2} < \phi < 2$ であるので、前者の級数が収束し、後者が発散するのである。

1.5.3 上昇階乗の和

前に示したように、べき乗和はベルヌーイ数を展開係数とする級数で計算できる。これに対し、上昇階乗の和は、さらに簡単で美しい形で記述できることがわかっている。上昇階乗とは、ある実数 x を与えたとき、 $x(x+1)(x+2)\cdots(x+k-1)$ のように、1ずつ増加させて乗じる操作を k 回繰り返した結果を k 次の上昇階乗 (rising factorial) という。

まず、 $m+1$ 次の上昇階乗 $k(k+1)(k+2)\cdots(k+m)$ と、 k を $k+1$ で置き換えた式 $(k+1)(k+2)(k+3)\cdots(k+m+1)$ の差を計算すると、

$$\begin{aligned} &(k+1)(k+2)(k+3)\cdots(k+m+1) - k(k+1)(k+2)\cdots(k+m) \\ &= (k+1)(k+2)(k+3)\cdots(k+m) \cdot (m+1), \end{aligned}$$

となる。次章で導入する記法を先取りして、上昇階乗を $k^{\overline{m}} = k(k+1)(k+2)\cdots(k+m-1)$ のように書くことにすると、上の式は、

$$(m+1)(k+1)^{\overline{m}} = (k+1)^{\overline{m+1}} - k^{\overline{m}},$$

のように書くことができる。この式の両辺について、 $k = 0$ から $n - 1$ にわたって和をとると、

$$(m+1) \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^{\overline{m}} = (1^{\overline{m+1}} - 0^{\overline{m+1}}) + (2^{\overline{m+1}} - 1^{\overline{m+1}}) + \dots \\ \dots + ((n-1)^{\overline{m+1}} - (n-2)^{\overline{m+1}}) + (n^{\overline{m+1}} - (n-1)^{\overline{m+1}}) = n^{\overline{m+1}},$$

が得られる。つまり、この総和は畳み込み和の関係になっている。上昇階乗の和は、畳み込み和によって、

$$\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^{\overline{m}} = \frac{n^{\overline{m+1}}}{m+1}, \quad (1.19)$$

であることが導かれたのである。この数式は、上昇階乗の記号を元に戻すと、

$$\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)(k+2)\cdots(k+m) = \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}{m+1}, \quad (1.20)$$

のように書くことができる。また、この関係式は、 $k+1 \mapsto k$ の置き換えによって、

$$\sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2)\cdots(k+m-1) = \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}{m+1},$$

のように書き換えることもできる。この結果は、興味深く、美しい形をしている。前に示したように、べき乗和はベルヌーイ数を展開係数とするべき級数で表現されていた。しかし、上昇階乗の和はべき級数でなく、上昇階乗 (1 項のみ) で書けるのだ。

上昇階乗の和の公式は、数学的に美しいだけで、それほど有用な公式でもないのだが、せっかく導出したので、利用できる例を示しておこう。その例として、上昇階乗の公式を利用して 3 次のべき乗和を計算しよう。計算をするには、3 次のべき乗 k^3 を上昇階乗の和に分解して、公式を利用するのである。すると、

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \sum_{k=1}^n [k^2(k+1) - k^2] \\ = \sum_{k=1}^n [k(k+1)(k+2) - 3k(k+1) + k] \\ = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} - \frac{3n(n+1)(n+2)}{3} + \frac{n(n+1)}{2} \\ = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

が得られる。この結果に対して、 $n \mapsto n - 1$ の置き換えをすると、前に計算した $S_3(n) = n^2(n-1)^2/4$ が得られる。実は、上昇階乗の和とべき乗和の関係から、ベルヌーイ数の性質を導くことができる。その議論は、次章に譲ることにする。

1.5.4 上昇階乗の逆数

上昇階乗だけでなく、その逆数も畳み込み和が適用できる。例として、 $k+1$ を基点とする m 次の上昇階乗の逆数 $1/(k+1)(k+2)\cdots(k+m)$ と、 k を $k+1$ で置き換えた量 $1/(k+2)(k+3)\cdots(k+m+1)$ の差を計算すると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{(k+1)(k+2)\cdots(k+m)} - \frac{1}{(k+2)(k+3)\cdots(k+m+1)} \\ = \frac{m}{(k+1)(k+2)\cdots(k+m)(k+m+1)}, \end{aligned}$$

が得られる。この式は、上昇階乗を表す記法を用いて簡略表記すると、

$$\frac{m}{(k+1)^{\overline{m+1}}} = \frac{1}{(k+1)^{\overline{m}}} - \frac{1}{(k+2)^{\overline{m}}},$$

となる。この式の両辺について、 $k=0$ から $n-1$ の範囲で和をとると、

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^{\overline{m+1}}} = \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m!} - \frac{1}{(n+1)^{\overline{m}}} \right), \quad (1.21)$$

が得られる。上昇階乗に関する記号を元に戻すと、この計算結果は、

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)(k+2)\cdots(k+m+1)} = \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m!} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)} \right), \quad (1.22)$$

のように書くことができる。さらに、 $k+1 \mapsto k$ のように置き換えると、この公式は、

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)\cdots(k+m)} = \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m!} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)} \right),$$

のように書くことができる。本節で示したように、上昇階乗の逆数の和も、上昇階乗の和に類似した美しい性質がある。

第2章 スターリング数

前章でべき乗和を定式化したついでに、上昇階乗における総和がべき乗和の公式に比べ、美しい形であることを紹介した。本章では、上昇階乗と下降階乗という概念を紹介し、べき乗との関連づけのためスターリング数を導入する。スターリング数には第1種スターリング数と、第2種スターリング数の2種類が定義されている。それらの定義は、本章で説明する。さらに、スターリング数とベルヌーイ数の関係にも言及する。

2.1 上昇階乗と下降階乗

階乗と言えば、 $k! \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (k-1)k$ のように、1を基点として上昇する整数の乗積を思い浮かべるだろう。これに対し、ある数値 x を基点として1ずつ増加させながら乗積を k 回繰り返した結果 $x(x+1)(x+2)\cdots(x+k-1)$ を k 次の上昇階乗 (rising factorial) と呼ぶ。逆に、基点となる数値 x から1ずつ減少させながら乗積を k 回繰り返した結果 $x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)$ を k 次の下降階乗 (falling factorial) と呼ぶ。これらの場合、基点とする数値 x は整数でなくてもよいとする。

本章では上昇階乗と下降階乗を取り扱うため、そのための記号を定義しておこう。上昇階乗は $x^{\bar{k}}$ のように、指数にオーバーラインを付加した記号で表す。下降階乗は $x^{\underline{k}}$ のように、指数にアンダラインを付加した記号で表す。その定義を具体的に書くと、

$$\begin{aligned}x^{\bar{k}} &\equiv x(x+1)(x+2)\cdots(x+k-1), \\x^{\underline{k}} &\equiv x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1),\end{aligned}$$

のようになる。典型的な例をあげると、 $1^{\bar{k}} = k!$ である。また、正の整数 n, k について、 $n^{\bar{k}} = (n+k-1)!/(n-1)!$ が成立する。この類の関係式は、むしろ、下降階乗の方が簡潔に書ける。下降階乗の場合、 $n^{\underline{k}} = n!/(n-k)!$ となる。この関係式から発想できる通り、二項係数は $\binom{n}{k} = n^{\underline{k}}/k!$ のように下降階乗を用いると簡潔に書くことができる。

上昇階乗の次数を1だけ増加することを考えよう。その操作は、

$$x^{\overline{k+1}} = (x+k)x^{\bar{k}},$$

のように書くことができる。この関係式を利用すると、上昇階乗の次数を1だけ減少する操作は、

$$x^{\overline{k-1}} = \frac{x^{\overline{k}}}{x+k-1},$$

であると考えられる。これを利用すると、ゼロ次、負の次数の上昇階乗も議論することができる。それらを列記すると、

$$\begin{aligned} x^{\overline{0}} = 1, \quad x^{\overline{-1}} = \frac{1}{x-1}, \quad x^{\overline{-2}} = \frac{1}{(x-1)(x-2)}, \quad \dots \\ \dots, \quad x^{\overline{-k}} = \frac{1}{(x-1)(x-2)\cdots(x-k)} = \frac{x}{x^{\overline{k+1}}} = \frac{1}{(x-1)^{\overline{k}}}, \end{aligned}$$

となる。同様の操作を下降階乗について実行すると、

$$\begin{aligned} x^{\underline{0}} = 1, \quad x^{\underline{-1}} = \frac{1}{x+1}, \quad x^{\underline{-2}} = \frac{1}{(x+1)(x+2)}, \quad \dots \\ \dots, \quad x^{\underline{-k}} = \frac{1}{(x+1)(x+2)\cdots(x+k)} = \frac{x}{x^{\underline{k+1}}} = \frac{1}{(x+1)^{\underline{k}}}, \end{aligned}$$

であることが導かれる。つまり、上昇階乗と下降階乗は無関係ではないことがわかる。

2.2 第1種スターリング数

本節では、上昇階乗 $x^{\overline{k}}$ や下降階乗 $x^{\underline{k}}$ を x のべき級数で記述しよう。まず、変数 x についての n 次の上昇階乗 $x^{\overline{n}} \equiv x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)$ を x のべき級数として展開する。次数 n が小さい場合、上昇階乗は、

$$\begin{aligned} x &= x, \\ x(x+1) &= x + x^2, \\ x(x+1)(x+2) &= 2x + 3x^2 + x^3, \\ x(x+1)(x+2)(x+3) &= 6x + 11x^2 + 6x^3 + x^4, \end{aligned}$$

のように展開される。この展開式を一般化し、

$$x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k, \tag{2.1}$$

のように書くことにしよう。ここで、展開係数 $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ は第1種スターリング数と呼ばれる。この展開式の記法は、二項係数を用いた $(1+x)^n$ の展開を参考にしている。

上昇階乗の展開係数 $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$ の計算法を見つけるため、(2.1) を変形してみよう。数式変形に関し、 $x^{\bar{n}} = (x + n - 1)x^{n-1}$ であることに注意すると、

$$\begin{aligned} x^{\bar{n}} &= (x + n - 1) \sum_{k=0}^{n-1} \left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right] x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right] x^{k+1} + \sum_{k=0}^{n-1} (n-1) \left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right] x^k \\ &= (n-1) \left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right] + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right] + (n-1) \left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right] \right) x^k + \left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ n-1 \end{smallmatrix} \right] x^n, \end{aligned} \quad (2.2)$$

が得られる。第1種スターリング数の初項として、 $x^{\bar{0}} = 1$ であることに注意すると、 $\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right] = 1$ であると言える。次数 n を増加させながら順次 (2.2) を適用すれば、 $n \geq 1$ の次数に対して第1種スターリング数を計算するための漸化式:

$$\left[\begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right] = 0, \quad \left[\begin{smallmatrix} n \\ n \end{smallmatrix} \right] = 1, \quad \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] = \left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right] + (n-1) \left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right], \quad (2.3)$$

が得られる。ゼロ次以外の上昇階乗べきに対する第0次の第1種スターリング数は必ずゼロになる。また、各次数の上昇階乗べきにおける最高次の第1種スターリング数は、必ず、1に等しい。漸化式を用いて第7次までの上昇階乗べきに対する第1種スターリング数を計算した結果が表 2.1 である。その表を見ると、第1種スターリング数の中に簡単な数式で書ける成分があることがわかる。その成分とは、 $\left[\begin{smallmatrix} n \\ 1 \end{smallmatrix} \right] = (n-1)!$ と、 $\left[\begin{smallmatrix} n \\ n-1 \end{smallmatrix} \right] = \binom{n}{2}$ である。これらの関係は、漸化式 (2.3) を用いれば証明できる。また、表 2.1 の数値が書かれていない場所がゼロ、すなわち、 $n < k$ に対して $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] = 0$ と定義すると、この後の解析に都合がよい。当然、そのような定義は漸化式 (2.3) とも矛盾しない。

表 2.1: 第1種スターリング数

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	0	1						
2	0	1	1					
3	0	2	3	1				
4	0	6	11	6	1			
5	0	24	50	35	10	1		
6	0	120	274	225	85	15	1	
7	0	720	1764	1624	735	175	21	1

続いて、下降階乗 $x^{\underline{n}} \equiv x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$ を x のべき級数で展開しよう。上昇階乗の展開に倣って、

$$x^{\underline{n}} \equiv \sum_{k=0}^n \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_{\downarrow} x^k,$$

と書くことにしよう。次数が小さい下降階乗の例:

$$x^2 = -x + x^2, \quad x^3 = 2x - 3x^2 + x^3,$$

から, $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_{\downarrow} = (-1)^{n+k} \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$ であることが推定できる。この推定が正しいことを数学帰納法で証明すれば展開係数の特定ができる。いや, 実はもっと簡単に特定することが可能である。それには,

$$\begin{aligned} (-x)^{\bar{n}} &= (-x)(-x+1)(-x+2)\cdots(-x+n-1) \\ &= (-1)^n \cdot x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1) = (-1)^n x^{\bar{n}}, \end{aligned}$$

の関係を利用すればよい。この式の両辺を個別に展開して等号で結べば,

$$\sum_{k=0}^n \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_{\downarrow} (-1)^k x^k = (-1)^n \sum_{k=0}^n \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] x^k,$$

が得られる。任意の x についてこの関係が恒等的に成立するには,

$$\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_{\downarrow} = (-1)^{n+k} \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right], \quad (2.4)$$

が条件となる。つまり, これは下降階乗の展開係数が特定できたことを意味する。しかも, 先ほどの推定が正しいことも証明できた。下降階乗の展開係数 $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_{\downarrow}$ は, $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_{\downarrow} = (-1)^{n-k} \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$ なる関係のため, 符号つき第1種スターリング数と呼ばれることがある。

本節の最後に, 第1種スターリング数に関する性質をいくつか紹介しておこう。その性質とは,

$$\sum_{k=0}^n \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] = n!, \quad (2.5a)$$

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] = 0, \quad (n \geq 2) \quad (2.5b)$$

である。第1の性質(2.5a)は $1^{\bar{n}} = n!$ であることから導かれる。第2の性質(2.5b)は, $n \geq 2$ のとき $(-1)^{\bar{n}} = 0$ であることから導かれる。これらの数式に書かれている総和の範囲の上限を n の代わりに, $N > n$ としてもよい。

2.3 第2種スターリング数

第1種スターリング数があるということは, 当然, 第2種スターリング数も存在する。第2種スターリング数は, x のべき乗を下降階乗で展開するための展開係数として定義される。つまり, 第2種スターリング数は,

$$x^n = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} x^k, \quad (2.6)$$

に含まれる $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$ のことである。第2種スターリング数の規則性を調べるため、次数の低い x のべき乗を下降階乗で表現してみよう。計算するにあたり、 $x^n = (x - n + 1)x^{n-1}$ であることに注意すると、

$$\begin{aligned} x &= x^1, \\ x^2 &= (x - 1 + 1)x^1 = x^1 + x^2, \\ x^3 &= (x - 1 + 1)x^1 + (x - 2 + 2)x^2 \\ &= x^1 + 3x^2 + x^3, \\ x^4 &= (x - 1 + 1)x^1 + 3(x - 2 + 2)x^2 + (x - 3 + 3)x^3 \\ &= x^1 + 7x^2 + 6x^3 + x^4, \end{aligned}$$

が得られる。特別な値として $x^0 = 1$ であることから、 $\left\{ \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right\} = 1$ を第2種スターリング数の初項としよう。上に示した例の計算過程から、

$$\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right\} = 0, \quad \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ n \end{smallmatrix} \right\} = 1, \quad \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} = \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\} + k \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\}, \quad (2.7)$$

なる漸化式で展開係数が決定できると推測できる。この推測が正しいことを証明しよう。まず、 $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right\} = 0$ と $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ n \end{smallmatrix} \right\} = 1$ は矛盾がなさそうである。次に、 x^{n-1} について展開式 (2.6) を適用し、それをもとに x^n を展開すると、

$$\begin{aligned} x^n &= \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\} (x - k + k) x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\} x^{k+1} + \sum_{k=0}^{n-1} k \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\} x^k \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \left(\left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\} + k \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\} \right) x^k + \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ n-1 \end{smallmatrix} \right\} x^n, \end{aligned}$$

が得られる。この計算結果から、矛盾なく漸化式 (2.7) が成立することが確認できる。漸化式 (2.7) を用いて第7次までの第2種スターリング数を計算すると、表 2.2 のようになる。この表によると、 $n \geq 1$ に関して、 $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} = 1$ 、 $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ n-1 \end{smallmatrix} \right\} = \binom{n}{2}$ が成立することがわかる。この性質も、漸化式 (2.7) から容易に証明することができる。

第2種スターリング数は、符号つき第1種スターリング数とは逆行列の関係にある。これは、 x^n を x^k で展開し、さらに、 x^j で展開すれば証明できる。実際に数式変形を試みると、

$$x^n = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} x^k = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} \left[\begin{smallmatrix} k \\ j \end{smallmatrix} \right]_{\downarrow} x^j,$$

が得られる。前節で述べたように、 $j > k$ に対して $\left[\begin{smallmatrix} k \\ j \end{smallmatrix} \right]_{\downarrow} = 0$ のように符号つき第1種スターリング数が定義されているので、上の数式は、上の式は、

$$x^n = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} \left[\begin{smallmatrix} k \\ j \end{smallmatrix} \right]_{\downarrow} x^j,$$

表 2.2: 第2種スターリング数

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	0	1						
2	0	1	1					
3	0	1	3	1				
4	0	1	7	6	1			
5	0	1	15	25	10	1		
6	0	1	31	90	65	15	1	
7	0	1	63	301	350	140	21	1

のように書いてもよい。第2種スターリング数も同様に、 $k > n$ に対して $\left\{ \begin{matrix} k \\ j \end{matrix} \right\} = 0$ となるように定義しておこう。すると、 $N \geq n$ を用いて、

$$x^n = \sum_{k=0}^N \sum_{j=0}^N \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \left[\begin{matrix} k \\ j \end{matrix} \right]_{\downarrow} x^j,$$

と書くこともできる。この式の右辺は、当然、 x^n に等しくなければならないので、

$$\sum_{k=0}^N \sum_{j=0}^N \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \left[\begin{matrix} k \\ j \end{matrix} \right]_{\downarrow} = \delta_{nj},$$

となるはずである。ここで、 δ_{nj} はクロネッカーのデルタである。これら2種類のスターリング数 $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]$ と $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ を N 次正方行列の $[n, k]$ 成分とすると、符号つき第1種スターリング数と、第2種スターリング数は逆行列の関係にあることがわかる。

例をあげて、符号つき第1種スターリング数と第2種スターリング数が逆行列の関係であることを検証しよう。検証のための例として、4次までのスターリング数を並べてつくった5次の正方行列を考えよう。第 j 行目、第 k 列目の成分を $\left[\begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right]_{\downarrow}$ とする行列 A と、 $\left\{ \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right\}$ とする行列 B 、すなわち、

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 11 & -6 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 6 & 1 \end{bmatrix},$$

を定義しよう。これらの行列の積を計算すると、

$$AB = BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

となり, 単位行列が得られる。上に一般的な数式を書いたように, いかなる次数についても, このような関係が成立する。

べき乗 x^n を下降階乗 $x^{\underline{k}}$ で展開するときの係数を $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ と書くのと同様に, x^n を上昇階乗 $x^{\overline{k}}$ で展開するときの係数を $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{\uparrow}$ と書こう。この新たな係数は, $(-x)^n$ を考えれば特定できる。この量は, $(-x)^n = (-1)^n x^n$ と書くことができる。この両辺を個別に展開すると,

$$\begin{aligned} (-x)^n &= \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} (-x)^{\underline{k}} = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} (-1)^k x^{\overline{k}}, \\ (-1)^n x^n &= (-1)^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{\uparrow} x^{\overline{k}}, \end{aligned}$$

のようになる。これら2つの数式のうち, 上の式の変形には前節で示した $(-x)^{\underline{k}} = (-1)^k x^{\overline{k}}$ の関係を用いた。これらの式はもともと同一の量のはずなので, 両者が任意の x に対して恒等的に等しくなる条件を求めると,

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{\uparrow} = (-1)^{n+k} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}, \quad (2.8)$$

が得られる。この関係式は, 第1種スターリング数と符号つき第1種スターリング数との関係と同一である。漸化式 (2.7) によると第2種スターリング数 $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ はゼロか, 正の整数であるので, $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{\uparrow}$ は正と負の数が混在している。よって, $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{\uparrow}$ を符号つき第2種スターリング数と呼ぶことにする。

本節の最後に, これまでに述べた以外の第2種スターリング数の性質をいくつか紹介しておこう。その性質とは,

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k (k-1)! \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = 0, \quad (n \geq 2) \quad (2.9a)$$

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n+k} k! \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = 1, \quad (2.9b)$$

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n+k} (k+1)! \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = 2^n, \quad (2.9c)$$

である。第1の性質 (2.9a) は, 第2種スターリング数の漸化式を利用すれば証明できる。具体的に計算してみると,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (-1)^k (k-1)! \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} &= \sum_{k=1}^n (-1)^k (k-1)! \left(\left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} + k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^k (k-1)! \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} + \sum_{k=1}^n (-1)^k k! \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+1} k! \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\} - \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} k! \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\} = 0, \end{aligned}$$

が得られるので、第1の性質が正しいことがわかる。ただし、この数式変形が成立するのは、 $n \geq 2$ のときである。また、この数式変形には $n < k$ のとき $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} = 0$ となることを利用している。第2の性質は、 $(-1)^k = (-1)^k k!$ を用いて $(-1)^n$ を展開すれば導出できる。第3の性質は、 $(-2)^k = (-1)^k (k+1)!$ を用いて $(-2)^n$ を展開すれば導出できる。

2.4 ベルヌーイ数との関係

上昇階乗の和の公式を利用すれば第1種スターリング数とベルヌーイ数の関係を導出することができる。本節ではその関係を導出しよう。まず、 $k+1$ を始点とする m 次の上昇階乗は、第1種スターリング数を用いて、

$$(k+1)(k+2)\cdots(k+m) = \sum_{p=1}^{m+1} \left[\begin{smallmatrix} m+1 \\ p \end{smallmatrix} \right] k^{p-1} = \sum_{p=0}^m \left[\begin{smallmatrix} m+1 \\ p+1 \end{smallmatrix} \right] k^p,$$

ように展開できる。上昇階乗の和の公式によって、 k を0から $n-1$ まで上昇させたときの総和は、

$$\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)(k+2)\cdots(k+m) = \frac{1}{m+1} \sum_{p=0}^m \left[\begin{smallmatrix} m+1 \\ p+1 \end{smallmatrix} \right] n^{p+1}, \quad (2.10)$$

のように展開できる。一方、べき乗和がベルヌーイ数を展開係数に含む形式:

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^p = \frac{1}{p+1} \sum_{j=0}^p \binom{p+1}{j} B_j n^{p-j+1},$$

によって計算できることを思い出そう。この公式を用いて上昇階乗の和を計算すると、

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)(k+2)\cdots(k+m) &= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=0}^m \left[\begin{smallmatrix} m+1 \\ p+1 \end{smallmatrix} \right] k^p \\ &= \sum_{p=0}^m \sum_{j=0}^p \frac{1}{p+1} \binom{p+1}{j} \left[\begin{smallmatrix} m+1 \\ p+1 \end{smallmatrix} \right] B_j n^{p-j+1} \\ &= \sum_{r=0}^m \sum_{p=r}^m \frac{1}{p+1} \binom{p+1}{p-r} \left[\begin{smallmatrix} m+1 \\ p+1 \end{smallmatrix} \right] B_{p-r} n^{r+1}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

が得られる。異なる方法で計算した結果だが、(2.10) と (2.11) は同じ値となるはずである。その考えに基づき、(2.10) と (2.11) を等号で結ぶと、

$$\sum_{r=0}^m \sum_{p=r}^m \frac{1}{p+1} \binom{p+1}{p-r} \left[\begin{smallmatrix} m+1 \\ p+1 \end{smallmatrix} \right] B_{p-r} n^{r+1} = \frac{1}{m+1} \sum_{r=0}^m \left[\begin{smallmatrix} m+1 \\ r+1 \end{smallmatrix} \right] n^{r+1},$$

なる関係が導かれる。この関係式において、 n の1次の係数だけ取り出すと、

$$\frac{1}{m!} \sum_{p=0}^m \left[\begin{smallmatrix} m+1 \\ p+1 \end{smallmatrix} \right] B_p = \frac{1}{m+1}, \quad (2.12)$$

が得られる。これが第1種スターリング数とベルヌーイ数の関係である。この関係式はもう少し数式変形できる。関係式 (2.12) に第1種スターリングの漸化式を適用すると、

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{m!} \sum_{p=0}^m \left(\begin{bmatrix} m \\ p \end{bmatrix} + m \begin{bmatrix} m \\ p+1 \end{bmatrix} \right) B_p \\
&= \frac{1}{m!} \sum_{p=0}^m \begin{bmatrix} m \\ p \end{bmatrix} B_p + \frac{1}{(m-1)!} \sum_{p=0}^m \begin{bmatrix} m \\ p+1 \end{bmatrix} B_p \\
&= \frac{1}{m!} \sum_{p=0}^m \begin{bmatrix} m \\ p \end{bmatrix} B_p + \frac{1}{(m-1)!} \sum_{p=0}^{m-1} \begin{bmatrix} m \\ p+1 \end{bmatrix} B_p \\
&= \frac{1}{m!} \sum_{p=0}^m \begin{bmatrix} m \\ p \end{bmatrix} B_p + \frac{1}{m},
\end{aligned}$$

のように変形できる。この数式の右辺を $1/(m+1)$ と等号で結び、さらに数式変形をすると、

$$\frac{1}{(m-1)!} \sum_{p=0}^m \begin{bmatrix} m \\ p \end{bmatrix} B_p = -\frac{1}{m+1}, \quad (m \geq 1), \quad (2.13)$$

が導出される。この関係式は、導出過程で $1/m$ を取り扱い、右辺に $1/(m-1)!$ が現れているため、上の式に記載したように $m \geq 1$ を条件とする。関係式 (2.12) の両辺に $m! \left\{ \begin{smallmatrix} N \\ m+1 \end{smallmatrix} \right\}_\uparrow$ を乗じると、

$$\sum_{p=0}^m \left\{ \begin{smallmatrix} N \\ m+1 \end{smallmatrix} \right\}_\uparrow \begin{bmatrix} m+1 \\ p+1 \end{bmatrix} B_p = \frac{m!}{m+1} \left\{ \begin{smallmatrix} N \\ m+1 \end{smallmatrix} \right\}_\uparrow,$$

なる関係が得られる。符号つき第2種スターリング数 $\left\{ \begin{smallmatrix} N \\ m+1 \end{smallmatrix} \right\}_\uparrow$ は第1種スターリング数の逆行列の関係にある係数である。さらに、 $N > m$ を満たすように N を選べば、この等式は、

$$\sum_{p=0}^N \left\{ \begin{smallmatrix} N \\ m+1 \end{smallmatrix} \right\}_\uparrow \begin{bmatrix} m+1 \\ p+1 \end{bmatrix} B_p = \frac{m!}{m+1} \left\{ \begin{smallmatrix} N \\ m+1 \end{smallmatrix} \right\}_\uparrow,$$

と書いても成り立つ。なぜなら、 $p > m$ でならば $\begin{bmatrix} m+1 \\ p+1 \end{bmatrix} = 0$ となるようにスターリング数が定義されているからである。この式の両辺を、 $m+1 \mapsto m = 1, 2, \dots, N$ について総和をとると、

$$\sum_{p=0}^N \sum_{m=1}^N \left\{ \begin{smallmatrix} s \\ m \end{smallmatrix} \right\}_\uparrow \begin{bmatrix} m \\ p+1 \end{bmatrix} B_p = \sum_{m=1}^N \frac{(m-1)!}{m} \left\{ \begin{smallmatrix} s \\ m \end{smallmatrix} \right\}_\uparrow,$$

のようになる。ここで、符号つき第2種スターリング数が第1種スターリング数の逆行列の関係にあることに注意すると、この数式は、

$$B_{N-1} = \sum_{m=1}^N \frac{(m-1)!}{m} \left\{ \begin{smallmatrix} s \\ m \end{smallmatrix} \right\}_\uparrow = \sum_{m=1}^N (-1)^{m+N} \frac{(m-1)!}{m} \left\{ \begin{smallmatrix} N \\ m \end{smallmatrix} \right\}, \quad (2.14)$$

のように計算できる。これで、ベルヌーイ数と第2種スターリング数の関係を導出できた。ベルヌーイ数と第2種スターリング数の関係は (2.14) でよいのだが、この関係式はもう少し

し簡略化できるのである。それは、第2種スターリング数の漸化式 $\{m^N\} = \{m^{N-1}\} + m\{m^{N-1}\}$ を利用するのである。そのようにして数式変形すると、

$$\begin{aligned} B_{N-1} &= \sum_{m=1}^N (-1)^{N+m} \frac{(m-1)!}{m} \{m^N\} \\ &= \sum_{m=0}^N (-1)^{N+m} \left(\frac{(m-1)!}{m} \{m^{N-1}\} + (m-1)! \{m^{N-1}\} \right), \end{aligned} \quad (2.15)$$

が得られる。この式の右辺の第2項は、(2.9a)により、 $N \geq 3$ のときゼロである。したがって、ベルヌーイ数は、

$$\begin{aligned} B_k &= \sum_{m=1}^{k+1} (-1)^{k+m-1} \frac{(m-1)!}{m} \{m^k\} \\ &= \sum_{m=0}^k (-1)^{k+m} \frac{m!}{m+1} \{m^k\}, \quad (k \geq 2) \end{aligned}$$

のように表される。この式は言うまでもなく、 $k \equiv N-1$ となるように書き直した式である。しかし、この関係は $k=0, 1$ のとき成立しない。その条件で(2.15)の第2項がゼロにならないからである。そこで、 B_0 と B_1 を特別扱いして計算してみると、

$$\begin{aligned} B_0 &= \frac{0!}{1} \{0\} + 0! \{1\} = \frac{0!}{1} \{0\}, \\ B_1 &= -\frac{0!}{1} \{1\} + \frac{1!}{2} \{1\} - 0! \{1\} + 1! \{2\} = -\frac{1!}{2} \{1\}, \end{aligned}$$

のように書くことができる。ここで、再び $k \geq 2$ を見返そう。ベルヌーイ数は $k \geq 2$ で k が奇数のとき $B_k = 0$ であったことを思い出すと、

$$B_k = \begin{cases} \sum_{m=0}^k \frac{m!}{m+1} \{m^k\}, & (k = \text{even}) \\ -\sum_{m=0}^k \frac{m!}{m+1} \{m^k\} = 0, & (k = \text{odd}) \end{cases},$$

と書いても誤りではない。したがって、 $k \geq 0$ に対して、

$$B_k = \sum_{m=0}^k (-1)^m \frac{m!}{m+1} \{m^k\}, \quad (2.16)$$

が成立することが示された。これは前に導出した関係式と比べると、ベルヌーイ数の添え字 k と第2種スターリング数の第1パラメータが一致していることと、 -1 の指数が m のみになっていることで簡略化が図れている。

2.5 組み合わせ数学での意味

本章で導入した第1種スターリング数 $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$ と第2種スターリング数 $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$ は組み合わせ数学において意味のある数値を与える。それは、べき級数の展開係数である二項係数 $\binom{n}{k}$ が、 n 個の品物 (または、状態) から k 個を選ぶ組み合わせの数を与えることに似ている。

2.5.1 第1種スターリング数

第1種スターリング数 $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$ は n 個の要素を、 k 個の巡回列に分割する組み合わせの数を与える。巡回列とは、山手線の駅のように、繰り返し通過する地点 (または番号) を定義するデータ列である。例えば、4 個の整数 $(0, 1, 2, 3)$ から1つの巡回列をつくると、

$$(0, 1, 2, 3), (0, 1, 3, 2), (0, 2, 1, 3), (0, 2, 3, 1), (0, 3, 1, 2), (0, 3, 2, 1)$$

の6通りの組み合わせが出てくる。上に示した例は、巡回列が通過する数値を左から右に記している。右端に達した後、左端に戻って再び左から右に数値をたどる。巡回列は始点を特に規定しないので、巡回置換したデータ列の組み合わせは同一の組み合わせとみなす。例えば、 $\{0, 1, 2, 3\}$ から巡回置換で得られる組み合わせ: $(0, 1, 2, 3), (1, 2, 3, 0), (2, 3, 0, 1), (3, 0, 1, 2)$ は同一の組み合わせであると考えられる。よって、巡回列の組み合わせをくまなく列記するには、便宜上、先頭の数値を固定し、残された数値の順序を並べ替えた組み合わせを列記すればよい。上に示した例では、先頭の数値を0に固定し、残りの3つの数値を並べ替えた組み合わせを書いているのである。すなわち、 n 個の数値から得られる巡回列の組み合わせは、 $n - 1$ 個の数値の順序入れ替えの組み合わせの数と同一であるので、 $(n - 1)!$ 通りとなる。また、数値1つだけの順列 (0) も、繰り返し0を通過する巡回列とみなす。

それでは、例として4個の整数を複数の巡回列に分離する組み合わせを列挙してみよう。下に記述するように、4個の整数は、1個から4個の巡回列に分離できる。分離した巡回列の数に対応し、下に説明を記述する。

巡回列1個に分割: 6通り

$$[(0, 1, 2, 3)], [(0, 1, 3, 2)], [(0, 2, 1, 3)], [(0, 2, 3, 1)], [(0, 3, 1, 2)], [(0, 3, 2, 1)]$$

巡回列2個に分割: 11通り

$$[(0), (1, 2, 3)], [(0), (1, 3, 2)], [(1), (0, 2, 3)], [(1), (0, 3, 2)], \\ [(2), (0, 1, 3)], [(2), (0, 3, 1)], [(3), (0, 1, 2)], [(3), (0, 2, 1)], \\ [(0, 1), (2, 3)], [(0, 2), (1, 3)], [(0, 3), (1, 2)]$$

巡回列3個に分割: 6通り

$$[(0), (1), (2, 3)], [(0), (2), (1, 3)], [(0), (3), (1, 2)], \\ [(1), (2), (0, 3)], [(1), (3), (0, 2)], [(2), (3), (0, 1)]$$

巡回列4個に分割: 1通り

$$[(0), (1), (2), (3)]$$

巡回列 1 個に分離する場合とは、4 個の整数で巡回列をつくることである。前に説明したように、4 個の整数からつくられる巡回列の組み合わせの数は $(4 - 1)! = 6$ 通りである。その組み合わせを列挙するには、始点を 0 に固定し、残りの 3 個の整数を並べ替えた組み合わせをすべて挙げればよい。

巡回列 2 個に分離する場合とは、長さ 1 と長さ 3 の巡回列に分離、および、長さ 2 の巡回列 2 個に分離する組み合わせとなる。前者の分離に関して、長さ 1 の巡回列を選ぶ組み合わせが 4 通りある。その各組み合わせに対して、長さ 3 の巡回列をつくらなければならない。長さ 3 の巡回列は $(3 - 1)! = 2$ とおり存在する。よって、前者の分離は $4 \times 2 = 8$ 通りの組み合わせがある。後者の分離に関して、4 個の整数から 2 個を選ぶ組み合わせを考える。その組み合わせは、6 通りある。ところが、 $(0, 1)$ を選ぶことは、 $(2, 3)$ を選ぶことと同一の組み合わせを与えるので、後者の分離は 3 通りの組み合わせが存在する。したがって、巡回列 2 個に分離する組み合わせは、 $8 + 3 = 11$ 通りの組み合わせが存在する。

巡回列 3 個に分離する場合とは、長さ 1 の巡回列 2 個と長さ 2 の巡回列 1 個に分離する組み合わせとなる。組み合わせを列記するには、長さ 1 の巡回列を 2 個選べば、長さ 2 の巡回列が 1 通りしか現れない。よって、この分離の組み合わせの数は、4 個の整数から 2 個を選ぶ組み合わせの数である。したがって、巡回列 3 個に分離する組み合わせは 6 通り存在する。

最後に、巡回列 4 個に分離するのは、長さ 1 の巡回列 4 個に分離することである。したがって、上に示した 1 通りの組み合わせしか存在しない。

上に列挙したとおり、4 個の整数から k 個の巡回列に分離する組み合わせの数は $\left[\begin{smallmatrix} 4 \\ k \end{smallmatrix} \right]$ 通りになっている。この例から、複数の巡回列に分離する組み合わせは、第 1 種スターリング数で表されると推測できるかもしれない。その推測が正しいことを検証しよう。その検証のため、5 個の整数 $(0, 1, 2, 3, 4)$ を 3 個の巡回列に分離する組み合わせを列挙しよう。巡回列は次のように 2 段階の手順でつくることができる。

手順 1 整数 4 個 $(0, 1, 2, 3)$ から 3 個の巡回列をつくり、生成された巡回列のどれか 1 個に新たな整数 4 を追加する。

手順 2 整数 4 個 $(0, 1, 2, 3)$ から 2 個の巡回列をつくり、整数 4 を 3 番目の巡回列として追加する。

これらの手順の結果、5 個の整数から 3 個の巡回列に分離する組み合わせとして、下に示す 35 通りの組み合わせが得られた。この組み合わせの数は $\left[\begin{smallmatrix} 5 \\ 3 \end{smallmatrix} \right]$ に等しい。

手順1の結果: 24通り

$[(0, 4), (1), (2, 3)], [(0, 4), (2), (3, 1)], [(0, 4), (3), (1, 2)],$
 $[(1), (2), (0, 4, 3)], [(1), (3), (0, 4, 2)], [(2), (3), (0, 4, 1)],$
 $[(0), (1, 4), (2, 3)], [(0), (2), (3, 1, 4)], [(0), (3), (1, 4, 2)],$
 $[(1, 4), (2), (3, 0)], [(1, 4), (3), (0, 2)], [(2), (3), (0, 1, 4)],$
 $[(0), (1), (2, 4, 3)], [(0), (2, 4), (3, 1)], [(0), (3), (1, 2, 3)],$
 $[(1), (2, 4), (3, 0)], [(1), (3), (0, 2, 4)], [(2, 4), (3), (0, 1)],$
 $[(0), (1), (2, 3, 4)], [(0), (2), (3, 4, 2)], [(0), (3, 4), (1, 2)],$
 $[(1), (2), (3, 4, 0)], [(1), (3, 4), (0, 2)], [(2), (3, 4), (0, 1)]$

手順2の結果: 11通り

$[(4), (0), (1, 2, 3)], [(4), (0), (1, 3, 2)], [(4), (1), (0, 2, 3)], [(4), (1), (0, 3, 2)],$
 $[(4), (2), (0, 1, 3)], [(4), (2), (0, 3, 1)], [(4), (3), (0, 1, 2)], [(4), (3), (0, 2, 1)],$
 $[(4), (0, 1), (2, 3)], [(4), (0, 2), (1, 3)], [(4), (0, 3), (1, 2)]$

上記の巡回列への分解方法を一般的な場合: n 個の整数を k 個の巡回列に分解する組み合わせに拡張するのは容易である。まず, n 個の整数を k 個の巡回列に分解する組み合わせの数を s_{nk} としよう。すると, s_{nk} は, $s_{n-1,k}$ を $n-1$ 倍した数と, $s_{n-1,k-1}$ との和である。つまり,

$$s_{n,k} = (n-1)s_{n-1,k} + s_{n-1,k-1},$$

なる漸化式で組み合わせの数を計算できるということだ。この漸化式は第1種スターリング数の漸化式と同一である。また, 1 個の整数を 1 個の巡回列に分解する組み合わせは 1 通りしかないのは明らかであるので, $s_{11} = 1$ である。この値は, 第1種スターリング数 $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right]$ と一致する。初項が第1種スターリング数と等しく, 第1種スターリング数の漸化式で一般項が導かれるので, 一般的な場合: n 個の整数を k 個の巡回列に分解する組み合わせの数は $s_{nk} = \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$ となり, 第1種スターリング数と一致するのだ。

2.5.2 第2種スターリング数

第2種スターリング数 $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$ は, n 個の要素を k 個のグループに分ける組み合わせの数を与える。分ける要素には番号がついていて, 各要素が区別できる。しかし, グループには特に番号付けをせず, グループの順序は考えないものとする。また, グループは 1 個以上の要素で構成すればよく, すべてのグループに平等に要素を割り当てる必要はない。

例として, 4 個の要素 $\{0, 1, 2, 3\}$ をグループに分割する組み合わせを考えよう。要素が 4 個なので, 構成されるグループは 1 個から 4 個までが考えられる。考えられる組み合わせを列挙すると以下のようなになる。

1 個のグループ: 1 通り

$[0, 1, 2, 3]$

2 個のグループ : 7 通り

$[(0), (1, 2, 3)], [(1), (0, 2, 3)], [(2), (0, 1, 3)], [(3), (0, 1, 2)]$
 $[(0, 1), (2, 3)], [(0, 2), (1, 3)], [(0, 3), (1, 2)]$

3 個のグループ : 6 通り

$[(0), (1), (2, 3)], [(0), (2), (1, 3)], [(0), (3), (1, 2)],$
 $[(1), (2), (0, 3)], [(1), (3), (0, 2)], [(2), (3), (0, 1)]$

4 個のグループ : 1 通り

$[(0), (1), (2), (3)]$

まず、グループ 1 個に分ける場合、これはすべての要素を 1 つグループに入れてしまえばよいので、1 通りしか組み合わせがない。もっとも、グループ 1 個では分けたとはいわないかもしれないが。

グループ 2 個に分けるには、1 個と 3 個に分けるか、2 個のグループ 2 つに分けるかの組み合わせがある。その中で、1 個と 3 個に分ける場合、1 個のグループを構成する要素を選ぶ組み合わせを考えればよい。残りの 3 個は選ぶ余地がなく一意的に決まる。よって、1 個と 3 個のグループに分けるのは 4 通りである。次に 2 個と 2 個のグループに分けるには、4 個の要素から 2 個を取り出す組み合わせを考える。その組み合わせは 6 通りある。残りの 2 つは選ぶ余地がなく一意的に決まる。それで、6 通りと答えたいところだが、実は違う。分割するグループの要素が 2 個と 2 個で対称性があるため、その 6 通りは重複があるのだ。重複を取り除くと組み合わせの数が半分になる。つまり、2 個と 2 個のグループに分割するのは 3 通りの組み合わせがある。したがって、グループ 2 個に分割するには 7 通りの組み合わせがある。

グループ 3 個に分けるには、1 個と 1 個と 2 個のグループに分ければよい。そのように分割する組み合わせは、1 個のグループをなす要素を 2 つ選択する組み合わせを求めればよい。残りの 2 個は選ぶ余地もなく一意的に決まる。よって、グループ 3 個に分割するには 6 通りの組み合わせがある。

グループ 4 個に分割するのは非常に簡単である。すべてのグループが 1 個の要素しか含まないのだから、1 通りしか組み合わせが存在しない。

次に、5 個の要素をグループ 3 個に分割する場合を考えよう。上と同じように考えるなら、1 個と 1 個と 3 個のグループに、1 個と 2 個と 2 個のグループに分けることができる。そのように計算を始めてもよいのだが、先ほどより、計算が少し複雑になるだろう。実は、もっと簡単に組み合わせを列挙する方法がある。それには、次の 2 段階の手順を使うのだ。

手順 1 要素 0, 1, 2, 3 をグループ 2 個に分割し、要素 4 を単独で第 3 のグループとして追加する。

手順 2 要素 0, 1, 2, 3 をグループ 3 個に分割し、要素 4 を分割したどれかのグループに加える。

まず、4個の要素 $(0, 1, 2, 3)$ がグループ 2個に分割される組み合わせは7通りある。それに要素 4 を単独のグループとして追加する組み合わせは特に選ぶ余地もないので、手順 1 による組み合わせは7通りである。次に、4個の要素 $(0, 1, 2, 3)$ がグループ 3個に分割する組み合わせは6通りある。新たな要素 4 をいずれかのグループに追加するには、構成されたグループの数 (= 3) だけの自由度がある。したがって、手順 2 による組み合わせは $3 \times 6 = 18$ 通りの組み合わせがある。つまり、5個の要素をグループ 3個に分割する組み合わせは全部で 25 通りあることになる。手順 1 と手順 2 に対応し、それら 25 通りの組み合わせを列挙すると次のようになる。

手順 1 の結果 : 7 通り

$$\begin{aligned} & [(4), (0), (1, 2, 3)], [(4), (1), (0, 2, 3)], [(4), (2), (0, 1, 3)], [(4), (3), (0, 1, 2)] \\ & [(4), (0, 1), (2, 3)], [(4), (0, 2), (1, 3)], [(4), (0, 3), (1, 2)] \end{aligned}$$

3 個のグループ : 18 通り

$$\begin{aligned} & [(0, 4), (1), (2, 3)], [(0, 4), (2), (1, 3)], [(0, 4), (3), (1, 2)], \\ & [(1, 4), (2), (0, 3)], [(1, 4), (3), (0, 2)], [(2, 4), (3), (0, 1)], \\ & [(0), (1, 4), (2, 3)], [(0), (2, 4), (1, 3)], [(0), (3, 4), (1, 2)], \\ & [(1), (2, 4), (0, 3)], [(1), (3, 4), (0, 2)], [(2), (3, 4), (0, 1)], \\ & [(0), (1), (2, 3, 4)], [(0), (2), (1, 3, 4)], [(0), (3), (1, 2, 4)], \\ & [(1), (2), (0, 3, 4)], [(1), (3), (0, 2, 4)], [(2), (3), (0, 1, 4)] \end{aligned}$$

上記の手順を一般の場合: n 個の要素をグループ k に分割する組み合わせに応用するのは容易である。その組み合わせの数を S_{nk} としよう。まず、手順 1 によって、 $n-1$ 個の要素をグループ $k-1$ 個に分割する。その組み合わせは $S_{n-1, k-1}$ 通りである。そのグループに加え、 n 番目の要素を第 k 番目のグループとして追加する。その組み合わせは特に選ぶ余地もなく、一意的に決まるので、手順 1 によってグループ k 個を構成する組み合わせは $S_{n-1, k-1}$ 通りである。手順 2 によって $n-1$ 個の要素をグループ k 個に分割する組み合わせは $S_{n-1, k}$ 通り存在する。そのように構成されたグループの 1 つに n 番目の要素を追加する。要素の追加は、グループの数 k だけの自由度があるので、手順 2 によってグループ k 個を構成する組み合わせは $k S_{n-1, k}$ 通り存在する。したがって、 n 個の要素をグループ k 個に分割する組み合わせの数は、 $S_{nk} = S_{n-1, k-1} + k S_{n-1, k}$ となる。この漸化式は第 2 種スターリング数の漸化式と一致する。しかも、1 個の要素をグループ 1 個に分割する組み合わせの数は $S_{11} = 1$ であり、第 2 種スターリング数 $\left\{ \begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\}$ と同じ値であるので、 n 個の要素をグループ k 個に分割する組み合わせの数は第 2 種スターリング数 $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$ に等しい。

第 2 種スターリング数は、一般項を計算する公式が知られている。一般項は、漸化式から導出するのは容易でないため、組み合わせ数学における考察によって導かれる。導出は付録に譲るが、第 2 種スターリング数は、

$$\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n, \quad (2.17)$$

なる式で計算することができる。この式は総和記号を含んでいるため、漸化式を用いて計算することより簡単とは言いがたい。むしろ、漸化式を用いたほうが速いかもしれない。

第3章 タンジェント数とオイラー数

べき乗和を一般化するために導入されたベルヌーイ数は、べき乗和だけにとどまらず、数学におけるさまざまな話題において姿を現す。本節では、その例として、正接関数 $\tan x$ の級数展開においてベルヌーイ数が現れることを示す。さらに、正割関数 $\sec x$ の級数展開において、ベルヌーイ数に類似したオイラー数なる数列を導入する。

3.1 タンジェント数

正弦関数 $\sin x$ は、 x について微分を繰り返すと $\cos x$ と $\sin x$ を繰り返すため、テイラー級数の展開係数には美しい規則性がある。正接関数 $\tan x$ に対しても、微分を繰り返していけばテイラー級数展開ができるのだが、その展開係数の規則性を見出すことは難しい。しかし、正接関数のテイラー級数の展開係数はベルヌーイ数と密接な関係がある。

3.1.1 正接関数のテイラー展開

通常のテイラー級数の処方箋にしたがって級数展開してみよう。任意の関数 $f(x)$ は、 $x = 0$ を中心にテイラー級数展開すると、

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(0)x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n,$$

なる形で表される。この展開式において、 $f^{(k)}(x)$ は k 階の導関数を表し、特に、0階の導関数は、微分をしないもとの関数 $f^{(0)}(x) \equiv f(x)$ である。特に、 $\tan x$ の展開について、 $T_k \equiv f^{(k)}(0)$ なる T_n を定義するとテイラー展開は、

$$\tan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T_n}{n!}x^n,$$

のように表現される。その展開係数を与える数列 T_n はタンジェント数と呼ばれる。タンジェント数を得るために処方箋にしたがって $\tan x$ を微分していくと、

$$f^{(0)}(x) = \tan x,$$

$$f^{(1)}(x) = 1 + \tan^2 x,$$

$$f^{(2)}(x) = 2 \tan x(1 + \tan^2 x) = 2 \tan x + 2 \tan^3 x,$$

$$f^{(3)}(x) = 2(\tan^2 x + 1) + 6 \tan^2 x(1 + \tan^2 x) = 2 + 8 \tan^2 x + 6 \tan^4 x,$$

が得られる。ここに示したように、 $\tan x$ の高階導関数は $\tan x$ のべき級数で表される。そこで、

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{nk} \tan^k x,$$

なる形で導関数を表現してみよう。そのとき、展開係数 A_{nk} は

$$A_{nk} = (k-1)A_{n-1,k-1} + (k+1)A_{n-1,k+1},$$

なる漸化式にしたがう。初期条件として、 $A_{00} = 0$, $A_{01} = 1$, $A_{0k} = 0$ ($k = 2, 3, \dots$) である。また、この展開係数とタンジェント数は $T_n = A_{n0}$ で対応づけられる。行を導関数の階数 k , 列を $\tan x$ の次数 k として展開係数 A_{nk} を書いていくと、表 3.1 のような形式に並べることができる。

表 3.1: タンジェント数計算のための表

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1						
1	1	0	1					
2	0	2	0	2				
3	2	0	8	0	6			
4	0	16	0	40	0	24		
5	16	0	136	0	240	0	120	
6	0	272	0	1232	0	1680	0	720

このような形式に並べると、タンジェント数が計算しやすい。この表から、偶数項のタンジェント数がゼロであることがわかる。さらに、 A_{nk} に関する漸化式からタンジェント数は、ベルヌーイ数とは異なり、すべて整数になることもわかる。表 3.1 を用いて、タンジェント数の最初の数項を計算すると、

$$T_1 = 1, \quad T_3 = 2, \quad T_5 = 16, \quad T_7 = 272, \quad \dots,$$

となる。上に示した A_{nk} の漸化式でタンジェント数を計算することができる。

3.1.2 ベルヌーイ数による表現

タンジェント数はベルヌーイ数と密接な関係があり、ベルヌーイ数を導入すれば、タンジェント数の一般項を一意的に記述することができる。タンジェント数とベルヌーイ数の

関係を調べるため、ベルヌーイ数の指数型母関数に注目しよう。既に学んだように、ベルヌーイ数の指数型母関数は、

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^k = \frac{x}{e^x - 1},$$

なる形で与えられる。ここで、 $B_0 = 1$, $B_1 = -1/2$ に注意すると、この母関数は、

$$1 - \frac{x}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{B_{2k}}{(2k)!} x^{2k} + \frac{B_{2k+1}}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right) = \frac{x}{e^x - 1},$$

と書き換えられる。ここで、わざわざベルヌーイ数の奇数項と偶数項を分離した理由は後に明らかになるであろう。この関係式において、 $x/2$ を右辺に移項すると、

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{B_{2k}}{(2k)!} x^{2k} + \frac{B_{2k+1}}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right) \\ = \frac{x}{2} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = \frac{x}{2} \frac{e^{x/2} + e^{-x/2}}{e^{x/2} - e^{-x/2}} = \frac{x}{2} \coth \frac{x}{2}, \end{aligned}$$

なる関係が得られる。この関係式の x を $2x$ に置き換えると、

$$\coth x = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2^{2k} B_{2k}}{(2k)!} x^{2k-1} + \frac{2^{2k+1} B_{2k+1}}{(2k+1)!} x^{2k} \right), \quad (3.1)$$

が得られる。見てわかるとおり、この式は $x = 0$ を中心にした $\coth x$ のローラン展開である。ここで、変数 x を複素数に拡張し、 $\cot x = i \coth ix$ である関係に注意すると、(3.1) は

$$\cot x = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{2^{2k} B_{2k}}{(2k)!} x^{2k-1} + i \frac{2^{2k+1} B_{2k+1}}{(2k+1)!} x^{2k} \right), \quad (3.2)$$

であることがわかる。この式は $\cot x$, すなわち、 $\tan x$ の逆数のローラン展開である。ところで、 x が実数なら $\cot x$ は実数関数であるはずなので、上記ローラン展開の虚部はゼロなければならない。任意の実数 x についてローラン展開の虚部がゼロになる条件とは、

$$B_{2k+1} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (3.3)$$

である。すなわち、ベルヌーイ数の第3項以降の奇数項がすべてゼロであることが示された。したがって、先ほど書いた $\coth x$ と $\cot x$ のローラン展開は、

$$\coth x = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k} B_{2k}}{(2k)!} x^{2k-1}, \quad (3.4)$$

$$\cot x = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k} B_{2k}}{(2k)!} x^{2k-1}, \quad (3.5)$$

のように書き直すことができる。複素関数の観点から見ると、これらの関数は $x = 0$ に一位の極を持ち、その留数が1であることがこれらの展開式からわかる。言い換えると、十

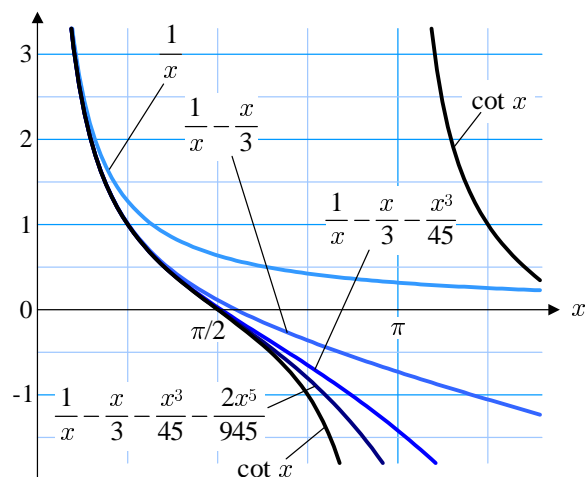


図 3.1: ローラン展開による余接関数 $\cot x$ の近似

分に小さい x において, $\cot x$ は $1/x$ にほぼ等しくなる。それを図 3.1 に描いてみた。確かに, $x < \pi/8$ において $\cot x$ と $1/x$ のグラフが互いに重なっていることが確認できる。変数 x が大きくなると, $\cot x$ は $1/x$ から離れていく。近似に用いるローラン展開の項を増やすと $\cot x$ に近似できる x の範囲が広がることが図からわかる。また, 後に示すベルヌーイ数とリーマンのゼータ関数の関係によると, ベルヌーイ数は,

$$|B_{2k}| \simeq \frac{(2k)!}{2^{2k-1}\pi^{2k}} \quad \text{as } n \rightarrow \infty,$$

なる性質があるので, 余接関数と双曲余接関数のローラン展開は $|x| < \pi$ なる収束半径をもつことがわかる。つまり, $x = 0$ から最も近い特異点までの範囲でローラン展開は $\cot x$ に収束するわけだ。

正接関数の展開係数の導出に戻ろう。三角関数の倍角の公式から得られる $\tan x = \cot x - 2 \cot 2x$ なる関係を用いれば, 正接関数の展開係数が得られそうである。既に, $k \geq 1$ について $B_{2k+1} = 0$ であることがわかっているので, そのような寄与しない項を省略して, ローラン展開 (3.2) を利用すると,

$$\tan x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (2^{2k} - 4^{2k}) B_{2k}}{(2k)!} x^{2k-1}, \quad (3.6)$$

なる展開式が得られる。これが目的とする $\tan x$ のテイラー展開である。つまり, タンジェント数 T_k は,

$$T_{2k-1} = \frac{(-1)^k (2^{2k} - 4^{2k}) B_{2k}}{2k}, \quad T_{2k} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots),$$

で与えられる。具体的に 7 次の項まで展開すると, 正接関数は

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \dots,$$

のように近似できることがわかる。後に示すベルヌーイ数とリーマンのゼータ関数の関係によると、タンジェント数 T_{2n-1} には、

$$|T_{2n-1}| \simeq 2(2k-1)! \left(\frac{2}{\pi}\right)^{2k} \quad \text{as } n \rightarrow \infty,$$

なる性質があるため、正接関数のテイラー展開は $|x| < \pi/2$ なる収束半径をもつことがわかる。これも余接関数と同様に、 $x = 0$ から最も近い特異点までの範囲でローラン展開が収束することを意味している。

ついでに、正弦関数の逆数である余割関数 $\operatorname{cosec} x$ のローラン展開の展開係数にもベルヌーイ数が現れることを紹介しておこう。正弦関数の倍角の公式 $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ の逆数をとれば、 $\operatorname{cosec} 2x = (\tan x + \cot x)/2$ なる関係が得られる。既に $\tan x$ と $\cot x$ の展開が得られているので、それを利用すると、

$$\operatorname{cosec} 2x = \frac{1}{2x} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (2^{2k+1} - 4^{2k}) B_{2k}}{(2k)!} x^{2k-1},$$

が得られる。ここで、 x を $x/2$ におきかえると、

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (2 - 2^{2k}) B_{2k}}{(2k)!} x^{2k-1}, \quad (3.7)$$

と書き換えられる。この展開式からわかるように、余割関数 $\operatorname{cosec} x$ は $x = 0$ に一位の極をもち、その留数は1である。さらに、この関数の収束半径は、 $|x| < \pi$ である。当然のように、正割関数 $\sec x$ を級数展開したいところだが、その級数展開は次の節に譲る。

3.2 オイラー数

前節でベルヌーイ数を用いて三角関数を展開したが、正割関数 $\sec x$ の展開は本節に譲った。正割関数の展開はベルヌーイ数を用いて記述できるのだが、定数倍のような単純な関係ではないので、タンジェント数に類似したセカント数を導入したほうが便利である。本節では、正割関数を展開するためのセカント数からオイラー数なる数列を定義し、ベルヌーイ数との関係を調べる。

3.2.1 セカント数

正割関数を級数展開するための展開係数としてセカント数 \hat{E}_n を定義しよう。セカント数 \hat{E}_n を用いると正割関数は、

$$\sec x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{E}_n}{n!} x^n,$$

のように書けるものとする。この関数についても、まず、処方箋にしたがってテイラー級数展開するには、高次の導関数を計算する必要がある。順次、導関数を計算していくと、

$$\begin{aligned} f^{(0)}(x) &= \sec x, \\ f^{(1)}(x) &= \sec x \tan x, \\ f^{(2)}(x) &= \sec x \tan^2 x + \sec x (1 + \tan^2 x) = \sec x (1 + 2 \tan^2 x), \\ f^{(3)}(x) &= \sec x \tan x (1 + 2 \tan^2 x) + \sec x (4 \tan x (1 + \tan^2 x)) \\ &= \sec x (5 \tan x + 4 \tan^3 x), \end{aligned}$$

が得られる。この計算結果に示すように、 $\sec x$ の高次導関数は $\sec x$ と $\tan x$ のべき級数の積で表される。そこで、

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{nk} \sec x \tan^k x,$$

なる形で導関数を定義してみよう。そのとき、展開係数 A_{nk} は

$$A_{nk} = kA_{n-1,k-1} + (k+1)A_{n-1,k+1},$$

なる漸化式にしたがう。初期条件として、 $A_{00} = 1$, $A_{0k} = 0$ ($k = 1, 2, \dots$) である。また、この展開係数とセカント数は $\hat{E}_n = A_{n0}$ で関係づけられる。行を導関数の階数 n , 列を $\tan x$ の次数として展開係数 A_{nk} と書いていくと表 3.2 のようになる。

表 3.2: セカント数計算のための表

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	0	1					
2	1	0	2				
3	0	5	0	6			
4	5	0	28	0	24		
5	0	61	0	180	0	120	
6	61	0	662	0	1140	0	720

この表によってセカント数の計算がしやすい。この表から奇数項のセカント数がゼロとなることがわかる。さらに、タンジェント数と同様に、 A_{nk} の漸化式からセカント数がすべて整数になることもわかる。上の表を用いてセカント数の最初の数項を計算すると、

$$\hat{E}_1 = 1, \quad \hat{E}_3 = 1, \quad \hat{E}_5 = 5, \quad \hat{E}_7 = 61, \quad \dots,$$

となる。上に示した A_{nk} の漸化式でタンジェント数を計算することができる。

3.2.2 オイラー数

本章を除くと、習慣的には前節で導入したセカント数よりも、オイラー数を使うことが多い。オイラー数は E_k なる記号で表される数列であり、

$$\frac{2}{e^x + e^{-x}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{E_k}{k!} x^k,$$

によって定義される。この定義式の左辺は $\operatorname{sech} x$ と書くこともでき、しかも、 $\sec ix = \operatorname{sech} x$ なる関係が成立するので、セカント数とオイラー数の関係は容易に導けそうである。実際に計算してみると、

$$\begin{aligned} \sec ix &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\hat{E}_k}{k!} (ix)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\hat{E}_{2k}}{(2k)!} x^k + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\hat{E}_{2k+1}}{(2k+1)!} x^k, \end{aligned}$$

となるのだが、 x が実数ならば $\operatorname{sech} x$ も実数になるはずなので、オイラー数の奇数項はゼロ、すなわち、 $E_{2k+1} = 0$ が成立する。これは、セカント数の奇数項がゼロであること $\hat{E}_{2k+1} = 0$ とは矛盾しない。さらに、偶数項については $\hat{E}_{2k} = (-1)^k E_{2k}$ が成立する。

オイラー数はタンジェント数との間に規則的な関係がある。その関係を導くため、 $\operatorname{sech} x = \cosh x - \tanh x \sinh x$ なる関係を用いてオイラー数を調べてみよう。ここで、 $\tanh x = -i \tan ix$ なる関係に注目し、タンジェント数 T_k を用いると、

$$\tanh x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{T_{2k-1}}{(2k-1)!} x^{2k-1},$$

と書くことができる。これらの情報を頼りに $\operatorname{sech} x$ を展開すると、

$$\begin{aligned} \operatorname{sech} x &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} T_{2k-1}}{(2k-1)!} x^{2k-1} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k T_{2k-1}}{(2k-1)! (2n-2k-1)!} x^{2n-2} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k T_{2k-1}}{(2k-1)! (2n-2k+1)!} x^{2n} \right] \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{2n}{2k-1} T_{2k-1} \right] \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \end{aligned}$$

が得られる。このテイラー展開から、オイラー数が

$$E_0 = 1, \quad E_{2n} = 1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{2n}{2k-1} T_{2k-1}, \quad E_{2n-1} = 0, \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (3.8)$$

と表されることがわかる。つまり、奇数添え字をもつオイラー数は、必ずゼロになる。次に、 $\tanh x = \operatorname{sech} x \sinh x$ なる関係を用いて、オイラー数とタンジェント数の関係を逆にたどってみる。すると、

$$\begin{aligned}\tanh x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_{2n}}{(2n)!} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{E_{2k}}{(2k)!} \frac{x^{2n-1}}{(2n-2k-1)!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{2k} E_{2k} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!},\end{aligned}$$

が得られるので、オイラー数とタンジェント数の関係は、

$$T_{2n-1} = (-1)^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{2k} E_{2k}, \quad T_{2n} = 0, \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (3.9)$$

と書くこともできる。ここで、タンジェント数が

$$T_{2k-1} = \frac{(-1)^k (2^{2k} - 4^{2k}) B_{2k}}{2k},$$

であることに注意すると、オイラー数はベルヌーイ数との間に、

$$E_{2n} = \sum_{k=1}^n \binom{2n}{2k-1} \frac{2^{2k} - 4^{2k}}{2k} B_{2k} + 1, \quad (3.10)$$

$$B_{2n} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{2k} \frac{2n}{4^{2n} - 2^{2n}} E_{2k}, \quad (3.11)$$

なる関係があることがわかる。この関係式からオイラー数を計算してもよいのだが、もっと簡単な漸化式によってオイラー数を計算することができる。その漸化式とは、

$$\sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} E_{2k} = 0, \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (3.12)$$

である。この関係は、 $\operatorname{sech} x \cosh x$ を評価することによって得られる。級数展開した形において、その関数の積を評価してみると、

$$\begin{aligned}\operatorname{sech} x \cosh x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_{2n}}{(2n)!} x^{2n} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{E_{2k}}{(2k)!} x^{2k} \frac{x^{2n-2k}}{(2n-2k)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} E_{2k} x^{2n},\end{aligned}$$

となるが、ここで $\operatorname{sech} x \cosh x = 1$ であることに注意すると、上記の漸化式が得られるわけである。この漸化式を用いてオイラー数の最初の数項を計算すると、

$$E_0 = 1, \quad E_1 = 0, \quad E_2 = -1, \quad E_3 = 0, \quad E_4 = 5, \quad E_5 = 0, \quad E_6 = -61, \dots$$

が得られる。また、前節から記述を引き延ばしにしてきた $\operatorname{sech} x$ と $\sec x$ の展開は、

$$\operatorname{sech} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{E_{2k}}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{4!}x^4 - \frac{61}{6!}x^6 + \cdots,$$

$$\sec x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{E_{2k}}{(2k)!} x^{2k} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{4!}x^4 + \frac{61}{6!}x^6 + \cdots,$$

となる。この展開式において、 $E_{2k+1} = 0$ ($k = 0, 1, \dots$) であることを用いた。後に示すベルヌーイ数とリーマンのゼータ関数の関係から、オイラー数には

$$|E_{2k}| \simeq 2(2k)! \left(\frac{2}{\pi}\right)^{2k+1} \quad \text{as } k \rightarrow \infty,$$

なる漸近的な性質があるので、正割関数と双曲正割関数のテイラー級数は $|x| < \pi/2$ の収束半径をもつ。いうまでもなく、その収束半径は $x = 0$ から最も近い正割関数の特異点までの距離と一致する。

3.3 タンジェント数と交代順列の組み合わせ

タンジェント数とセカント数は、異なる n 個の数字がとり得る交代順列の組み合わせの数と一致するという意外な性質がある。順列の要素を a_k ($k = 0, 1, \dots$) としたとき、交代順列とは、 $a_{2k} > a_{2k+1}$, $a_{2k+1} < a_{2k+2}$ のように、隣り合う項の大小関係が交互に切り替わりながら配置された順列のことである。

3.3.1 交代順列の組み合わせ

交代順列は 19 世紀に Désiré André によって初めて研究された。可能な交代順列の組み合わせの数は、既に述べたように、タンジェント数やセカント数と関係がある。例えば、5 以下の n に対して、互いに異なる整数からつくることのできる交代順列の組み合わせは下のようになる。まず、 $n = 1, 2$ のときには、1 通りしか交代順列はつukれないが、 $n = 3$ では 2 通りの交代順列が存在する。さらに、 $n = 4$ では 5 通り、 $n = 5$ では 16 通りとなる。

$$\begin{aligned} n = 1: & [1] \\ n = 2: & [2, 1] \\ n = 3: & [2, 1, 3], \quad [3, 2, 1] \\ n = 4: & [2, 1, 4, 3], \quad [2, 3, 4, 1], \quad [3, 1, 4, 2], \quad [3, 2, 4, 1], \quad [4, 1, 3, 2] \\ n = 5: & [2, 1, 4, 3, 5], \quad [2, 1, 5, 3, 4], \quad [3, 1, 4, 2, 5], \quad [3, 1, 4, 2, 5], \quad [3, 2, 4, 1, 5], \\ & [3, 2, 5, 1, 4], \quad [4, 1, 3, 2, 5], \quad [4, 1, 5, 2, 3], \quad [4, 2, 3, 1, 5], \quad [4, 2, 5, 1, 3], \\ & [4, 3, 2, 1, 5], \quad [4, 3, 5, 1, 2], \quad [5, 1, 3, 2, 4], \quad [5, 1, 4, 2, 3], \quad [5, 1, 3, 2, 4], \\ & [5, 1, 4, 2, 3] \end{aligned}$$

上のように5以下の n に対して、交代順列の組み合わせを列挙したが、その組み合わせ数がタンジェント数とセカント数に対応していることに気付いただろう。具体的に述べると、

$$\hat{T}_n = \begin{cases} \hat{E}_n & \text{if } n = 0, 2, 4, \dots \\ T_n & \text{if } n = 1, 3, 5, \dots \end{cases}$$

のように、タンジェント数とセカント数を互い違いにならべた数列 \hat{T}_n を定義したとき、異なる n 個の数値による交代順列の組み合わせは \hat{T}_n となることが予想される。本節から次節にわたり、その予想が正しいことを検証する。本章では今後、 \hat{T}_n が何度も登場するので、これをタンジェント・セカント数と呼ぶことにしよう。

タンジェント・セカント数が、交代順列の組み合わせの数と一致することを検証するため、まず、交代順列と逆交代順列の組み合わせが同数であることを述べておく。順列の各項 a_k ($k = 0, 1, \dots$) について、交代数列が $a_{2k} > a_{2k+1}$, $a_{2k+1} < a_{2k+2}$ であることに對して、その大小関係を逆にした条件: $a_{2k} < a_{2k+1}$, $a_{2k+1} > a_{2k+2}$ を満たす順列を逆交代順列と呼ぶことにする。このように、交代順列と逆交代順列は、最初の2項の大小関係が逆であるが、交互に大小関係が切り替わりながら配置された順列であるという性質は互いに共通である。テキストによっては、本書の逆交代順列を交代順列と呼んでいるかもしれない。交代順列と逆交代順列は、表裏一体であり、 n 個の異なる数値から構成される順列の組み合わせの数は等しくなると考えられる。なぜなら、順列を構成するすべての要素に $a_k \mapsto n - a_k + 1$ なる変換を施すと、交代順列は逆交代順列に変換されるからである。この交代順列から逆交代順列への変換は1対1の変換であり、逆交代順列に同一の変換を施すともとの交代順列に戻る。したがって、逆交代順列の組み合わせ数は、交代順列の数と同じである。

それでは、 n 以下の自然数からなる交代順列の組み合わせの数 A_n を求める方法を考えてみよう。既に示したように、 $A_1 = 1$, $A_2 = 1$, $A_3 = 2$, $A_4 = 5$, $A_5 = 16$ であることがわかっている。また、ゼロ個の数値からなる交代順列の組み合わせは空集合であるが、便宜上、 $A_0 = 1$ としておく。順列の長さ n を大きくしたとき、組み合わせの数 A_n はたちまち大きくなり、先ほどのようにすべてを書き下すことはできないだろう。その代わりに、組み合わせの数 A_n の規則性を見出してみよう。現時点において A_n までの値がわかっていると仮定のもと、 A_{n+1} を求めよう。例として、図3.2に $n = 8$ の場合を示している。順列に含まれる $n + 1$ 個の数値のうち、最小値を順列の左から $k + 1$ 番目に配置する。すると、その最小値の左側には k 個、右側には $n - k$ 個の数値が存在する。また、最小値以外の数値の配置が任意であるとする、 n 個の数値を左側と右側に、それぞれ、 k 個と $n - k$ 個に振り分ける組み合わせは $\binom{n}{k}$ 通りあるはずである。さらに、最小値より左側では右から左に向かって交代順列となるように数値を配置し、最大値より右側では左から右に向かって交代順列となるように数値を配置する。そうすれば、並べた n 個の数値は、左から右に見たときに交代順列、または、逆交代順列となっているはずである。

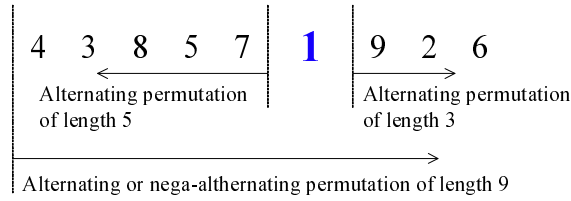


図 3.2: 長さ 9 の交代順列の例

既に設定した仮定によると、最小値の左に配置された k 個の自然数から交代順列をつくる配置の組み合わせは A_k 通りである。一方、最小値の右側に配置された $n - k$ 個の自然数から交代順列をつくる配置の組み合わせは A_{n-k} 通りである。よって、最小値を左から $k + 1$ 番目に配置したとき、並べた $n + 1$ 個の自然数が交代順列、または、逆交代順列になる組み合わせは、これらの条件の積であるので、 $\binom{n}{k} A_k A_{n-k}$ 通りである。その組み合わせを、最小値を配置するすべての位置、すなわち、 $k = 0, 1, \dots, n$ について加算すると、 $n + 1$ 個の自然数からつくられる交代順列と逆交代順列の組み合わせの数の和:

$$2A_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A_k A_{n-k},$$

が得られる。この式の左辺が $2A_{n+1}$ となっているのは、計算される値が、交代順列と逆交代順列の組み合わせ数の和であり、さらに、交代順列と逆交代順列の組み合わせ数が同じ数だからである。得られた公式を用いて、交代順列の組み合わせの数を計算していくと、

$$A_2 = \frac{1}{2}(A_0 A_1 + A_1 A_0) = 1,$$

$$A_3 = \frac{1}{2}(A_0 A_2 + 2A_1^2 + A_2 A_0) = 2,$$

$$A_4 = \frac{1}{2}(A_0 A_3 + 3A_1 A_2 + 3A_2 A_1 + A_3 A_0) = 5,$$

$$A_5 = \frac{1}{2}(A_0 A_4 + 4A_1 A_3 + 6A_2^2 + 4A_3 A_1 + A_4 A_0) = 16,$$

$$A_6 = \frac{1}{2}(A_0 A_5 + 5A_1 A_4 + 10A_2 A_3 + 10A_3 A_2 + 5A_4 A_1 + A_5 A_0) = 61,$$

を得ることができる。確かに、 A_5 までの計算結果が前に列挙した交代順列の組み合わせの数と一致していることがわかる。さらに、得られた公式により、 $A_6 = 61$ であることも導かれている。次の節で交代順列の組み合わせの数がタンジェント・セカント数と一致することを明らかにする。

3.3.2 タンジェント・セカント数との関係

本節では、いよいよ、交代順列の組み合わせ数がタンジェント・セカント数と一致することを示す。ここで、 $f(x) = \sec x + \tan x$ を考える。原点 $x = 0$ で正則である $f(x)$ は、原

点を中心にテイラー級数できるので、そのテイラー級数を、

$$\sec x + \tan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{T}_n}{n!} x^n,$$

とおいてみる。既に、正接関数と正割関数が、

$$\tan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T_{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad \sec x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{E}_{2n}}{(2n)!} x^{2n},$$

なる形で表現できていることがわかっている。この級数展開において、 T_n はタンジェント数、 \hat{E}_n はセカント数である。したがって、関数 $f(x)$ の展開係数 \hat{T}_n は、

$$\hat{T}_n = \begin{cases} \hat{E}_n & \text{if } n = 0, 2, 4, \dots \\ T_n & \text{if } n = 1, 3, 5, \dots \end{cases}$$

のように、タンジェント数とセカント数を交互に並べた数列、すなわち、タンジェント・セカント数であることがわかる。

関数 $f(x)$ の導関数を計算してみると、

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\sin x + 1}{\cos^2 x} = \frac{2 \sin x + 1 + \sin^2 x + \cos^2 x}{2 \cos^2 x} \\ &= \frac{(\sec x + \tan x)^2 + 1}{2} = \frac{[f(x)]^2 + 1}{2}, \end{aligned}$$

であるので、関数 $f(x)$ の導関数は、

$$2f'(x) = [f(x)]^2 + 1,$$

なる性質があることがわかる。さて、展開係数 \hat{T}_n を用いた級数展開を用いて、この関係式の左辺と右辺を計算してみよう。まず、左辺は、

$$2f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{T}_{n+1}}{n!} x^n, \quad (3.13)$$

となる。一方、右辺は、

$$\begin{aligned} [f(x)]^2 + 1 &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{T}_n}{n!} x^n \right)^2 + 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{\hat{T}_k}{k!} \frac{\hat{T}_{n-k}}{(n-k)!} x^n + 1 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \hat{T}_k \hat{T}_{n-k} x^n + 1, \end{aligned} \quad (3.14)$$

のように計算される。前に示したように、(3.13) と (3.14) は等しいはずなので、展開係数を比較し、

$$\hat{T}_1 = 1, \quad 2\hat{T}_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \hat{T}_k \hat{T}_{n-k}, \quad (3.15)$$

が得られる。この式は前節で導出した交代順列の組み合わせの数を求めるための漸化式そのものである。しかも、前節で交代順列の組み合わせの数は、 $n = 5$ まで \hat{T}_n と一致することが示されている。したがって、5より大きい任意の n に対しても、タンジェント・セカント数 \hat{T}_n は異なる n のこの数値による交代順列の組み合わせの数と一致する。

3.3.3 Seidel-Entringer の三角形

前節までに、タンジェント・セカント数を計算するための方法として、テイラー級数展開の処方箋に基づく漸化式と、交代順列の組み合わせの数に基づく漸化式を導出した。それらの方法とは異なり、加算だけでタンジェント・セカント数を計算する方法が Seidel と Entringer によって考案されている。本節では、そのような乗算を使用しない計算方法について説明する。

本節で説明する計算方法も、タンジェント・セカント数が交代順列の組み合わせの数と一致することを利用した方法である。異なる n 個の数値から構成される交代順列の組み合わせの数はタンジェント・セカント数 \hat{T}_n と等しい。ここで、便宜上、交代順列が 1 から n までの自然数で構成されるものとし、先頭要素が k である交代順列の組み合わせの数を E_{nk} としよう。この組み合わせの数 E_{nk} は Entringer 数と呼ばれる。Entringer 数を用いると、 n までの自然数によって構成される交代順列の組み合わせの数は、

$$\hat{T}_n = \sum_{k=1}^n E_{nk},$$

と表されるだろう。ところが、交代順列の条件 $a_0 > a_1$ より、先頭要素が 1 である交代順列は存在しない。よって、 $E_{n1} = 0$ である。先頭要素が k である交代順列は、条件 $a_0 > a_1$ より、第 2 番目の要素が $k - 1$ 以下の自然数である場合に限られる。しかも、交代順列の例 $[3, 2, 5, 1, 4]$ を見ればわかるように、交代順列は第 2 番目の要素から見ると逆交代順列となる。よって、

$$E_{nk} = \sum_{j=1}^{k-1} (\text{長さ } n-1 \text{ で先頭要素が } j \text{ である逆交代順列の組み合わせの数}), \quad (3.16)$$

である。ところで、長さ n の交代順列のすべての要素を $a_j \mapsto n - a_j + 1$ によって変換すると、その結果は n 以下の自然数で構成される長さ n の逆交代順列となる。この変換規則を、長さ 5 の交代順列の $[3, 2, 5, 1, 4]$ に適用すると、 $[3, 4, 1, 5, 2]$ に変換されることがその一例である。そのような規則性を考えると、長さ $n - 1$ で先頭要素が j である逆交代順列の組み合わせの数は、長さ $n - 1$ で先頭要素が $n - j$ である交代順列の組み合わせの数 $E_{n-1, n-j}$ と等しいことがわかる。したがって、(3.16) は、

$$E_{nk} = \sum_{j=1}^{k-1} E_{n-1, n-j}, \quad (3.17)$$

のように書き換えられる。

上のようにして導かれた E_{nk} のうち、特別な場合として、 $k = 1$ のとき、総和記号が適用されないので $E_{n1} = 0$ となる。これは、上にも書いたように、先頭要素が 1 である交代順列が不可能なことが理由である。もうひとつの特別な場合として、 $k = 2$ を挙げよう。これに対応する Entringer 数は、

$$E_{n2} = E_{n-1,n-1}, \quad (3.18)$$

である。先頭要素が 2 である交代順列を考えてみると、条件 $a_0 > a_1$ より、必然的に、 $[2, 1, \dots]$ のように先頭の 2 つの要素が決まってしまう、自由度があるのは、その後の $n - 2$ 個の要素だけである。つまり、長さ n で先頭要素が 2 である交代順列の組み合わせの数は、長さ $n - 2$ の交代順列の組み合わせの数 \hat{T}_{n-2} と等しい。したがって、長さ n の交代順列の組み合わせの数 \hat{T}_n は、

$$\hat{T}_n = E_{n+1,n+1} = E_{n+2,2}, \quad (3.19)$$

となる。これで、 \hat{T}_n を計算する漸化式がそろった。まず、長さ 1 で先頭要素が 1 である交代順列から始める。そのような交代順列は [1] しかないので、 $E_{11} = 1$ である。次に、(3.18) より、 $E_{22} = 1$ である。再度、(3.18) より、 $E_{32} = 1$ である。次に、漸化式 (3.17) を用いて、 E_{33} を計算すると、

$$E_{33} = E_{22} + E_{21} = 1,$$

となる。続いて、(3.18) によって $E_{42} = 1$ が得られ、漸化式 (3.17) によって E_{43} と E_{44} が計算される。ここで、(3.17) が

$$E_{nk} = E_{n,k-1} + E_{n-1,n-k+1}, \quad (3.20)$$

のように変形されることに気付けば計算しやすい。この規則性したがって計算を進めると表 3.3 を得ることができる。この表を見ると、対角成分が長さ n の交代順列の組み合わせの総数、すなわち、タンジェント数とセカント数であることがわかる。しかも、この表は加算のみで作成できることが利点である。

表 3.3: 漸化式によって計算した Entringer 数 E_{nk}

$n \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7
1	1						
2	0	1					
3	0	1	1				
4	0	1	2	2			
5	0	2	4	5	5		
6	0	5	10	14	16	16	
7	0	16	32	46	56	61	61

漸化式 (3.18) と (3.20) は、整数の加算のみで計算できるため、計算機でタンジェント数やセカント数を計算するのに使用される。さらに、タンジェント数はベルヌーイ数を用いて

$$T_{2k-1} = \frac{(-1)^k(2^{2k} - 4^{2k})B_{2k}}{2k},$$

と書くことができるので、上の漸化式を用いて得られたタンジェント数からベルヌーイ数を得ることができる。有理数であるベルヌーイ数を分数表現するには、ベルヌーイ数による漸化式によって計算するには分数計算と乗算が必要である。しかし、タンジェント数からベルヌーイ数を得る方法では、漸化式の計算は整数の加算だけでよいので、ベルヌーイ数も容易に計算できるようになるのである。

一方、表 3.3 を手計算に適した形 (表 3.4) に組みかえることもできる。まず、頂上 (第 0 行 0 列目) に 1 を書く。その数値 1 を真下 (第 1 行 0 列目) に書き、右隣に 1 を書く。次に、その右下 (第 2 行 2 列目) に 1 を書き、左に向かってある規則にしたがって数字を書く。その規則とは、進行方向の斜め上にある数字を加算しながら左に向かって数字を書いていき、加算する数がなくなるまで続ける。左方向への走査が終わると、左端の数字を真下に書き、同様の規則で右に向かって走査する。このように計算していくと表 3.4 のような三角形の領域に数値が埋まっていく。その三角形を Seidel-Entringer の三角形と呼ぶ。具体的に、Seidel-Entringer 三角形の要素 A_{nk} に関する生成規則は、

$$\begin{aligned} A_{00} &= 1, \\ A_{2n,2n} &= A_{2n-1,2n-1}, & A_{2n,k} &= A_{2n,k+1} + A_{2n-1,k-1}, \\ A_{2n+1,0} &= A_{2n,0}, & A_{2n+1,k} &= A_{2n,k-1} + A_{2n-1,k}, \end{aligned}$$

のように表現できる。この操作を繰り返していくと、奇数行目の第 0 列目にタンジェント数が、偶数行目の対角成分にセカント数が並んでいる。

表 3.4: Seidel-Entringer の三角形

$n \setminus k$		0	1	2	3	4	5	6	7
0		1							
1	→	1	1						
2		2	2	1	←				
3	→	2	4	5	5				
4		16	16	14	10	5	←		
5	→	16	32	46	56	61	61		
6		272	272	256	224	178	122	61	←
7	→	272	544	800	1024	1202	1324	1385	1385

前にも述べたが、習慣的には、セカント数の代わりにオイラー数を用いた議論が多い。オイラー数 E_n は母関数 $2/(e^x + e^{-x})$ のテイラー級数の n 次の展開係数であるが、セカン

ト数 \hat{E}_n とは, $E_{2k} = (-1)^k \hat{E}_{2k}$ なる関係がある。よって, オイラー数も Seidel-Entringer の三角形で計算できる ($(-1)^k$ を乗じる必要があるが) のである。

第4章 ゼータ関数

ベルヌーイ数はリーマンのゼータ関数とも関係があることが知られている。ゼータ関数とは、自然数のべき乗の逆数による無限級数、すなわち、 $\zeta(s) \equiv 1 + 1/2^s + 1/3^s + \dots$ で定義される関数である。特に、 $\zeta(1)$ を調和級数と呼ぶ。さらに、自乗逆数による級数 $\zeta(2)$ は、16世紀から17世紀初頭にかけてバーゼル問題として、その収束性を議論された。本章では、調和級数、バーゼル問題をとおしてゼータ関数を説明し、ベルヌーイ数との関係を紹介する。

4.1 調和級数

自然数の逆数は、 $1, 2, 3, \dots$ のように、順次小さくなり、その値はゼロに向かって収束していく。自然数の逆数を加算した級数、いわゆる調和級数は、加算する項の数を無限大にしたとき収束するのだろうか？ 調和級数は、記号を用いて、

$$H_n \equiv \sum_{k=1}^n \frac{1}{k},$$

によって定義される。この級数の隣り合う項との差は、 $H_n - H_{n-1} = 1/n$ であり、 $n \rightarrow \infty$ とすればこの差はゼロに収束するので、少なくとも紀元前において、調和級数はある有限の値に収束すると信じられていた。実際に調和級数を計算してみると、 $H_{100} = 5.18738$ 、 $H_{1000} = 7.48547$ のように値がゆっくりと上昇する。この上昇の緩さから、調和級数が発散するとは思えないかもしれない。しかし、調和級数は発散するのである。

調和級数が発散することは、14世紀にオレームによって証明された。オレームの証明にしたがって調和級数の発散を示してみよう。調和級数を次のように書いてみると調和級数の発散が理解できる。

$$\begin{aligned} H_4 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 + \frac{2}{2}, \\ H_8 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 1 + \frac{3}{2}.$$

この関係を一般化すると,

$$H_{2^n} > 1 + \frac{n}{2},$$

と書くことができる。この関係式において $n \rightarrow \infty$ とすれば右辺が発散するので、調和級数が発散することが示されるのである。

調和級数の項を部分的に抜き出し、分母が偶数だけ、または、奇数だけの項のみで構成される級数もやはり発散する。調和級数の項を部分的に抜き出した級数が発散することは、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdots \right) = \infty, \\ 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \cdots &> \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \cdots \right) = \infty, \end{aligned}$$

と書けば証明できる。つまり、調和級数は項を半分に間引いた程度では収束する級数をつくることはできない。同様に、分母が3の倍数になるものだけ、さらに、分母が1000の倍数になるものだけ間引いて抜き出したとしても、やはり、その級数は発散する。

総和計算の項数 n に対する調和級数 H_n は表 4.1 のようになる。その結果によると、調和級数 H_n は $\log n$ と同じくらいの速さで上昇している。しかも、 $\gamma_n \equiv H_n - \log n$ を計算してみると下表のように一定の値に収束しそうである。

表 4.1: 調和級数と対数関数の関係

n	H_n	γ_n
10	2.9289682	0.6263831
100	5.1873775	0.5822073
1 000	7.4854708	0.5777155
10 000	9.7876060	0.5772656
100 000	12.0901461	0.5772206
1 000 000	14.3927267	0.5772161
10 000 000	16.6953113	0.5772157

調和級数 H_n と対数関数 $\log x$ と差, すなわち, γ_n を調べてみよう。その関係を調べるには図 4.1 に示す幾何学的関係に注目すればよい。この図は、関数 $f(x) = 1/x$ の定積分を長方形の面積で近似した場合を表している。図 4.1 (a) は、濃い網掛けの長方形の面積が関数の積分値より少なくなるように配置した図である。一方、図 4.1 (b) は、濃い網掛けの長方形の面積が関数の積分値より大きくなるように配置した図である。

図 4.1 のどちらも、濃い網掛けと薄い網掛けの長方形の面積の和は H_n (図では $n = 8$ としている) である。そのうち、関数 $1/x$ の積分の見積もり量に含むのは濃い網掛け部のみ

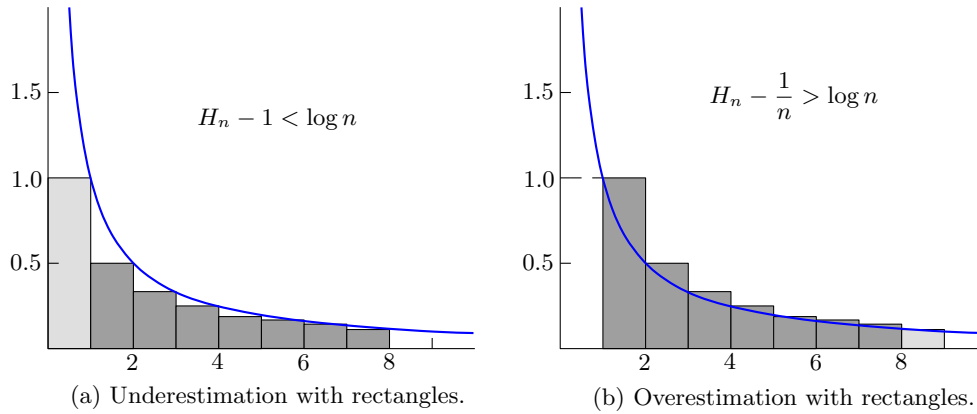


図 4.1: 調和級数と対数関数の関係

であり、薄い網掛け部は除外される。したがって、関数 $1/x$ を区間 $[1, n]$ で積分した結果は、

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} < \log n < \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k},$$

なる不等式で記述できるが、これを調和級数の記号 H_n を用いて書き換えると、

$$H_n - 1 < \log n < H_n - \frac{1}{n},$$

となる。さらに、この不等式から H_n を減じて -1 倍すると、 $1/n < \gamma_n < 1$ が得られる。しかし、これだけでは γ_n が収束するとはいえない。なぜなら、数列 $a_n = (2 + (-1)^n)/4$ のように $1/n < a_n < 1$ を満足しているが、収束せずに振動している場合も考えられるからである。そこで、 γ_n の階差を評価してみよう。

$$\begin{aligned} \gamma_n - \gamma_{n-1} &= H_n - H_{n-1} + \log(n-1) - \log n \\ &= \frac{1}{n} + \log\left(1 - \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

この階差を評価するには、 $x \neq 0$ に対して $x > \log(1-x)$ が成立することに注意すればよい。この関係式の x を $-1/n$ で置き換えれば、

$$\gamma_n - \gamma_{n-1} < 0,$$

であることが導かれる。したがって、 γ_n は単調減少の数列である。単調減少の数列 γ_n が $n \rightarrow \infty$ の条件で $0 < \gamma_n < 1$ となるということは、 γ が区間 $(0, 1)$ の中のどこかの点に収束することを意味している。その極限值は、

$$\gamma \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \right), \quad (4.1)$$

のように記号 γ によって記述し、**オイラー一定数**と呼ばれる。これを利用すると、 n が十分に大きければ、調和級数は $H_n \simeq \log n + \gamma$ なる近似式で評価できる。

4.1.1 オイラー定数

前節で調和級数 H_n が $\log n$ と同じくらいの速さで発散し、 $\gamma_n \equiv H_n - \log n$ が特定の値に収束することを示した。オイラー定数と呼ばれるその特定の値は、0 から 1 の間のある数値であることだけはわかっている。本節では、オイラー定数がどのくらいの値になるのかを、もう少し詳しく評価する。

前節での定義によると、調和級数と対数関数の差 γ_n は、

$$\gamma_n = H_n - \log n = H_n - \int_1^n \frac{dx}{x},$$

のように書くことができる。おおまかな評価であるが、右辺の積分は図 4.2 のような台形公式によって評価することができる。その図は、 x 軸上の各整数の座標における関数値と x 軸によって指定される台形の面積を積分区間に渡って加算することによって近似的に積分計算することを表している。その台形公式によって積分計算すると、

$$\begin{aligned} \gamma_n &\simeq H_n - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \cdots - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right) \\ &= H_n - \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1}\right) - \frac{1}{2n} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}, \end{aligned}$$

が得られる。この近似式において $n \rightarrow \infty$ の極限をとると、 $\gamma \simeq 1/2$ となる。かなり荒い近似であるが、オイラー定数 γ は 0.5 に近い数値である。

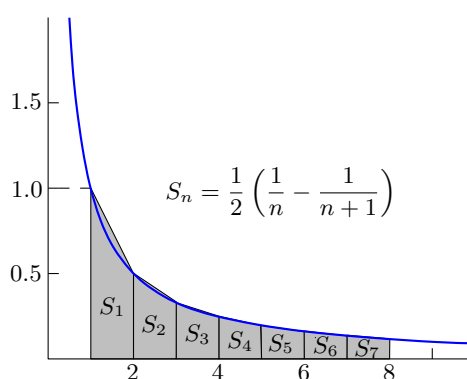


図 4.2: 台形公式による積分計算方法

台形公式による積分の評価はかなり荒い近似である。もう少し精度よくオイラー定数を評価できないだろうか。オイラー定数を与える数列 γ_n の定義式は、

$$\begin{aligned} \gamma_n &= H_n - \log n = H_n - \log n + \log 1 \\ &= H_n - \left[\log n - \log(n-1)\right] - \left[\log(n-1) - \log(n-2)\right] - \cdots - \left[\log 2 - \log 1\right], \end{aligned}$$

のように変形できる。さらに、対数関数のテイラー級数展開 $\log x = x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + \dots$ を用いると、上の式は、

$$\begin{aligned}\gamma_n &= H_n - \sum_{k=1}^{n-1} \log \left(1 + \frac{1}{k}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{3k^3} - \frac{1}{4k^4} + \dots\right) + \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2k^2} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{3k^3} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{4k^4} - \dots,\end{aligned}$$

のように変形される。この関係式において、 $n \rightarrow \infty$ の極限をとると、

$$\gamma = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3k^3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^4} - \dots, \quad (4.2)$$

が得られる。この結果は、第 4.3 節で紹介するゼータ関数 $\zeta(s)$ によって記述できる。後に示すように、 s 次の調和級数は $\zeta(s)$ と定義される。ゼータ関数を用いてオイラー定数を記述すると、

$$\gamma = \frac{\zeta(2)}{2} - \frac{\zeta(3)}{3} + \frac{\zeta(4)}{4} - \dots, \quad (4.3)$$

となる。とはいえ、オイラー定数を計算する公式が得られたと喜んではいけない。なぜなら、この級数は収束が非常に遅いからである。具体的には、2 以上の自然数 s に対して $\zeta(s) > 1$ であることから、この級数は $\log 2 = 1 - 1/2 + 1/3 - \dots$ よりも収束が遅いのである。そう考えただけで、この公式を計算に利用しようとは思わないだろう。

一方、上で計算した同一の γ_n から計算を開始しても、もう少し収束が速い級数を得ることができる。導出過程を示すと、

$$\begin{aligned}\gamma_n &= H_n - \sum_{k=2}^n \log \frac{k}{k-1} = H_n + \sum_{k=2}^n \log \left(1 - \frac{1}{k}\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{3k^3} + \frac{1}{4k^4} + \dots\right) \\ &= 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{2k^2} - \sum_{k=2}^n \frac{1}{3k^3} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{4k^4} - \dots,\end{aligned}$$

となる。この計算結果は、 $n \rightarrow \infty$ の極限をとり、ゼータ関数を用いると、

$$\gamma = 1 - \frac{\zeta(2) - 1}{2} - \frac{\zeta(3) - 1}{3} - \frac{\zeta(4) - 1}{4} - \dots = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(k+1) - 1}{k+1}, \quad (4.4)$$

なる級数が得られる。十分に大きい自然数 k に対して $\zeta(k) - 1 \simeq 2^{-k}$ であるので、級数 (4.4) は級数が 3 項だけ進行するたびに 10 進数で 1 桁だけ有効桁が増加する。

4.1.2 素数の逆数和

調和級数を構成する項の部分集合として、素数の逆数のみによる級数の収束を調べてみよう。自然数の中における素数の分布は、その値が大きくなるにつれてまばらになっていくため、自然数全体における素数の割合はかなり小さいはずである。とはいえ、素数の逆数による級数:

$$P_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \cdots + \frac{1}{p_n},$$

は収束するだろうか。

素数の逆数による級数は無限項まで存在する。つまり、素数が無限に存在するということなのだが、その事実は古代ギリシャでも知られていた。古代ギリシャのユークリッドが次のようにして、素数が無限に存在することを証明している。

証明 素数が有限個 (n 個) であることを仮定し、すべての素数を $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ と書く。すべての素数の積に 1 を加えた自然数 q , すなわち, $q = p_1 p_2 p_3 \cdots p_n + 1$ を考える。自然数 q は, p_1 から p_n のどの素数で割っても, 必ず, 1 が余る。すなわち, p_1 から p_n がすべての素数であるという仮定に矛盾する。つまり, 素数は無限に存在する。◻

さて, 表 4.2 によって素数の逆数による級数を調べてみよう。その表には, 与えられた上限数 (upper limit) を超えない素数の個数 n と, 最大の素数 p_{n-1} と, それら n 個の素数の逆数からなる級数の値 S_n を記載している。素数の逆数による級数は調和級数に比べ, かなりゆっくりと上昇する。上限数を百万としたときの級数にしても, その値は 2.887 程度にしかならない。これくらい上昇が遅いと, この級数はある数値に収束しそうな気がするのだが, 驚くことにこの級数も発散するのである。

表 4.2: 素数の逆数による級数

Upper limit	n	p_{n-1}	S_n
10	4	7	1.17619048
100	25	97	1.80281720
1 000	168	997	2.19808013
10 000	1 229	9 973	2.48305998
100 000	9 592	99 991	2.70527218
1 000 000	78 498	999 983	2.88732810
10 000 000	664 579	9 999 991	3.04144938

素数の逆数による級数は, オイラーがゼータ関数を研究することによって発散することを発見した。一方, 20 世紀にエルデシュがわかりやすい証明によって, 素数の逆数による

級数が発散することを示しているのでその方法を紹介します。エルデシュの証明は背理法によるものである。つまり、素数の逆数による級数が収束すると仮定した上でその矛盾を暴くことによって級数の発散を証明するのである。

証明 素数の逆数による級数が収束するという事は、ある任意の正の数 ε が与えられたとき、

$$\frac{1}{p_{n+1}} + \frac{1}{p_{n+2}} + \frac{1}{p_{n+3}} + \cdots < \varepsilon,$$

を満たす整数 n が存在する。この ε は、任意の正の数であるのでどんな値であってもよい。どんなに小さい ε を設定しても、必ず、上の不等式を満たす n が存在するという事によって級数の収束を約束しているのである。まず、素数の逆数の級数が収束することを仮定し、 ε はどのような正の数であってもよいので、 $\varepsilon = 1/2$ としてみよう。さらに、上の不等式の両辺に自然数 N を乗じると、不等式は

$$\frac{N}{p_{n+1}} + \frac{N}{p_{n+2}} + \frac{N}{p_{n+3}} + \cdots < \frac{N}{2},$$

となる。ここで、1 から N までの自然数のうち、 p_n 以下の素数だけで因数分解できる自然数の個数を N_1 個とする。逆に、少なくとも p_{n+1} 以上の約数をもつ自然数の個数を N_2 個とする。言うまでもなく、 $N = N_1 + N_2$ でなければならない。ここで、上の不等式の各項の小数部を切り捨てると、その不等式は

$$\left\lfloor \frac{N}{p_{n+1}} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{p_{n+2}} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{p_{n+3}} \right\rfloor + \cdots < \frac{N}{2},$$

なる形に書き換えられる。小数部を切り捨てることによって、左辺はより小さな値になるので、不等式としては成立したままである。ところで、 $\lfloor N/p_{n+1} \rfloor$ は、1 から N までの自然数のうち、 p_{n+1} を約数とする自然数の個数である。そう考えると、この不等式は、

$$N_2 \leq \left\lfloor \frac{N}{p_{n+1}} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{p_{n+2}} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{p_{n+3}} \right\rfloor + \cdots < \frac{N}{2},$$

と書けるはずである。すなわち、 $N_2 < N/2$ である。一方、 p_n 以下の素数のみで因数分解できる自然数 ν は、

$$\nu = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_n^{e_n} \cdot m^2,$$

のように書くことができる。ただし、指数 e_1, e_2, \dots, e_n は0または1であり、 m はやはり p_n 以下の素数のみで因数分解できる自然数である。この式は、自然数 ν を因数分解したとき、素数の偶数乗となっている因子をすべて m^2 に放り

込み, 残りの因子を $p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_n^{e_n}$ として並べたと思えばよい。例えば, 11 以下の素数のみで因数分解できる自然数 2683296 は,

$$2683296 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11^3 = 2^1 \cdot 3^0 \cdot 5^0 \cdot 7^1 \cdot 11^1 \cdot (2^2 \cdot 3^1 \cdot 11^1)^2,$$

となるので, この場合, $[e_1, e_2, e_3, e_4, e_5] = [1, 0, 0, 1, 1]$, $m = 132$ である。さて, p_n 以下の素数で因数分解した場合, 指数 $[e_1, e_2, \dots, e_n]$ の組み合わせは 2^n 通り存在し, m の選び方はたかだか \sqrt{N} 通りである。よって, p_n 以下の素数のみで分解できる自然数の個数 N_1 は, $N_1 \leq 2^n \sqrt{N}$ となる。ここで, $N > 2^{2(n+1)}$ となるように N を選べば, $N_1 < N/2$ となる。つまり, $N_1 + N_2 < N$ となり, 自然数の個数に矛盾が生じる。この矛盾が生じた理由は, N 以下の自然数のうち p_{n+1} 以上の素数を約数とする自然数の個数を $N_2 < N/2$ のように限定してしまったことである。これにより, 不等式:

$$\frac{1}{p_{n+1}} + \frac{1}{p_{n+2}} + \frac{1}{p_{n+3}} + \cdots < \frac{1}{2},$$

を満足する n は存在しないことになる。したがって, 素数の逆数による級数は発散する。◻

4.1.3 交代調和級数

自然数の逆数を順次加算した級数, いわゆる調和級数が発散することは既に述べた。調和級数に加算する第 n 項は $1/n$ であるので, 加算する項の増加とともに加算する項はゼロに近づいていく。それにも関わらず調和級数は発散するのである。しかし, 加算する項の符号を交互に入れ替え,

$$\hat{H}_n \equiv \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n},$$

のように計算される級数は収束する。このように自然数の逆数を符号を交互に入れ替えながら加算した結果を交代調和級数と呼ぶ。交代調和級数の偶数番目の値 \hat{H}_{2n} に注目したとき, $\hat{H}_{2n} = \hat{H}_{2n-1} + 1/2n$ である。また, $2n+1$ 番目の値が,

$$\hat{H}_{2n+1} = \hat{H}_{2n} - \frac{1}{2n+1} = \hat{H}_{2n-1} + \frac{1}{2n(2n+1)},$$

であるので, 交代調和級数は,

$$\hat{H}_{2n-1} < \hat{H}_{2n+1} < \hat{H}_{2n},$$

なる関係を満たす。第 $2n + 1$ 番目の値をはさむ 2 つの値の差は $1/2n$ である。この差は n が上昇するとゼロに近づいていくため、交代調和級数の極限值は特定の値に追い詰められ、収束するのである。交代調和級数が収束する先の数値は、本書で既に述べているように、

$$\hat{H}_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \log 2,$$

である。この関係式は、対数関数のマクローリン級数 $\log(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + \cdots$ に $x = 1$ を代入して得られる。

交代調和級数の収束は、収束の中でも条件収束に分類される。条件収束を簡単に説明しよう。一般的に議論するため、数列 a_n を考えよう。この数列による級数:

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_n,$$

が収束するとき、数列 a_n の絶対値による級数 $\sum |a_n|$ も収束できる場合がある。そのとき、級数 S_n は絶対収束するという。それに対して、絶対値による級数が収束せず、 S_n が収束する場合、 S_n は条件収束するという。交代調和級数の場合に置き換えると、絶対値による級数が調和級数である。既に見てきたように調和級数は発散し、交代調和級数が収束する。したがって、交代調和級数は収束の中でも、条件収束するということである。

交代調和級数のように条件収束する級数には不可思議な性質がある。条件収束する級数は、総和の順序を入れ替えると結果が変化する場合があるのだ。交代調和級数を次のように順序を入れ替えてみよう。

$$\begin{aligned} \hat{H}_\infty &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots \\ &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots \end{aligned}$$

この数式は、単に加算する項の順序を入れ替えただけであるが、さらに計算を進めると、

$$\begin{aligned} \hat{H}_\infty &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{12} + \cdots \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots\right) \\ &= \frac{\log 2}{2}, \end{aligned}$$

が得られる。もともと $\hat{H}_\infty = \log 2$ のはずだったのに、加算の順序を入れ替えるとその半分の値になってしまった。加算の順序を入れ替えて総和が変化することは、条件収束であることを利用したからくりがある。

加算順序を入れ替えて総和が変化するからくりは、奇数分母の項と偶数分母の項の比率が $1:1$ でなくなっていることである。上の例では、第 0 目から数えたとき、奇数分母は 3

の倍数で、偶数分母はそれ以外で現れる。例えば、奇数分母の項を 100 万項だけ加算した場合、偶数分母の項が 200 万項も減算されているのである。これを数式で書くならば、

$$\begin{aligned}
 \hat{H}_N^{(3)} &= \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{4k+2} - \frac{1}{4k+4} \right) \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2k+1} - \sum_{k=0}^{2N-1} \frac{1}{2k+2} \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2k+1} - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2k+2} - \sum_{k=N}^{2N-1} \frac{1}{2k+2} \\
 &= \sum_{k=0}^{2N-1} \frac{(-1)^k}{k+1} - \frac{1}{2} \sum_{k=N}^{2N-1} \frac{1}{k+1},
 \end{aligned}$$

のようになるだろう。加算順序の入れ替えで値が変化することが明らかになったので、左辺を \hat{H}_N でなく、新たな記号で $H_N^{(3)}$ と書くことにした。この式の N を 100 万とするならば、右辺第 1 項は奇数分母と偶数分母を 100 万項ずつ用いた級数であり、第 2 項は余った偶数分母の項が減算されているのを表している。この右辺第 2 項が、順序入れ替えによって値が変わる要因である。級数の収束条件に関するコーシーの判定法によると、級数 S_n が収束する条件は、

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \text{ such that } N \leq m < n \Rightarrow |S_n - S_m| < \varepsilon,$$

と書かれる。この数式は、十分に大きな N を選んだときに、第 n 項まで加算した級数 S_n と第 m 項まで加算した級数 S_m の差がゼロに収束することを表現している。ここで、(4.5) を

$$\hat{H}_N^{(3)} = \hat{H}_{2N} - \frac{H_{2N} - H_N}{2},$$

と書けばコーシーの判定条件と結びつきやすい。この式の右辺第 2 項は調和級数の差が現れている。第 1 項は交代調和級数であり、 $N \rightarrow \infty$ とすれば $\log 2$ に収束する。しかし、調和級数が収束しないことから、コーシーの判定法を逆に利用すると第 2 項が $N \rightarrow \infty$ としてもゼロに収束しないことが言える。したがって、順序を入れ替えた交代調和級数の値が変化することが示されるのである。この議論は他の数列についても同様である。条件収束をする数列であれば、同様に N をどんなに大きくとっても右辺第 2 項をゼロにできないので、加算の順序を変えると、級数の値が変化するのである。一方、絶対収束する数列ならば、コーシーの判定法によって、 N を十分に大きくとれば右辺第 2 項がゼロに収束するので、加算の順序を入れ替えても級数の値は変化しない。

条件収束する数列は、加算の順序を入れ替えることによって、任意の値に級数を収束させることができる。交代調和級数の場合、級数が目標の値より小さければ順次、奇数分母

の項を加算し、級数が目標の値を超えれば偶数分母の値を減算すればよい。例えば、級数:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{4} + \frac{1}{15} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} - \frac{1}{6} \\ + \frac{1}{23} + \frac{1}{25} + \frac{1}{27} + \frac{1}{29} - \frac{1}{8} + \frac{1}{31} + \frac{1}{33} + \frac{1}{35} + \frac{1}{37} - \frac{1}{10} + \dots,$$

は $\sqrt{2}$ に収束する。同様に、加算順序を入れ替えることによって、奇数分母の項と偶数分の項の混在比を操作すれば、級数を 100 のような大きな値や、 -10 のような負の値に収束させることも可能である。

4.2 バーゼル問題

調和級数だけでなく、素数の逆数による級数までもが発散することがわかった。次に、自然数の自乗の逆数による級数を調べよう。自然数の逆数による級数と書いたが、自然数のうち自乗数となる数値の逆数による級数と解釈してもよい。つまり、加算される項は、調和級数よりもずいぶんまばらになっているはずだ。問題とする級数を形式的に書くと、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots,$$

となる。この無限級数は、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 1 + \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = 2,$$

であることから、ある特定の値に収束することが容易に予想される。この予想はある驚くべき事実を意味している。それは、自然数の部分集合としての素数の列 $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots$ よりも、自乗数 $1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \dots$ の方が少ないということである。

自乗数の逆数和の極限值を特定する問題はバーゼル問題と呼ばれる。バーゼル問題は 1644 年に、モンゴリによって提起され、ヨハン・ベルヌーイもその問題に取り組んだが解決できなかった。ところが、1735 年、ヨハン・ベルヌーイの弟子であったオイラーが、自乗数の逆数和が $\pi^2/6$ であることを特定したのである。本節では、オイラーによるバーゼル問題の解法と、フーリエ級数を利用した解法について述べる。

オイラーによる解法 オイラーが与えたバーゼル問題の解法には、無限乗積による正弦関数の表現が必要である。正弦関数とゼロを等号で結んだ方程式 $\sin x = 0$ は、 $x = \pi n$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) を解とする。複素関数において、方程式 $f(z) = 0$ が z_1, z_2, \dots, z_n を解とするならば、関数 $f(z)$ は $f(z) = c(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$ なる形で表現できる。ただし、 c は z に依存しない任意の複素定数である。正弦関数についても同様に考えると、

$$\sin x = cx(x + \pi)(x - \pi)(x + 2\pi)(x - 2\pi) \cdots = cx \prod_{n=1}^{\infty} (x^2 - \pi^2 n^2),$$

なる形*で書くことができる。見てわかるとおり、この数式は代数学の基本定理を利用した表現である。むしろ、後の展開を考えると、乗積の各要素に $-1/\pi^2 n^2$ を乗じ、

$$\sin x = Cx \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right),$$

と書いておいたほうがよいかもしれない。ここで、 c も C も任意の定数であるとする。ここで、 $x \rightarrow 0$ としたとき $\sin x/x \rightarrow 1$ であることを利用して定数 C を求めると、 $C = 1$ となるはずである。よって、正弦関数は無限乗積:

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right),$$

によって表現することができる。これがオイラーが導出した正弦関数の無限乗積による表現である。この無限乗積による表現は、余接関数 $\cot x$ の部分分数展開を積分することによっても導出できる。(むしろ、そのほうが数学的に厳密である。) この乗積表現で正弦関数を近似できることを図 4.3 に示す。乗じる項の数が少ないとすぐに発散するが、多くの項を乗じると正弦関数に近づくことがこの図からもわかるだろう。ところで、無限乗積を

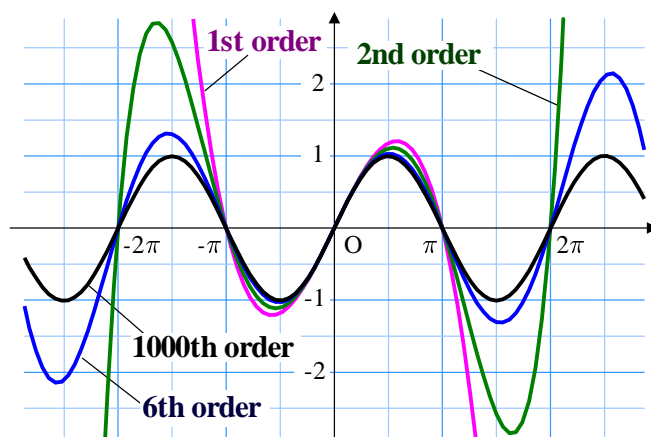


図 4.3: オイラーの乗積による正弦関数の近似

べき級数として3次の項まで展開すると、

$$\sin x = x - x^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 n^2} + \dots,$$

となる。一方、正弦関数はテイラー級数展開によって、 $\sin x = x - x^3/3! + \dots$ と記述することもできる。テイラー級数は一意的であるので、無限乗積を展開した式はテイラー級数

*ゼロ点が $n\pi$ というだけで、このような無限乗積を決定するのはかなり強引である。なぜなら、ゼロ点が $n\pi$ である関数はのこぎり波や三角波のように他にもいくらかでも仮定できるからである。後に述べるように、正弦波の無限乗積を導出するには、余接関数の部分分数展開を利用するのが定石である。

展開と一致しなければならない。その要請のもと、互いの3次の係数を等号で結ぶと、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

が得られる。つまり、自然数の自乗の逆数による級数は $\pi^2/6$ に収束するという事実が導き出された。オイラーはこのようにしてバーゼル問題を解答したのだ。

フーリエ変換による解法 バーゼル問題を解決する方法はオイラーが示した証明法だけではない。別の証明法として、フーリエ変換を利用した方法を紹介しよう。この証明のため、図 4.4 に示す周期 2π で振幅 $\pi/2$ の三角波を考えよう。この三角波 $f(x)$ は、

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + x & \left(-\frac{\pi}{2} \leq x < 0\right), \\ \frac{\pi}{2} - x & \left(0 \leq x < \frac{\pi}{2}\right), \end{cases}$$

によって定義され、それ以外の x では周期性 $f(x+2\pi) = f(x)$ によって関数の値が決められる。このような周期性をもつ関数は、フーリエ級数展開できる。フーリエ級数展開とは、

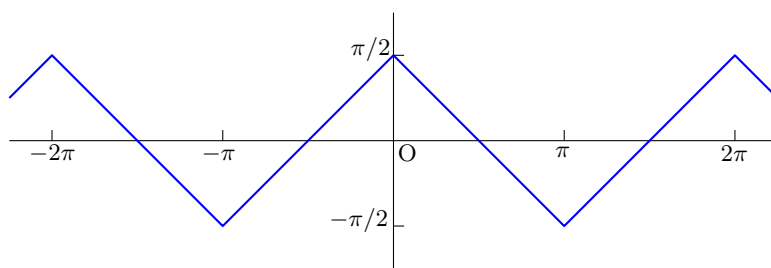


図 4.4: 周期 2π で振幅 $\pi/2$ の三角波

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx),$$

のように整数倍波成分の三角関数の重ね合わせによって関数を表現する方法である。フーリエ級数展開に現れる展開係数 A_0, A_n, B_n は、

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx,$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx,$$

によって計算できる。この計算に関するヒントとして、 $f(x)$ が奇関数であれば $A_n = 0$ 、偶関数であれば $B_n = 0$ である。関数 $f(x)$ として想定している三角波は偶関数であるので $B_n = 0$ である。具体的に展開係数 A_n を定めると、

$$f(x) = 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{\pi(2k+1)^2},$$

が得られる。この三角波が $f(0) = \pi/2$ を満たすことに注意すると、上のフーリエ変換に $x = 0$ を代入すると、

$$\frac{\pi}{2} = 4 \left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{3^2\pi} + \frac{1}{5^2\pi} + \cdots \right),$$

なる関係式が得られる。両辺に $\pi/4$ を乗じると、この関係式は、

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots,$$

のように書くことができる。この式をさらに変形すると、

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2}{8} &= \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots \right) - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \end{aligned}$$

となるので、ただちに

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

が得られる。すなわち、バーゼル問題が解けたことになる。

バーゼル問題の解は神秘的な事実を教えてくれる。つまり、自然数の自乗の逆数和が超越数、しかも、円周率に関係する値に収束するという事実である。ただし、自然数の自乗の逆数和の収束が遅いため、このバーゼル問題の解は円周率を求めるためには利用できない。しかしながら、さらに一般化して、自然数の s 乗の逆数和がどのような数値に収束するのかという興味がわいてくる。しかも、本章の後で示すように、それらの一部はベルヌーイ数を用いて記述できるのである。

4.3 ゼータ関数

前節までに、自然数の逆数による級数が発散し、自乗の逆数による級数が $\pi^2/6$ に収束することを示した。当然の流れとして、それを一般化し、自然数の s 乗の逆数による級数に関する興味がわいてくるだろう。その級数の極限值を s の依存性について定義した関数:

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots, \quad (4.5)$$

は**ゼータ関数**と呼ばれる。本節では、ゼータ関数について、そして、その一部がベルヌーイ数も用いて記述できることを説明する。

4.3.1 ゼータ関数の収束

自然数の s 乗の逆数による級数の極限值として定義されるゼータ関数 $\zeta(s)$ は、 $s = 1$ では発散することがわかっている。一方、 $s = 2$ の場合はバーゼル問題の解であるので、 $\zeta(2) = \pi^2/6$ である。ここでは、ゼータ関数が収束するための変数 s の条件を調べてみよう。

自然数の s 乗の逆数による級数を、

$$H_n^{(s)} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots + \frac{1}{n^s},$$

のように定義してみる。オレームの証明に倣って数式変形すると、

$$\begin{aligned} H_{2^{n-1}}^{(s)} &< 1 + \left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^s}\right) + \left(\frac{1}{4^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{4^s}\right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{2^{s(n-1)}} + \frac{1}{2^{s(n-1)}} + \cdots + \frac{1}{2^{s(n-1)}}\right) \\ &= 1 + \frac{2}{2^s} + \frac{4}{4^s} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{2^{s(n-1)}} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} 2^{k(1-s)} = \frac{1 - 2^{n(1-s)}}{1 - 2^{1-s}}, \end{aligned}$$

となる。数列 $H_n^{(s)}$ は、 $n \rightarrow \infty$ の極限で、 $s > 1$ のとき、

$$H_\infty^{(s)} < \frac{1}{1 - 2^{1-s}},$$

なる不等式を満足する。数列 $H_n^{(s)}$ が n の増加に対して単調増加であることを考えると、 $H_n^{(s)}$ は $s > 1$ のときに特定の値に収束する。したがって、ゼータ関数 $\zeta(s)$ は、 $s > 1$ である任意の実数に対して定義できることが示された。

4.3.2 素数による表現

ゼータ関数は素数を用いた表現もできる。オイラーはゼータ関数を素数によって表現し、その結果から素数が無限に存在することを証明した。

既に表示したように、ゼータ関数 $\zeta(s)$ は、

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

のように定義されている。ところで、すべての自然数は素因数分解によって一意的に表現することができる事実を用いて、この定義式を別の形式で書き換えることができるか考え

てみよう。素数を小さい順に並べ、 p_0, p_1, p_2, \dots のように番号付けをしたと仮定する。具体的に書くと、

$$p_0 = 2, \quad p_1 = 3, \quad p_2 = 5, \quad p_3 = 7, \quad p_4 = 11, \quad \dots$$

となるわけであるが、これらの素数を用いるとあらゆる自然数は、

$$\text{任意の自然数} = p_0^{e_0} p_1^{e_1} p_2^{e_2} p_3^{e_3} p_4^{e_4} \cdots = \prod_{k=0}^{N-1} p_k^{e_k},$$

のように表現できる。ここで、 N はあらゆる自然数に含まれる素数の総数である。後にこの総数が無限大であることが示されるのだが、ここでは N ということにしておこう。素因数分解の一意性より、すべての自然数は、各素数に与えられた指数 e_0, e_1, e_2, \dots の組み合わせで特定できる。ただし、これらの指数は 0 以上の整数である。したがって、ゼータ関数は

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{e_0, e_1, e_2, \dots} \prod_{k=0}^{N-1} \frac{1}{p_k^{s e_k}} \\ &= \prod_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{e_k=0}^{\infty} \frac{1}{p_k^{s e_k}} \right) = \prod_{k=0}^{N-1} \frac{1}{1 - p_k^{-s}}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

のように変形される。ところで、オレームの証明により $\zeta(1)$ が発散する事実があるのだが、(4.6) によると、素数の数 N が有限であれば $\zeta(1)$ が有限の値となるので事実と矛盾してしまう。よって、素数が無限に存在することがゼータ関数からも導き出された。素数が無限に存在することを (4.6) に反映させると、ゼータ関数は、

$$\zeta(s) = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1 - p_k^{-s}}, \quad (4.7)$$

のように書かれる。素数による無限乗積によってゼータ関数を表現する方法は神秘的である。例として、 $\zeta(2)$ の無限乗積表現を表 4.3 によって検証してみよう。その表には、与えられた上限値 (upper limit) を超えない素数の数 n と、無限乗積を n 段で打ち切ったときの積 P_n を記載している。この積 P_n が、上限数 (または、打ち切り段数 n) の増加とともに真値 $\pi^2/6$ ($= 1.64493407$) に近づいていることが表 4.3 から確認できる。

素数によるゼータ関数の表現に関して、 $\zeta(1)$ の対数を評価することによって素数の逆数による級数が発散することが示される。ゼータ関数の表現式 (4.7) の対数を計算すると、

$$\begin{aligned} \log \zeta(1) &= - \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p_n} + \frac{1}{2p_n^2} + \frac{1}{3p_n^3} + \cdots \right) \\ &< \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p_n} + \frac{1}{p_n^2} + \frac{1}{p_n^3} + \cdots \right), \end{aligned} \quad (4.8)$$

なる関係が得られる。ところで、素数のべき乗の逆数数の級数が、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p_n^s} = \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \cdots < \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

表 4.3: 素数表現による $\zeta(2)$ の検証

Upper limit	n	P_n
10	4	1.59505208
100	25	1.64194520
1 000	168	1.64472519
10 000	1 229	1.64491792
100 000	9 592	1.64493275
1 000 000	78 498	1.64493396
10 000 000	664 579	1.64493406

であることに注意すると, (4.8) の右辺は

$$\text{RHS of (4.8)} < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p_n} + \sum_{s=2}^{\infty} \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^s} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p_n} + \sum_{s=2}^{\infty} (\zeta(s) - 1), \quad (4.9)$$

のように書き換えられる。前節でオレームの証明に倣って導いた関係式より,

$$\zeta(s) - 1 < \frac{1}{1 - 2^{1-s}} - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k(s-1)}} = \frac{1}{2^{s-1} - 1},$$

なる不等式が成立するのだが, ここで $s \geq 2$ であることに注意すると,

$$\zeta(s) - 1 < \frac{1}{2^{s-1} - 1} < \frac{1}{2^{s-1} - 2^{s-2}} = \frac{1}{2^{s-2}},$$

のように不等式を変形することができる。この不等式を適用すると (4.9) の右辺は,

$$\begin{aligned} \text{RHS of (4.9)} &< \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p_n} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^{s-2}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p_n} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^s} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p_n} + 2, \end{aligned}$$

のようになる。この結果をまとめると, $\zeta(1)$ の対数は,

$$\log \zeta(1) < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p_n} + 2, \quad (4.10)$$

なる不等式を満足する。しかしながら, オレームの証明したように $\zeta(1)$ が発散するので, それに矛盾しないためには右辺の第 1 項, すなわち, 素数の逆数による級数が発散しなければならぬ。したがって, 素数の逆数による級数が発散するという事実が証明された。

ここで, 表 4.4 を用いて不等式 (4.10) を検証しておこう。その表には, 与えられた上限数 (upper limit N) を超えない素数の数 n , そのような素数の最大値 p_{n-1} , 素数逆数の級数 S_n と, 調和級数の対数 $\log H_N$ を記載している。不等式 (4.10) の導出には, かなり粗い評価をしているため S_n と H_N の差は 2 よりもかなり小さな値ではあるが, 確かに不等式が成り立っていることが確認できる。

表 4.4: 素数逆数の級数と調和級数の対数

Upper limit N	n	p_{n-1}	S_n	$\log H_N$
10	4	7	1.1761905	1.07465021
100	25	97	1.8028172	1.64622789
1 000	168	997	2.1980801	2.01296392
10 000	1 229	9 973	2.4830600	2.28111689
100 000	9 592	99 991	2.7052722	2.49239075
1 000 000	78 498	999 983	2.8873281	2.66672299
10 000 000	664 579	9 999 991	3.0414494	2.81512792

4.3.3 偶数ゼータ関数

ゼータ関数の変数が偶数である場合の値、いわゆる偶数ゼータ関数はベルヌーイ数と関係があることが知られている。既にバーゼル問題を紹介し、 $\zeta(2) = \pi^2/6$ であることを示した。ゼータ関数の変数 s が 4 以上の偶数の場合、 $\zeta(s)$ はベルヌーイ数を用いて厳密な値で記述することができる。

ゼータ関数とベルヌーイ数の関係を示すため、まず、余接関数 $\cot z$ の部分分数展開からはじめよう。余接関数は既に原点中心のローラン展開を示したように、 $z = 0$ を 1 位の極とし、その留数は 1 である。また、その周期性を考えると、余接関数は $z = \pi n$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) を 1 位の極とし、その留数もやはり 1 である。ただ、付録に記載した方法で部分分数展開するには、 $z = 0$ が極であることが邪魔である。その代わりに、 $\cot z - 1/z$ を考えよう。このような関数は原点で正則であり、 $z_n = \pi n$ ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$) を 1 位の極にもつ有理型関数であるので、付録に記載する部分分数展開を利用できる。

極 $z_{\pm 1}$ から $z_{\pm n}$ を囲む閉曲線 C_n として、 $R = \pi(n + 1/2)$ を用いて、複素平面状の 4 点: $R + iR, -R + iR, -R - iR, R - iR$ を頂点とする正方形を考える。設定した閉曲線 C_n の上での $|f(z)|$ を評価しよう。ただし、

$$|f(z)| = \left| \cot z - \frac{1}{z} \right| \leq \left| \cot z \right| + \left| \frac{1}{z} \right|,$$

なる関係に注意し、 $R \rightarrow \infty$ とすることを考えると、閉曲線 C_n の上では $|f(z)| \simeq |\cot z|$ とみなすことができる。さて、ここで z を実部と虚部に分け $z \equiv x + iy$ とすると、

$$\cot z = \frac{\cos x \cosh y - i \sin x \sinh y}{\sin x \cosh y + i \cos x \sinh y},$$

となる。閉曲線 C_n のうち、実軸に平行な経路 $z = x + iR$ では、

$$|\cot z| \leq \frac{(\cos x - i \sin x) \coth R}{(\sin x + i \cos x) \sinh R}, = \coth R = 1 \quad (\text{as } R \rightarrow \infty)$$

となる。一方、虚軸に平行な経路 $z = R + iy$ では、 $\cos R = \cos \pi(n + 1/2) = 0$ であることに注意すると、

$$|\cot z| \leq \tanh y \leq 1,$$

となる。よって、閉曲線 C_n の上で $|f(z)| = O(1) = o(R)$ である。付録に示した部分分数展開を適用すると、

$$\cot z - \frac{1}{z} = \sum'_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{z - \pi n} + \frac{1}{\pi n} \right),$$

となる。ここで、 Σ' は $n = 0$ を除外した総和を与える。この部分分数展開は、添え字 n が正と負である対をまとめて、

$$\cot z = \frac{1}{z} + 2z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - \pi^2 n^2}, \quad (4.11)$$

のように書くこともできる。これが余接関数の部分分数展開である。この部分分数項をさらに展開すると、

$$\begin{aligned} \cot z &= \frac{1}{z} - 2z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \pi^2} \frac{1}{1 - z^2/\pi^2 n^2} \\ &= \frac{1}{z} - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi^{2k} n^{2k}} z^{2k-1}, \end{aligned}$$

となる。既に導出したように、余接関数が、

$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k} B_{2k}}{(2k)!} z^{2k-1},$$

であることを思い出し、互いの z^{2k-1} の係数を等号で結ぶと、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{(-1)^{k-1} 2^{2k-1} \pi^{2k} B_{2k}}{(2k)!}, \quad (4.12)$$

なる関係を得る。つまり、この関係式は、

$$\zeta(2s) = \frac{(-1)^{s-1} 2^{2s-1} \pi^{2s} B_{2s}}{(2s)!}, \quad (4.13)$$

と書くこともできる。ただし、 s は任意の自然数である。変数 s が偶数となるゼータ関数の例をいくつか、得られた公式によって計算すると、

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}, \quad \zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450}, \quad \dots$$

となる。確かに、 $\zeta(2)$ は、オイラーが発見したバーゼル問題の解と同一であることがわかる。

オイラー数に対しても同様の考察をしてみよう。そのために正割関数の部分分数展開の公式:

$$\sec x = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)\pi}{x^2 - (2n+1)^2 \pi^2 / 4}, \quad (4.14)$$

に注目する。なお、この公式の証明も省略する。二項定理を用いて部分分数項を展開すると、この公式は

$$\sec x = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^{k+1} x^{2k}}{\pi^{2k+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2k+1}}, \quad (4.15)$$

なる形に書き換えることができる。この結果に対して、オイラー数の定義式と比較すると、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2n+1)^{2k+1}} = \frac{(-1)^k \pi^{2k+1} E_{2k}}{2^{2k+2} (2k)!}, \quad (4.16)$$

なる関係式が得られる。ここで、(4.16) に対する (4.12) の比を計算すると、

$$\pi \simeq 2(2^{2n} - 4^{2n}) \frac{B_{2n}}{E_{2n}}, \quad (4.17)$$

なる近似式を得る。ただし、この近似式を得るにあたって、

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1)^{-(2k+1)}}{\sum_{n=0}^{\infty} n^{-2k}} \simeq 1 - \frac{1}{2^{2n}},$$

なる近似を適用した。近似式 (4.17) はベルヌーイ数の代わりにタンジェント数を用いると、

$$\pi \simeq \frac{(-1)^n 4n T_{2n-1}}{E_{2n}}, \quad (4.18)$$

のように簡単な式に変形できる。この式の右辺を π_n なる記号で書き、この近似式を検証すると下の表のようになる。収束はそれほど速くないが、確かに π_n が円周率 π に収束していることが確認できる。

Break: 電卓で円周率を計算しよう

偶数ゼータ関数を利用すると、電卓で円周率を計算することができる。計算に使う電卓は、四則演算と平方根が計算できる電卓で十分である。電卓で計算できる公式として、 $\zeta(8) = \pi^8/9450$ を利用しよう。また、ゼータ関数の値として $\zeta(8) \simeq 1 + 1/2^8$ のような大胆な近似を適用する。すると、

$$\frac{257}{256} \simeq \frac{\pi^8}{9450}$$

なる近似式が成立する。この近似式を π について解くように電卓を操作するなら、

$$\boxed{2} \boxed{5} \boxed{7} \boxed{\div} \boxed{2} \boxed{5} \boxed{6} \boxed{\times} \boxed{9} \boxed{4} \boxed{5} \boxed{0} \boxed{=} \boxed{\sqrt{\quad}} \boxed{\sqrt{\quad}} \boxed{\sqrt{\quad}}$$

のようにキー入力すればよい。この結果、3.1415256 なる結果が表示される。この演算結果は小数点第4位まで正しい。

表 4.5: タンジェント数とオイラー数の関係

n	T_{2n-1}	E_{2n}	π_n
1	1	-1	4.00000000
2	2	5	3.20000000
3	16	-61	3.14754098
4	272	1385	3.14223867
5	7936	-50521	3.14166386
6	353792	2702765	3.14160054
7	22368256	-199360981	3.14159353
8	1903757312	19391521145	3.14159129
9	209865342976	-2404879675441	3.14159266

4.3.4 奇数ゼータ関数

既に示したように、偶数ゼータ関数 $\zeta(2k)$ はベルヌーイ数と円周率のべき乗によって厳密な値が求められる。それに対して、奇数ゼータ関数 $\zeta(2k+1)$ は、現在でも性質がほとんどわかっていない。唯一、 $\zeta(3)$ だけが 1978 年になってアペリーによって無理数であることが示された。それより以前から $\zeta(3) = 1.20205690\dots$ となることは知られてはいたが、この極限值はアペリー定数と呼ばれている。アペリー定数を含め、奇数ゼータ関数の値をいくつか書くと、

$$\begin{aligned} \zeta(3) &= 1.20205\dots, & \zeta(5) &= 1.03692\dots, & \zeta(7) &= 1.00834\dots, \\ \zeta(9) &= 1.00200\dots, & \zeta(11) &= 1.00049\dots, & \dots \end{aligned}$$

となる。当然であるが、変数が大きくなるほどゼータ関数は 1 に近づく。その特性は偶数ゼータ関数と同様である。

厳密な正体がわからないとはいえ、奇数ゼータ関数の級数表現はさまざまな形が知られている。例えば、オイラーは $\zeta(3)$ を偶数ゼータ関数 $\zeta(2k)$ による級数で記述できることを発見していた。オイラーは、

$$\zeta(3) = \frac{2\pi^2}{7} \log 2 + \frac{16}{7} \int_0^{\pi/2} x \log(\sin x) dx, \quad (4.19)$$

なる関係式を見つけ、それを足掛かりに、

$$\zeta(3) = \frac{\pi^2}{7} \left[1 - 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(2k)}{(2k+1)(2k+2)2^{2k}} \right], \quad (4.20)$$

なる級数を示した。既に示したように、偶数ゼータ関数はベルヌーイ数と円周率のべき乗によって厳密に記述できるので、偶数ゼータ関数による級数での記述は単なる関係式でなく、具体的な値を計算するための公式である。

これらの関係式を導出するにあたり、 $\log(\sin x)$ が重要な役割を果たす。対数関数はテイラー級数で表現できるし、正弦関数もテイラー級数で表現できる。直接的にテイラー級数で表現するのは難しいだろう。関数 $\log(\sin x)$ は 2 種類の表現法:

$$\log(\sin x) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{k} - \log 2, \quad (4.21a)$$

$$\log(\sin x) = \log x - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(2k)}{\pi^{2k} k} x^{2k}, \quad (4.21b)$$

で記述できる。このうち、(4.21a) もオイラーの式と呼ばれるそうなので、オイラーの業績には驚かされる。正弦関数が $\sin x = e^{ix}(1 - e^{-2ix})/2i$ であることに注意して、正弦関数の対数を計算すると、

$$\begin{aligned} \log(\sin x) &= ix + \log(1 - e^{-2ix}) - \log 2 - \frac{i\pi}{2} \\ &= ix - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-2ikx}}{k} - \log 2 - \frac{i\pi}{2}, \end{aligned}$$

が得られる。第 2 行目の数式変形には対数関数のテイラー展開を利用した。対数関数のテイラー級数は、収束半径が 1 であるので、この級数は非常にきわどい条件の級数展開である。一方、 $\sin x = -e^{-ix}(1 - e^{2ix})/2i$ と書けることに注意すると、

$$\log(\sin x) = -ix - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-2ikx}}{k} - \log 2 + \frac{i\pi}{2},$$

が成立するはずだ。得られた二つの $\log(\sin x)$ の表現式の算術平均をとると (4.21a) が導出されるのだ。実は、もう少し簡単に (4.21a) が得られる。変数 x が実数であれば $\log(\sin x)$ も実数になるので、 x を実数と仮定して、中間的に得られた数式の実部を取り出せば (4.21a) が得られるはずだ。

続いて、 $\log(\sin x)$ のもう一つの表現である (4.21b) を導出しよう。この公式を得るには、オイラーが導出した正弦関数の無限乗積による表現:

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right),$$

に注目する。この無限乗積の表現のため、正弦関数の対数は、

$$\begin{aligned} \log(\sin x) &= \log x + \sum_{n=1}^{\infty} \log \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right) \\ &= \log x - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{\pi^{2k} n^{2k} k} = \log x - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(2k)}{\pi^{2k} k} x^{2k}, \end{aligned} \quad (4.22)$$

のようになる。すなわち、(4.21b) が導出できたわけだ。第 2 行目への数式変形には、対数関数のテイラー級数を利用した。

公式 (4.19) を得るための準備が整った。関係式 (4.21a) に x を乗じて、区間 $[0, \pi/2]$ で積分すると、 $\zeta(3)$ を含む数式が得られる。積分を実行すると、

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} x \log(\sin x) dx &= - \int_0^{\pi/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x \cos 2kx}{k} - x \log 2 \right) dx \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{x \sin 2kx}{2k^2} + \frac{\cos 2kx}{4k^2} - \frac{x^2}{2} \log 2 \right]_0^{\pi/2} \\ &= -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \cdots \right) - \frac{\pi^2}{8} \log 2 = -\frac{7}{16} \zeta(3) - \frac{\pi^2}{8} \log 2, \end{aligned}$$

が得られる。第 2 行目への数式変形について、 $x \cos 2kx$ は部分積分によって積分を実行できる。得られた結果を見ると、 $\zeta(3)$ が含まれている。この数式を $\zeta(3)$ について解くと、(4.19) が得られる。ゼータ関数 $\zeta(3)$ が、 $x \log(\sin x)$ の積分を含むことが予想外かもしれない。しかも、この数式から $\zeta(3)$ が計算できると思いきいかもしいが、(4.21b) を利用すればよい。計算を実行すると、

$$\begin{aligned} \zeta(3) &= \frac{2\pi^2}{7} \log 2 + \frac{16}{7} \int_0^{\pi/2} \left(x \log x - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(2k)}{\pi^{2k} k} x^{2k+1} \right) dx \\ &= \frac{2\pi^2}{7} + \frac{16}{7} \left[\frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(2k)}{\pi^{2k} k (2k+2)} x^{2k+2} \right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{2\pi^2}{7} \left(\log \pi - \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(2k)}{k(k+1) 2^{2k}} \right), \end{aligned} \quad (4.23)$$

のように、偶数ゼータ関数の級数が導出される。最終的な級数 (4.20) に似ているが、(4.23) は $\log \pi$ が余分である。オイラーは、中間地点として (4.23) も導出していたのだろう。

改めて (4.21b) に注目すると、右辺が $\cos 2kx/k$ の無限和になっている。つまり、(4.21b) を 2 回だけ積分すれば $\zeta(3)$ が現れるのではないか。そのような動機づけのもと、(4.21b) の両辺を区間 $(0, x]$ で定積分を 2 回実行してみる。形式的に書くと、

$$\int_0^x \int_0^x \log(\sin x) dx^2 = - \int_0^x \int_0^x \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{k} + \log 2 \right) dx^2, \quad (4.24)$$

が成り立つはずである。それでは、左辺と右辺を個別に計算してみよう。まず、(4.21b) の関係に注目すれば、左辺の積分は、

$$\begin{aligned} \text{LHS of (4.24)} &= \int_0^x \int_0^x \left(\log x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(2k)}{\pi^{2k} k} x^{2k} \right) dx^2 \\ &= \int_0^x \left(x (\log x - 1) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(2k)}{\pi^{2k} k (2k+1)} x^{2k+1} \right) dx \\ &= \frac{x^2}{2} \log x - \frac{3}{4} x^2 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(2k)}{\pi^{2k} k (2k+1)(2k+2)} x^{2k+2}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

のように実行できる。一方、右辺の積分は、

$$\begin{aligned}
 \text{RHS of (4.24)} &= \int_0^x \int_0^x \left(-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{k} - \log 2 \right) dx^2 \\
 &= \int_0^x \left(-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2kx}{2k^2} - x \log 2 \right) dx \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx - 1}{4k^3} - \frac{x^2}{2} \log 2, \tag{4.26}
 \end{aligned}$$

のように計算される。当然、これらの積分は等しいはずなので等号で結ぶと、

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx - 1}{4k^3} = \frac{x^2}{2} \log 2x - \frac{3}{4}x^2 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(2k)}{\pi^{2k} k (2k+1)(2k+2)} x^{2k+2}, \tag{4.27}$$

なる関係が得られる。面白いことに、(4.27)の左辺に $x = \pi/2$ を代入すると、 $\zeta(3)$ が現れる。具体的に計算してみると、

$$\text{LHS of (4.27)} = -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \dots \right) = -\frac{7}{16} \zeta(3),$$

となる。この $x = \pi/2$ を (4.27) の右辺にも代入すると、

$$\zeta(3) = \frac{2\pi^2}{7} \left(-\log \pi + \frac{3}{2} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(2k)}{2k(2k+1)(2k+2)2^{2k}} \right), \tag{4.28}$$

が得られる。得られた数式は、冪級数ゼータ関数による級数であるが、(4.23)とは異なる数式である。異なるとはいえ、(4.28)は(4.23)と類似している。これら二つの公式の算術平均を計算すると、 $\log \pi$ が消去できて、(4.20)が得られるのだ。

本章で既に説明したように、偶数ゼータ関数はベルヌーイ数を用いた厳密な関係式がわかっているのだから、導出した級数を適用すれば $\zeta(3)$ を計算することができる。導出過程で得られた中間的な結果 (4.28) と最終的にオイラーが導出した級数 (4.20) は、表 4.6 に示すように $\zeta(3)$ に収束する。この表では、誤りのある桁を単色文字で表示している。表によると、中間的な結果 (4.28) の方が収束が速そうに見える。級数 (4.20) がシンプルに記述されているので、多少、収束速度が犠牲になっているのだ。正確には、総和記号の中の分母が、(4.20) で k の 2 次式であることに對し、(4.28) では 3 次式になっていることが理由である。しかし、 k が大きくなるとその効果は弱まり、 2^{2k} による効果が顕著になる。したがって、 k の増加に対する有効桁の伸び率は、これら二つの級数の間に違いはほとんどない。結局、導出した $\zeta(3)$ は偶数ゼータ関数のような厳密値でなく、級数表現であるが、表 4.6 が実証するように、ゼータ関数の定義式通りに淡々と計算するよりも収束が速いので、得られた級数表現の価値は大きい。

表 4.6: アペリー一定数 $\zeta(3)$ への級数の収束

Order k	Formula (4.28)	Formula (4.20)
0	1.001821566341794	1.409943485869908
2	1.201451966499043	1.203954691575257
4	1.202047041025842	1.202108023015359
6	1.202056655367215	1.202058690102658
8	1.202056895429472	1.202056974512678
10	1.202056902884328	1.202056906254791
12	1.202056903148872	1.202056903301708
14	1.202056903159149	1.202056903166395
16	1.202056903159575	1.202056903159930
18	1.202056903159593	1.202056903159612

級数 (4.20) の導出で, (4.23) と (4.28) の算術平均を使ったのとは逆に, これら二つの級数の差をとると $\zeta(3)$ が消去される。その副産物として,

$$\log \pi = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(2k)}{2k(2k+1)2^{2k}},$$

なる級数が得られる。つまり, 円周率の対数は偶数ゼータ関数の級数で表現できるのだ。

面白いことに, $\log(\sin x)$ の級数表現 (4.27) は, すべての奇数ゼータ関数の級数表現を得るための源流である。例えば, (4.27) をさらに 2 回積分し, $x = \pi/2$ を代入すれば $\zeta(5)$ が現れる。結果だけを書くと,

$$\zeta(5) = \frac{2}{31} \left[\frac{\pi^4}{3} \left(\log \pi - \frac{25}{12} \right) + 4\pi^2 \zeta(3) - 16 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi^4 \zeta(2k)}{2k(2k+1)(2k+2)(2k+3)(2k+4)2^{2k}} \right],$$

となる。このように, (4.21b) を 2 回積分するたびに, 順次, 奇数ゼータ関数の級数表現が得られるのだ。

4.3.5 奇数ゼータ類似の級数

偶数ゼータ関数 $\zeta(2k)$ が, 必ず, π^{2k} の有理数倍となることがわかっている一方で, 奇数ゼータ関数は性質がほとんどわかっていない。しかし, 奇数ゼータ関数 $\zeta(2k+1)$ に類似した級数が π^{2k+1} の有理数倍になる例がいくつかある。例えば,

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}, \quad (4.29a)$$

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \cdots = \frac{\pi^3}{32}, \quad (4.29b)$$

$$1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \cdots = \frac{5\pi^5}{1536}, \quad (4.29c)$$

が成立するのである。これらの級数は、ゼータ関数でなく、奇数ゼータ関数の値を与えることもないのだが、興味深いので導出を試みよう。

第1の例(4.29a)はライプニッツ級数と呼ばれる級数であり、逆正接関数(arctangent)のマクローリン級数から、この関係式を得ることができる。しかし、本節では他の二つの例への説明のため、フーリエ級数を用いて関係式を導出しよう。フーリエ級数:

$$f_1(x) = -\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}, \quad (4.30)$$

を考えよう。この関数 $f_1(x)$ は周期 2π の関数である。この関数は、

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & (-\pi \leq x < 0), \\ -1 & (0 \leq x < \pi), \end{cases} \quad (4.31)$$

なる矩形波に収束する。なお、この関数は周期性をもつため、 $f(x+2\pi) = f(x)$ なる関係を満たす。これらの数式表現に対し、 $x = \pi/2$ を代入すると、

$$\text{Eq. (4.30): } f_1(\pi/2) = -\frac{4}{\pi} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots \right),$$

$$\text{Eq. (4.31): } f_1(\pi/2) = -1,$$

が得られる。これらの2つの式は同一関数であるので、等号で結ぶことができる。その結果、(4.29a)が導出される。◻

第2の例を考察するには、(4.30)と(4.31)を積分すればよい。まず、1回だけ積分すると、

$$f_2(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}, \quad (4.32a)$$

$$f_2(x) = \begin{cases} x + \frac{\pi}{2} & (-\pi \leq x < 0), \\ -x + \frac{\pi}{2} & (0 \leq x < \pi), \end{cases} \quad (4.32b)$$

となる。なお、積分定数は互いの数式が等しくなるように選んでいる。この積分結果はバーゼル問題の解法として、図4.4に示した三角波である。この関数に $x = 0$ を代入するとバーゼル問題のヒントとなる関係式: $1 + 1/3^2 + 1/5^2 + \cdots = \pi^2/8$ が得られる。数式(4.32a)と(4.32b)をもう一度積分すると、

$$f_3(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^3}, \quad (4.33a)$$

$$f_3(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + \frac{\pi}{2}x & (-\pi \leq x < 0), \\ -\frac{x^2}{2} + \frac{\pi}{2}x & (0 \leq x < \pi), \end{cases} \quad (4.33b)$$

が得られる。ここでも、互いの積分結果が等しくなるように積分定数を選んでいる。これらの積分結果に、 $x = \pi/2$ を代入すると、

$$\text{Eq. (4.33a): } f_3(\pi/2) = \frac{4}{\pi} \left(1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \dots \right),$$

$$\text{Eq. (4.33b): } f_3(\pi/2) = -\frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{8},$$

が得られる。これらの結果を等号で結ぶと (4.29b) が導出される。◻

第3の関係式を導出するには、同様に、(4.33a) と (4.33b) を積分すればよい。その積分の結果を書くと、

$$f_4(x) = -\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^4}, \quad (4.34a)$$

$$f_4(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{6} + \frac{\pi}{4}x^2 + \frac{\pi^3}{24} & (-\pi \leq x < 0), \\ -\frac{x^3}{6} + \frac{\pi}{4}x^2 + \frac{\pi^3}{24} & (0 \leq x < \pi), \end{cases} \quad (4.34b)$$

が得られる。ここでも、互いの積分結果が等しくなるように積分定数[†]を選んでいる。さらに、(4.35a) と (4.35b) を積分すると、

$$f_5(x) = -\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^5}, \quad (4.35a)$$

$$f_5(x) = \begin{cases} \frac{x^4}{24} + \frac{\pi}{12}x^3 + \frac{\pi^3}{24}x & (-\pi \leq x < 0), \\ -\frac{x^4}{24} + \frac{\pi}{12}x^3 + \frac{\pi^3}{24}x & (0 \leq x < \pi), \end{cases} \quad (4.35b)$$

が得られる。やはり、積分定数は互いの積分結果が等しくなるように選んでいる。これらの積分結果に $x = \pi/2$ を代入すると、

$$\text{Eq. (4.35a): } f_5(\pi/2) = -\frac{4}{\pi} \left(1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \dots \right),$$

$$\text{Eq. (4.35b): } f_5(\pi/2) = -\frac{\pi^4}{24 \cdot 16} + \frac{\pi^4}{12 \cdot 8} - \frac{\pi^4}{24 \cdot 2} = -\frac{5\pi^5}{384},$$

が得られる。これらの結果を等号で結べば (4.29c) が導出される。◻

[†]この積分定数を得るには、 $\zeta(4) = \pi^4/90$ であることを利用する。

本項で取り扱った級数を一般化すると、 $2k + 1$ 次の調和級数の奇数項からつくった交代級数となる。その交代級数は、

$$1 - \frac{1}{3^{2k+1}} + \frac{1}{5^{2k+1}} - \frac{1}{7^{2k+1}} + \cdots = \frac{(-1)^k \pi^{2k+1}}{2^{2k+2} (2k)!} E_{2k}, \quad (4.36)$$

なる形で記述することができる。ここで、 E_{2k} はオイラー数である。既に、本項で5次までの交代級数についての公式を導出した。その手法を応用すれば $2k + 1$ 次の交代級数についての公式を導出できる。しかし、導出過程は第5章で取り扱う周期オイラー多項式を利用するのが便利である。したがって、公式 (4.36) は第5章で導出する。

4.4 母関数

整数変数によるゼータ関数、いわゆる整数ゼータ関数 $\zeta(k)$ を数列と考えると、ゼータ関数の母関数を定義することができる。母関数を導くことによって、ゼータ関数の様々な性質が見えてくる。特に、ゼータ関数とオイラーの定数 γ との様々な関係式が導かれる。

4.4.1 ベルヌーイ数との関係

既に明らかにしたように、偶数ゼータ関数はベルヌーイ数と簡単な関係で結ばれる。ベルヌーイ数の母関数は既に明らかになっているので、そこから始めると偶数ゼータ関数を展開係数とする級数を導出することができる。

偶数ゼータ関数の母関数を得るには、ベルヌーイ数の指数型母関数よりも、双曲線余接関数 ($\coth x$) のローラン展開から開始するのがよい。そのローラン展開は、

$$\coth x - \frac{1}{x} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k} B_{2k}}{(2k)!} x^{2k-1},$$

なる形で表現できる。既に示したように、偶数ゼータ関数とベルヌーイ数が、

$$\zeta(2k) = \frac{(-1)^{k-1} 2^{2k-1} \pi^{2k} B_{2k}}{(2k)!},$$

なる関係を満たすので、余接関数のローラン展開は、

$$x \coth x - 1 = 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \zeta(2k) \left(\frac{x}{\pi}\right)^{2k},$$

なる形に書き換えられる。ここで、 $x \mapsto \pi x$ のように置き換え、両辺を $1/2$ 倍すると、

$$\frac{\pi x}{2} \coth \pi x - \frac{1}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \zeta(2k) x^{2k}, \quad (4.37)$$

が得られる。これが偶数ゼータ関数の母関数である。この数式に対して、さらに $x \mapsto ix$ なる置き換えを適用すると、

$$\frac{1}{2} - \frac{\pi x}{2} \cot \pi x = \sum_{k=1}^{\infty} \zeta(2k) x^{2k}, \quad (4.38)$$

なる数式が得られる。むしろ、母関数としては (4.38) の方が簡潔な形で表現できている。双曲線余接関数、もしくは、余接関数を計算するには、ベルヌーイ数を用いた表記で十分であるが、数式としてゼータ関数を用いると簡潔に表現できていることが興味深い。

4.4.2 整数ゼータ関数の母関数

本項では、奇数ゼータを含めて展開係数とした母関数を探ってみよう。先ほどの例ではベルヌーイ数を手掛かりとしたが、ここでは異なるアプローチをとる。

関数 $1/(k-x)$ を考えてみよう。この単純な関数がゼータ関数の母関数につながるのだ。この関数は数式変形すると、

$$\frac{1}{k-x} = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{1-x/k} = \frac{1}{k} + \frac{x}{k^2} + \frac{x^2}{k^3} + \frac{x^3}{k^4} + \dots$$

のように書き換えられる。この数式変形では二項定理を利用した。両辺から $1/x$ を減じた後、両辺に x を乗じると、

$$\frac{x^2}{k(k-x)} = \frac{x^2}{k^2} + \frac{x^3}{k^3} + \frac{x^4}{k^4} \dots$$

が得られる。この数式の k について無限和をとると、

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^2}{k(k-x)} = \zeta(2) x^2 + \zeta(3) x^3 + \zeta(4) x^4 + \dots = \sum_{k=2}^{\infty} \zeta(k) x^k, \quad (4.39)$$

なる級数が得られる。この関数が整数ゼータ関数の母関数だ。いうまでもないが、 $\zeta(1)$ を展開係数に含めていないのは、 $\zeta(1)$ が有限の数値ではないからだ。得られた母関数から、ただちに、

$$\log 2 = \frac{\zeta(2)}{2^2} + \frac{\zeta(3)}{2^3} + \frac{\zeta(4)}{2^4} \dots = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\zeta(k)}{2^k}, \quad (4.40a)$$

$$1 - \log 2 = \frac{\zeta(2)}{2^2} - \frac{\zeta(3)}{2^3} + \frac{\zeta(4)}{2^4} - \dots = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k \zeta(k)}{2^k}, \quad (4.40b)$$

なる関係式が得られる。第1の関係式は (4.39) に $x = 1/2$ を代入すれば導出できる。第2の関係式は $x = -1/2$ を代入すれば導出できる。数値計算に有用というわけではないが、これらの級数は少なくとも、メルカトル級数よりも速く $\log 2$ に収束する。

級数 (4.41) と $x^2/(1-x)$ の差をとると、興味深い級数が得られる。差をとるにあたって、 $1/(z-x) = 1 + x + x^2 + \dots$ であることに注意すると、

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^2}{k(k-x)} - \frac{x^2}{1-x} = (\zeta(2) - 1)x^2 + (\zeta(3) - 1)x^3 + (\zeta(4) - 1)x^4 + \dots = \sum_{k=2}^{\infty} (\zeta(k) - 1)x^k, \quad (4.41)$$

なる級数が得られる。この級数は (4.39) と違い、高次の係数になるほどゼロに近づくため興味深い。この級数から、ただちに、

$$(\zeta(2) - 1) + (\zeta(3) - 1) + (\zeta(4) - 1) + \dots = \sum_{k=2}^{\infty} (\zeta(k) - 1) = 1, \quad (4.42a)$$

$$\frac{\zeta(2) - 1}{2^2} + \frac{\zeta(3) - 1}{2^3} + \frac{\zeta(4) - 1}{2^4} + \dots = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\zeta(k)}{2^k} = \log 2 - \frac{1}{2}, \quad (4.42b)$$

$$\frac{\zeta(2) - 1}{2^2} - \frac{\zeta(3) - 1}{2^3} + \frac{\zeta(4) - 1}{2^4} - \dots = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\zeta(k)}{2^k} = \frac{5}{6} - \log 2, \quad (4.42c)$$

が得られる。第1の関係式は (4.41) に $x = 1$ を代入すれば得られるのだが、そのとき、(4.41) の左辺に直接 $x = 1$ を代入すると発散するので、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x}{k-x} - \frac{x}{k} \right) - \frac{x^2}{1-x} &= \frac{x-x^2}{1-x} - x + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{x}{k-x} - \frac{x}{k} \right) \\ &= x - x + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{x}{k-x} - \frac{x}{k} \right) = \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{x}{k-x} - \frac{x}{k} \right), \end{aligned}$$

のように変形した後に $x = 1$ を代入する。第2の関係式と第3の関係式は (4.41) に、それぞれ、 $x = 1/2$ と $x = -1/2$ を代入すれば得られる。ここで得られた級数も実用的な価値は小さいが、 $\log 2$ への収束速度が改善された級数である。

4.4.3 オイラー定数との関係

前項で取り扱った級数は、ゼータ関数と $\log 2$ の関係を示していた。ゼータ関数を使えばメルカトル級数よりも速く $\log 2$ に収束する級数を表現できるといったところである。本節では、ゼータ関数とオイラー定数 γ の関係を導出する。

ゼータ関数とオイラーの定数の関係を導出するには、ガンマ関数 $\Gamma(x)$ を取り扱う。第4.5節で取り扱う内容を前借すると、ガンマ関数は整数変数に対して $\Gamma(1+k) = k!$ が成立する性質をもっている。ガンマ関数を表現方法は複数存在し、その中で、ワイエルシュトラスの無限乗積:

$$\frac{1}{\Gamma(1+x)} = e^{\gamma x} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{k} \right) e^{-x/k},$$

なる表現に注目しよう。この表現式の対数をとると、

$$\begin{aligned}\log \Gamma(1+x) &= -\gamma x - \sum_{k=1}^{\infty} \left[\log \left(1 + \frac{x}{k} \right) - \frac{x}{k} \right] \\ &= -\gamma x - \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{x^2}{2k^2} + \frac{x^3}{3k^3} - \frac{x^4}{4k^4} + \dots \right) \\ &= -\gamma x + \frac{\zeta(2)}{2} x^2 - \frac{\zeta(3)}{3} x^3 + \frac{\zeta(4)}{4} x^4 - \dots\end{aligned}$$

なる関係が得られる。この数式に $x = 1$ を代入すると、左辺は $\log \Gamma(1) = \log 1 = 0$ となるので、

$$\gamma = \frac{\zeta(2)}{2} - \frac{\zeta(3)}{3} + \frac{\zeta(4)}{4} - \dots$$

が導かれる。この公式は、第 4.1.1 項で導出した数式と同一である。ガンマ関数 $\Gamma(x)$ が整数だけでなく、変数が半奇整数のときの振る舞いもわかっている。例えば、 $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ 、 $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$ である。これらの性質に注意すると、オイラー定数 γ は、

$$\begin{aligned}\gamma &= \log \frac{4}{\pi} + 2 \left(\frac{\zeta(2)}{2 \cdot 2^2} - \frac{\zeta(3)}{3 \cdot 2^3} + \frac{\zeta(4)}{4 \cdot 2^4} - \dots \right), \\ \gamma &= \log \pi - 2 \left(\frac{\zeta(2)}{2 \cdot 2^2} + \frac{\zeta(3)}{3 \cdot 2^3} + \frac{\zeta(4)}{4 \cdot 2^4} + \dots \right),\end{aligned}$$

のように 2 種類の新たな級数でも表現できることが導かれる。これらの数式の算術平均をとると、

$$\gamma = \log 2 - 2 \left(\frac{\zeta(3)}{3 \cdot 2^3} + \frac{\zeta(5)}{5 \cdot 2^5} + \frac{\zeta(7)}{7 \cdot 2^7} + \dots \right) = \log 2 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(2k+1)}{(2k+1)2^{2k}}, \quad (4.43)$$

が得られる。第 4.1.1 項で導出した (4.4) と、本項で導出した (4.43) によるオイラー定数の計算を比較しよう。収束の速さは表 4.7 に示すように、(4.43) の方が速い。この表では、誤った桁を淡色表示している。数式 (4.4) は k が大きくなると、 k が 1 だけ増加するたびに分子が約 2 分の 1 倍されるに対し、分母はほとんど変化がなくなる。一方、(4.43) は k が 1 だけ増加するたびに、分子はほとんど変化がないが、分母が約 4 倍される。その違いが収束速度が違う要因である。

4.5 定義域の拡張

これまでの議論では、ゼータ関数 $\zeta(s)$ は $s > 1$ に対して定義された関数である。本節では、ゼータ関数の定義域を複素数全体に拡張し、その関数の性質を調べる。関数の定義域を拡張するには、関数論における解析接続という手法を用いる。まず、解析接続を説明し、ゼータ関数を解析接続するための準備した後に、ゼータ関数を解析接続する。

表 4.7: オイラー定数への近似

k	Approx by (4.4)	Approx by (4.43)
0	1.0000000000000000	0.693147180559945
2	0.610180665522689	0.580014175024020
4	0.582214306066230	0.577328495910954
6	0.578131041823785	0.577220891275946
8	0.577398217540589	0.577215924558383
10	0.577253833791069	0.577215678371375
12	0.577223887090018	0.577215665621163
14	0.577217473007474	0.577215664940810
16	0.577216068619341	0.577215664903712
18	0.577215756115245	0.577215664901655
20	0.577215685706049	0.577215664901540

4.5.1 解析接続

本節では解析接続について簡単に説明する。解析接続の知識がある読者は本節を飛ばして次節に進んでもよい。解析接続は、関数の定義域をより広い範囲に拡張するための数学的技法である。

複素数 z の関数 $f_0(z) \equiv 1 + z + z^2 + z^3 + \dots$ について考えよう。この関数は、 $|z| < 1$ の条件を満たさなければ収束しない。言い換えると、 $|z| \geq 1$ では $f(z)$ は発散するため、定義することができない。つまり、 $f(z)$ の定義域は $|z| < 1$ ということである。

次に別のべき級数 $f_{-1}(z)$ を考えよう。その第2のべき級数は、

$$f_{-1}(z) \equiv \frac{1}{2} + \frac{z+1}{4} + \frac{(z+1)^2}{8} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z+1)^k}{2^{k+1}},$$

のように定義されている。このべき級数の収束条件は $|z+1| < 2$ である。図 4.5 (a) に示すように、 $f_0(z)$ よりも第2のべき級数 $f_{-1}(z)$ のほうが収束半径が大きく、しかも、 $f_0(z)$ の収束域を包含した形になっている。これらの2つの関係を調べるため、 $f_{-1}(z)$ を数式変形すると、

$$\begin{aligned} f_{-1}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \binom{n}{k} z^k, \end{aligned}$$

が得られる。この式からではわかりにくいだが、 $f_0(z) = f_{-1}(z)$ が成立すると推測しよう。その推測が正しくなるには、

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{n^k}{2^{n+1}} = k! \tag{4.44}$$

であることが条件である。つまり、この関係式が証明できれば、推測した等式 $f_0(z) = f_{-1}(z)$ が成立するのである。なお、 n^k は n の下降階乗であり、 $n^k \equiv n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$ のように定義される。まず、 $k=0$ の場合を考えると、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = 1,$$

となり、(4.44) が成立していることがわかる。次に、任意の k で成立することを仮定したとき、 $k+1$ でも成立するかどうかを調べよう。実際に計算すると、

$$\begin{aligned} \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{n^{k+1}}{2^{n+1}} &= \sum_{n=k+1}^{\infty} \left[\frac{(n+1)n^k}{2^{n+1}} - \frac{(k+1)n^k}{2^{n+1}} \right] \\ &= 2 \sum_{n=k+2}^{\infty} \frac{n^{k+1}}{2^{n+1}} - (k+1) \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{n^k}{2^{n+1}} \\ &= 2 \left(\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{n^{k+1}}{2^{n+1}} - \frac{(k+1)!}{2^{k+2}} \right) - (k+1) \left(k! - \frac{k!}{2^{k+1}} \right) \\ &= 2 \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{n^{k+1}}{2^{n+1}} - (k+1)! \end{aligned}$$

となるので、この計算結果からただちに、

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{n^{k+1}}{2^{n+1}} = (n+1)!$$

が示される。既に、 $k=0$ で (4.44) が成立することがわかっている。さらに、ある k で成立すれば、同様に $k+1$ でも成立するので、(4.44) は $k \geq 0$ なる任意の k で成立することが帰納的に証明できた。それと同時に、 $f_0(z) = f_{-1}(z)$ が成立することも証明できたのである。しかし、ここで疑問が沸く。級数 $f_{-1}(z)$ の収束域は $|z+1| < 2$ のはずだったのに、数式変形の結果、 $|z| < 1$ を収束域とする級数に化けてしまった。その疑問については、本節の最後で考察しよう。

上に挙げた2つのべき級数 $f_0(z)$ と $f_{-1}(z)$ を比較してみよう。変数 z を実数として与えたときの級数の値を図 4.5 (b) に描く。ただし、級数 $f_0(z)$ と $f_{-1}(z)$ の識別を助けるため、級数はあえて10次近似とした。これらの級数(の10次近似)は、 $f_0(z)$ の収束域である $0 < z < 1$ でほとんど重なり合っている。グラフによると、級数 $f_0(z)$ は $z < 1$ で急激に減少し、 $f_{-1}(z)$ は $z < -3$ で急激に減少する。これは10次近似のときの振る舞いであり、無限項まで計算すると、どちらの級数も収束域の外では発散し、関数値を定義することができない。級数 $f_0(z)$ と $f_{-1}(z)$ は、上で計算したとおり、同一の数式に帰着する。ただし、同一の数式に帰着するのは双方の級数が定義可能な収束域が重なる $-1 < z < 1$ の区間であ

[‡]無限級数として計算すれば、完全に一致する。

と考えたほうがよい。また、 $f_0(z)$ よりも $f_{-1}(z)$ が広い収束域をもっているので、 $f_{-1}(z)$ は $f_0(z)$ の収束域を拡張した結果の関数であると考えられる。そのようにして、収束域の重なり部分で関数値が同一になる関数を用いて、関数の定義域を拡張することを**解析接続**という。つまり、 $f_0(z)$ と $f_{-1}(z)$ は解析接続された関数どうしなのである。

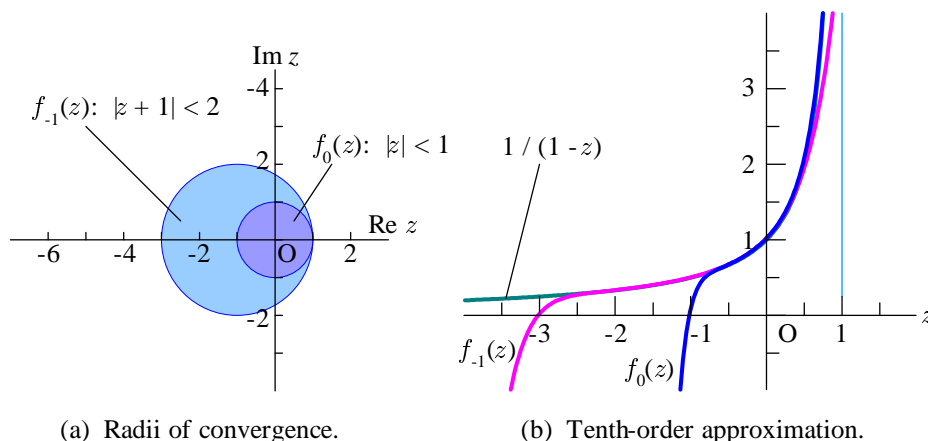


図 4.5: 解析接続された級数

関数 $f_0(z)$ の定義域は複素数全体まで拡張することができる。この例の場合、そのように拡張された関数は簡単な手順で導出できる。級数 $f_0(z)$ に z を乗じると、

$$z f_0(z) = z + z^2 + z^3 + z^4 + \cdots = f_0(z) - 1,$$

が得られる。この級数も $|z| < 1$ を収束域とするので、関数 $f_0(z)$ は $|z| < 1$ の条件において、 $f_0(z) = 1 + z f_0(z)$ の関係を満たす。この関係式を $f_0(z)$ について解くと、

$$f_0(z) = \frac{1}{1-z} \quad (|z| < 1),$$

が得られる。事実、 $1 + z + z^2 + z^3 + \cdots$ は $1/(1-z)$ のテイラー展開であり、その収束半径が $|z| < 1$ であることを考えると、この関係は当然の結果である。関数 $1/(1-z)$ は、 $z = 1$ を 1 位の極とする以外、複素平面全体で正則である。つまり、 $1/(1-z)$ は関数 $f_0(z)$ を複素数全体を定義域とするように解析接続した結果なのである。

級数 $f_{-1}(z)$ も同じ手順で複素数全体に解析接続できる。この例の場合、級数 $f_{-1}(z)$ に $z + 1$ を乗じるのだ。その結果、

$$(z + 1)f_{-1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z + 1)^{k+1}}{2^{k+1}} = 2f_{-1}(z) - 1,$$

が得られる。この方程式を $f_{-1}(z)$ について解くと、

$$f_{-1}(z) = \frac{1}{1-z} \quad (|z + 1| < 2),$$

が得られるのである。この結果は $f_0(z)$ を複素数全体に拡張した結果と同一である。二つの級数の解析接続の結果が一致するのは不思議に見えるかもしれないが、これは関数論における一致の定理が関係した性質なのである。関数論によれば、2つの関数とその正則域の一部の領域で一致することがわかっているならば、それらの関数は正則域全体で同一となることが知られている。その性質を一致の定理というのである。この場合、個別に解析接続した関数は、ともに $z \neq 1$ の複素数全体で正則であり、 $|z| < 1$ で互いに同一の値となることがわかっているので、一致の定理によって、 $z \neq 1$ の複素数全体で同一の関数となる。そのため、双方の解析接続の結果でも同一の関数 $1/(1-z)$ が得られたのである。なお、図 4.5 (b) に $1/(1-z)$ の曲線も示しておいた。級数 $f_0(z)$ と $f_{-1}(z)$ は、それぞれの定義域では、解析接続された関数とほぼ重なっている[§]。

4.5.2 ゼータ関数の積分表示

ゼータ関数を詳しく取り扱うには、ガンマ関数の知識があると便利である。ガンマ関数は $\Gamma(s)$ なる記号で書かれ、その変数が整数であるとき、 $\Gamma(n) = (n-1)!$ という性質を示す関数である。言い換えれば、整数しか対象にしなかった階乗という演算を実数全体、さらには、複素数全体に拡張した関数がガンマ関数である。ガンマ関数は、

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt, \quad (4.45)$$

のような積分によって与えられる。この積分を評価してみると、 $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ なる関係が導かれ、その結果、 $\Gamma(n) = (n-1)!$ なる性質が結論づけられる。実数変数に対するガンマ関数は図 4.6 のような振る舞いを示す。この関数はゼロ以下の整数を極とすることが特徴である。

ガンマ関数の積分表示 (4.45) は、ガンマ関数とゼータ関数の関係を見出す糸口になる。積分表示 (4.45) について、 $t = nx$ なる置き換えを適用すると、ガンマ関数の積分表示は、

$$\Gamma(s) = n^s \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-nx} dx,$$

なる数式に書き換えられる。この積分表示を、さらに、

$$\frac{1}{n^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-nx} dx,$$

のように書き換え、 n を整数と仮定し、1 から無限大まで総和をとると、

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} x^{s-1} e^{-nx} dx = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx, \quad (4.46)$$

[§]前にもコメントしたとおり、10 次近似でなく無限項まで計算していれば、定義域内では $1/(1-z)$ と完全に一致する。

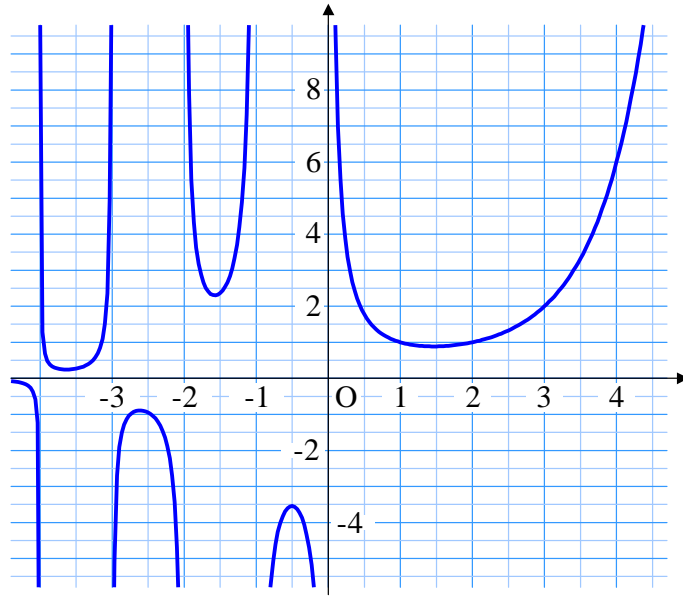


図 4.6: ガンマ関数

となる。右辺の被積分関数が $x^{s-2} \cdot x/(e^x - 1)$ のようにベルヌーイ数の指数型母関数を含むことから、ゼータ関数はベルヌーイ数と関係がありそうである。積分 (4.46) は、 $\operatorname{Re} s > 1$ の条件で収束する。その収束性を証明してみよう。その証明のために、 $g(s) \equiv \Gamma(s)\zeta(s)$ と定義する。正の実数 x と任意の複素数 s が与えられたとき、 $|x^s| = |x^{\operatorname{Re} s} e^{i \operatorname{Im} s \log x}| = x^{\operatorname{Re} s}$ であることに注意し、 $g(s)$ を評価するため、

$$g(s) = \int_0^1 \frac{u^{s-1}}{e^u - 1} du + \int_1^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx, \quad (4.47)$$

のように書いてみよう。この式の右辺の第2項はどのような s に対しても有限の値に収束する。なぜなら、 $x \geq 1$ のとき $e^x - 1 > e^x/2$ であることから、

$$\left| \int_1^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx \right| < 2 \int_1^\infty x^{\operatorname{Re} s - 1} e^{-x} dx,$$

が成立するからである。ここで、 $\operatorname{Re} s \leq 1$ であれば $x^{\operatorname{Re} s - 1} \leq 1$ であるので、

$$\left| \int_1^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx \right| < 2 \int_1^\infty e^{-x} dx = 2 \quad (\operatorname{Re} s \leq 1),$$

となる。一方、 $\operatorname{Re} s > 1$ であれば、

$$\begin{aligned} \left| \int_1^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx \right| &< 2 \int_0^\infty x^{\operatorname{Re} s - 1} e^{-x} dx \\ &\leq 2 \int_0^\infty x^{[\operatorname{Re} s] - 1} e^{-x} dx = ([\operatorname{Re} s] - 1)! \quad (\operatorname{Re} s > 1) \end{aligned}$$

となる。ここで、 $[x]$ は x 以上の整数の最小値である。よって、 s とは無関係に (4.47) の右辺の第 2 項が有限の値であることが示された。

第 1 項については、 $x \leq e^x - 1 \leq (e - 1)x$ であることに注意すると、

$$\frac{1}{e-1} \int_0^1 x^{\operatorname{Re} s - 2} dx < \int_0^1 \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx < \int_0^1 x^{\operatorname{Re} s - 2} dx,$$

なる関係が導かれる。左辺と右辺の積分を実行すると、この関係は

$$\frac{1}{(e-1)(\operatorname{Re} s - 1)} < \int_0^1 \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx < \frac{1}{\operatorname{Re} s - 1}$$

のように計算される。これより、(4.47) の第 1 項は $\operatorname{Re} s > 1$ のとき有限の値に収束することが示される。したがって、積分 $g(s)$ も $\operatorname{Re} s > 1$ のとき有限の値に収束する。

4.5.3 部分積分による解析接続

前項で示したように、ゼータ関数 $\zeta(s)$ の積分表示は $\operatorname{Re} s > 1$ のときに収束する。この収束域を広げ、ゼータ関数の定義域を拡大するために解析接続を適用しよう。タイトルに示すように、本項では部分積分を適用しながらゼータ関数を解析接続を進めていく。関数論のテキストには、この議論が非常に簡単に書かれているのだが、解析接続の準備段階としてベルヌーイ数の指数型母関数 $f(x) = x/(e^x - 1)$ の高階導関数と x べき乗の積、すなわち、 $x^s f^{(n)}(x)$ の積分の収束性を調べる必要がある。その結果を利用して、ゼータ関数の積分表示に部分積分を適用しながら解析接続を進めるのである。

準備段階 上に書いたように、解析接続の準備段階として、 $x^s f^{(n)}(x)$ を積分した場合の収束性を調べる。積分範囲は $[0, \infty)$ とするのだが、

$$\int_0^\infty x^s f^{(n)}(x) dx = \int_0^1 x^s f^{(n)}(x) dx + \int_1^\infty x^s f^{(n)}(x) dx, \quad (4.48)$$

のように、2 項に分けて書いておく。この積分が、 $n = 0$ の場合に $\operatorname{Re} s > 1$ の条件で収束することは前項で示されている。指数型母関数 $f(x)$ を x について微分した結果:

$$f'(x) = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2},$$

を用いて、 $n = 1$ における積分 (4.48) の第 2 項を評価してみよう。前項でも利用した $x \geq 1$ における不等式 $1/(e^x - 1) < 2e^{-x}$ に注意すると、

$$|f'(x)| < 4(e^{-x} + e^{-2x} + xe^{-x}), \quad (x \geq 1)$$

が成立する。これを (4.48) の第 2 項に代入すると,

$$\left| \int_1^\infty x^s f'(x) dx \right| < 4 \left(\left| \int_1^\infty x^s e^{-x} dx \right| + \left| \int_1^\infty x^s e^{-2x} dx \right| + \left| \int_1^\infty x^{s+1} e^{-x} dx \right| \right),$$

となる。前項での収束性の評価によると, この式の右辺の第 1 項から第 3 項はすべて, 任意の複素数 s に対して収束するので, この積分自体も任意の複素数 s に対して収束する。もう一方, (4.48) の第 1 項を評価するにはベルヌーイ数の指数型母関数のテイラー展開:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^k,$$

を利用するのが便利である。このテイラー展開を x について微分すると, 導関数:

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_{k+1}}{k!} x^k,$$

が得られる。ここで, ベルヌーイ数の漸近形:

$$B_{2m} = \frac{2(2m)!}{(2\pi)^{2m}}, \quad (m \rightarrow \infty),$$

に注意すると, $f(x)$ と $f'(x)$ はともに $|x| < 2\pi$ において収束することがわかる。すなわち, $0 \leq x \leq 1$ の範囲において $f'(x)$ を上記のテイラー展開で代用してもよい。よって, 積分の第 1 項は

$$\int_0^1 x^s f'(x) dx = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_{k+1}}{k!} x^{k+z} dx = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+z+1} \frac{B_{k+1}}{k!} x^{k+z+1} \right]_0^1,$$

のように書くことができる。この右辺が収束する条件は, $\operatorname{Re} z > -1$ であるので, 結局, $n = 1$ の場合に積分が収束するのは $\operatorname{Re} z > -1$ が条件である。

続いて, $n = 2, 3, \dots$ に対して (4.48) の収束性を評価したいのであるが, これ以降, 具体的に $f^{(n)}(x)$ を書き下していっても収束性の評価は困難である。その代わりに, $f(x)$ の導関数に対して成立する漸化式:

$$e^x \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) - f^{(n)}(x) = 0, \quad (n = 2, 3, \dots), \quad (4.49)$$

を利用するとよい。この漸化式は, $(e^x - 1)f(x) = x$ を微分していくことによって証明できる。まず, 第 1 回目の微分で

$$e^x (f(x) + f'(x)) - f'(x) = 1,$$

が得られ, 第 2 回目の微分で

$$e^x (f(x) + 2f'(x) + f''(x)) - f''(x) = 0,$$

が得られる。この関係式は、漸化式 (4.49) を満足する。そこで、任意の k に対して (4.49) が成立すると仮定し、その漸化式 (4.49) を微分してみる。すると、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(e^x \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) - f^{(n)}(x) \right) &= e^x \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(f^{(k)}(x) + f^{(k+1)}(x) \right) - f^{(n+1)}(x) \\ &= e^x f(x) + e^x \sum_{k=1}^n \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] f^{(k)}(x) + e^x f^{(n+1)}(x) - f^{(n+1)}(x) \\ &= e^x f(x) + e^x \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} f^{(k)}(x) + e^x f^{(n+1)}(x) - f^{(n+1)}(x) \\ &= e^x \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} f^{(k)}(x) - f^{(n+1)}(x), \end{aligned}$$

となり、 $k+1$ に対しても漸化式 (4.49) が成立する。したがって、漸化式 (4.49) の正当性が帰納的に証明された。よって、 n 階の導関数は、

$$f^{(n)}(x) = \frac{e^x}{e^x - 1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} f^{(k)}(x),$$

のように書くことができる。この結果に対して、積分 (4.48) の第 2 項を書くと、

$$\begin{aligned} \left| \int_1^\infty x^s f^{(n)}(x) dx \right| &\leq \frac{e^x}{e^x - 1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \left| \int_1^\infty x^s f^{(k)}(x) dx \right| \\ &< 2 \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \left| \int_1^\infty x^s f^{(k)}(x) dx \right|, \end{aligned}$$

のような不等式で表現できる。例えば、 $n=2$ の場合にこの不等式を展開すると、

$$\left| \int_1^\infty x^s f''(x) dx \right| < 2 \left(\left| \int_1^\infty x^s f(x) dx \right| + \left| \int_1^\infty x^s f'(x) dx \right| \right),$$

のように書かれる。既に示したように $n=0, 1$ のとき、任意の複素数 s に対して積分 (4.48) が収束することがわかっているので、その事実をこの不等号に適用すると、 $n=2$ に対しても積分 (4.48) は任意の z に対して収束することになる。この操作を繰り返していくと、任意の自然数 n について、積分 (4.48) の第 2 項は任意複素数の s に対して収束することが結論できる。

積分 (4.48) の第 1 項については、先ほどと同様にテイラー展開を使ってみよう。その場合、(4.48) の第 1 項は

$$\int_0^1 x^s f^{(n)}(x) dx = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_{k+n}}{k!} x^{k+s} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{k+s+1} \frac{B_{k+n}}{k!} x^{k+s+1} \right]_0^1,$$

のようになる。念のため、この級数の収束半径を調べてみよう。級数の収束半径は、各項の大きさの変化を調べてみればよい。各項に含まれているベルヌーイ数は第 2 項以降の奇

数項がすべてゼロであるので、 $k+n=2m$ (つまり、偶数) という条件のもとで、テイラー級数の第 k 項と第 $k+2$ 項を比べてみよう。

$$\begin{aligned} \text{第 } k \text{ 項} &= \frac{2(2m)!}{(k+s+1)(2\pi)^{2m} k!} x^{k+s+1}, \\ \text{第 } k+2 \text{ 項} &= \frac{2(2m+2)!}{(k+s+3)(2\pi)^{2m+2} (k+2)!} x^{k+s+3}. \end{aligned}$$

これらの項の比を計算すると、

$$\frac{\text{第 } k+2 \text{ 項}}{\text{第 } k \text{ 項}} = \frac{(k+s+3)(k+n+1)(k+n+2)}{(k+s+1)(k+1)(k+2)} \frac{x^2}{(2\pi)^2} \simeq \frac{x^2}{(2\pi)^2} \quad (k \gg n),$$

となるのだが、級数が収束する条件はこの比率が1より小さくなることなので、 $|x| < 2\pi$ がこの級数の収束半径である。積分 (4.48) の第1項の積分範囲 $[0, 1]$ は、この級数の収束半径の内側なので、級数展開による積分の評価が可能である。また、 $B_{2m+1} = 0$ ($m = 1, 2, \dots$) であることに注意すると、(4.48) の第1項が収束する条件は、

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} s &> -1 & (n = 0, 1, 2, 4, 6, \dots), \\ \operatorname{Re} s &> -2 & (n = 3, 5, 7, \dots), \end{aligned}$$

となる。既に評価したように (4.48) の第2項は s に関わらず収束するので、この条件は積分 (4.48) 全体が収束する条件である。

部分積分 準備が整ったのでゼータ関数の積分表示に部分積分を適用しながら解析接続をしていこう。前節で、ゼータ関数が

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx, \quad (4.50)$$

なる積分表示されることを学んだ。この積分表示に対して、ベルヌーイ数の指数型母関数を $f(x)$ と書き、 $g(s) \equiv \Gamma(s)\zeta(s)$ を評価してみよう。その積分 $g(z)$ は、

$$g(s) = \int_0^\infty x^{s-2} f(x) dx, \quad (4.51)$$

であるが、準備段階で得た知識により、 $g(s)$ は $\operatorname{Re} s > 1$ のときに収束する。この積分に部分積分を適用すると、

$$g(s) = \left[\frac{x^{s-1}}{s-1} f(x) \right]_0^\infty - \frac{1}{s-1} \int_0^\infty x^{s-1} f'(x) dx, \quad (4.52)$$

が得られる。ここで、 $x \rightarrow \infty$ の極限において $f(x) \simeq xe^{-x}$ であり、 $f(0) = B_0$ であることに注意すれば、この結果の第1項は $\operatorname{Re} z > 1$ のときにゼロとなり、 $\operatorname{Re} s \leq 1$ の条件で発散することがわかる。一方、第2項の積分は準備段階での知識により、 $\operatorname{Re} s > 0$ の条件で収

束する。つまり、積分 (4.51) の収束条件が $\operatorname{Re} s > 1$ であったのは、(4.52) の第 1 項があるためである。そこで、第 1 項を省略すれば $g(s)$ の収束条件を $\operatorname{Re} s > 0$ まで拡張することができる。第 1 項を省略したとしても、 $\operatorname{Re} s > 1$ の条件では、もともと、第 1 項がゼロであったので (4.52) は (4.51) と等しいはずである。言い換えると、(4.52) の第 1 項を省略することによって、 $\operatorname{Re} s > 1$ であった $g(s)$ の定義域が $\operatorname{Re} s > 0$ となるように解析接続されたことを意味する。ただし、第 2 項は分母に $s - 1$ が含まれるため、 $g(s)$ は $s = 1$ を 1 位の極とすることがわかる。そのときの留数は、

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{s=1} g(s) &= \lim_{s \rightarrow 1} (s - 1) g(s) \\ &= - \int_0^{\infty} f'(x) dx = f(0) = B_0, \end{aligned}$$

のように計算できる。被積分関数がベルヌーイ数の指数型母関数であるので、 $g(s)$ の留数にベルヌーイ数が姿を見せている。

続いて、(4.52) に部分積分を適用すると、さらに $g(s)$ の定義式が広がることが予想できるだろう。実際に適用してみると、

$$g(s) = - \left[\frac{x^{s-1}}{s(s-1)} f'(x) \right]_0^{\infty} + \frac{1}{s(s-1)} \int_0^{\infty} x^s f''(x) dx, \quad (4.53)$$

が得られる。この場合についても、 $x \rightarrow \infty$ の極限において $f'(x) \simeq -xe^{-x}$ であり、 $f'(0) = B_1$ であるので、(4.53) の第 1 項は $\operatorname{Re} z > 0$ の条件でゼロとなる。一方、(4.53) の第 2 項に含まれる積分は、準備段階での知識より、 $\operatorname{Re} s > -1$ の条件で収束する。前段落と同様に、(4.53) の第 1 項を省略した量を $\operatorname{Re} s > -1$ への解析接続としよう。すると、第 2 項の積分が $\operatorname{Re} s > -1$ で正則であるので、 $g(s)$ は $s = 1, 0$ を 1 位の極とする関数である。ここで、 $s = 0$ における留数を計算すると、

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{s=0} g(s) &= \lim_{s \rightarrow 0} s g(s) \\ &= - \int_0^{\infty} f''(x) dx = -f'(0) = -B_1, \end{aligned}$$

となる。準備段階で得た知識に注意して同様に部分積分を適用していくと、積分 $g(s)$ の定義域を拡大することができる。部分積分を n 回繰り返した結果を書くと、

$$g(s) = (-1)^n \prod_{k=1}^n \frac{1}{s+k-2} \int_0^{\infty} x^{s+n-2} f^{(n)}(x) dx \quad (\operatorname{Re} s > 1-n), \quad (4.54)$$

となる。この操作を無限に繰り返せば $g(s)$ の定義域を複素数全体に拡張することができる。その結果、 $g(s)$ は $s = 1, 0, -1, -2, \dots$ を 1 位の極とする関数になる。上と同様の方法で $s = -n$ における留数を計算すると、

$$\operatorname{Res}_{s=-n} g(s) = \frac{B_{n+1}}{(n+1)!},$$

となる。積分 $g(s)$ は、上に述べた 1 位の極以外の複素数全体で正則な関数となる。

ワイエルストラスの無限乗積の公式によると、 $1/\Gamma(s)$ は $s = 0, -1, -2, \dots$ を 1 位の零点とする関数であるので、 $\zeta(s) = g(s)/\Gamma(s)$ であるゼータ関数は、 $s = -1, -2, -3, \dots$ が除去可能な特異点である。したがって、ゼータ関数 $\zeta(s)$ は、 $z = 0$ を 1 位の極とし、それ以外の複素数全体で正則な関数であることが結論できる。それでは、それらの除去可能な特異点におけるゼータ関数の値を求めてみよう。そのためにはガンマ関数の留数を計算しておくとうい。ガンマ関数の留数の評価にはワイエルストラスの無限乗積の公式：

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = se^{\gamma s} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{k}\right) e^{-s/k},$$

を使用することもできるが、オイラーの無限城跡の公式：

$$\Gamma(s) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m^s m!}{s(s+1) \cdots (s+m)},$$

の方が取り扱いやすい。この公式を用いて $s = -n$ における $\Gamma(s)$ の留数を計算すると、

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{s=-n} \Gamma(s) &= \lim_{s \rightarrow -n} (s+n) \Gamma(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow -n} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(s+n) m^s m!}{s(s+1) \cdots (s+n-1)(s+n)(s+n+1) \cdots (s+m)} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n m^{-n} m!}{n! (m-n)!} \\ &= \frac{(-1)^n}{n!} \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right) \left(1 + \frac{2}{m}\right) \cdots \left(1 + \frac{n-1}{m}\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{n!}, \end{aligned}$$

が得られる。いや、実は $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ という性質に注目すれば、オイラーの無限乗積の公式を知らなくても留数を得ることができる。具体的に書くと、

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{s=-n} \Gamma(s) &= \lim_{s \rightarrow -n} (s+n) \Gamma(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow -n} (s+n) \Gamma(s+n+1-(n+1)) \\ &= \lim_{s \rightarrow 1} (s-1) \Gamma(s-(n+1)) \\ &= \lim_{s \rightarrow 1} \frac{(s-1) \Gamma(s)}{(s-1)(s-2) \cdots (s-n-1)} = \frac{(-1)^n}{n!}, \end{aligned}$$

となる。ところで、 $g(s)$ と $\Gamma(s)$ の双方について $s = -n$ が 1 位の極であるので、

$$\zeta(-n) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{g(s)}{\Gamma(s)} = \frac{\operatorname{Res}_{s=-n} g(s)}{\operatorname{Res}_{s=-n} \Gamma(s)} = \frac{(-1)^n B_{n+1}}{n+1} \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

が得られる。さらに、第3項以降のベルヌーイ数の奇数項がゼロであることに注意すると、

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}, \quad \zeta(-2m+1) = -\frac{B_{2m}}{2m}, \quad \zeta(-2m) = 0 \quad (m = 1, 2, 3, \dots),$$

と書くことができる。または、単純に、

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}, \quad \zeta(-n) = -\frac{B_{n+1}}{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

と書いてもよいだろう。この式に示すように、負の偶数のゼータ関数は、必ず、ゼロになる。そのため、負の偶数はゼータ関数の自明な零点と呼ばれる。一方、 $\Gamma(s)$ が $s = 1$ で正則なため、積分 $g(s)$ の1位の極だった $s = 1$ は $\zeta(s)$ の1位の極として引き継がれる。その極におけるゼータ関数の留数は、

$$\operatorname{Res}_{s=1} \zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(1)} \operatorname{Res}_{s=1} g(s) = 1,$$

となる。しかも、 $s = 1$ はゼータ関数の唯一の極である。

4.5.4 複素数での積分表示

ゼータ関数を複素数全体を定義域とするための積分表示を考察しよう。既に導出したように、ゼータ関数は、

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} dz,$$

のような積分表示ができる。しかし、この積分表示は $\operatorname{Re} s > 1$ の条件で収束するだけである。前節では、この積分表示に対して部分積分を繰り返すことによって定義域を拡張した。本節では積分表示を複素積分に拡張することによって解析接続を試みる。

積分路として図 4.7 に示す C を設定する。この積分路は、実軸上を $+\infty$ からゼロに向かう C_+ 、原点の周りを半径 r で1回転する C_r と、実軸上のゼロから $+\infty$ に向かう C_- によって構成されている。もう少し正確に言うと、積分路 C_+ は微小量の虚部を含み第I象限内を動き、積分路 C_- は微小量の虚部を含み第IV象限内を動く。まず、 $\operatorname{Re} s > 1$ の条件を仮定しよう。さらに、 $r \rightarrow 0$ とすると、経路 C_r にそった積分は、

$$\begin{aligned} \int_{C_r} \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} dz &= \lim_{r \rightarrow 0} ir^s \int_0^{2\pi} \frac{e^{is\theta}}{e^{re^{i\theta}} - 1} d\theta = \lim_{r \rightarrow 0} ir^{s-1} \int_0^{2\pi} e^{i(s-1)\theta} dz \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2ir^{s-1} e^{\pi i(s-1)} \sin \pi(s-1)}{s-1} = 0 \quad (\operatorname{Re} s > 1), \end{aligned}$$

となるので、ゼロになることがわかる。経路 C_+ に沿った積分は

$$\frac{1}{\Gamma(s)} \int_{C_+} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dz = -\zeta(s) \quad (\operatorname{Re} s > 1),$$

である。さらに、経路 C_- に沿った積分については、積分変数 z が原点の周りを角度 2π だけ回った後であることを考えると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(s)} \int_{C_-} \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} dz &= \int_0^\infty \frac{(ze^{2\pi i})^{s-1}}{e^z - 1} dz \\ &= e^{2\pi i(s-1)} \int_0^\infty \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} dz = e^{2\pi i(s-1)} \zeta(s) \quad (\operatorname{Re} s > 1), \end{aligned}$$

と書くことができる。したがって、 $\zeta(s)$ は、

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \frac{1}{\Gamma(s)} \frac{1}{e^{2\pi i(s-1)} - 1} \int_C \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} dz \\ &= \frac{e^{\pi i(s-1)}}{2i\Gamma(s) \sin \pi(s-1)} \int_C \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} dz \\ &= -\frac{1}{2i\Gamma(s) \sin \pi s} \int_C \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz = -\frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_C \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz, \quad (4.55) \end{aligned}$$

のように表現できる。この数式変形において、 $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \pi/\sin \pi s$ なる関係を利用した。この関係式は $\operatorname{Re} s > 1$ の条件のもとで計算したのだが、この関係が $\operatorname{Re} s \leq 1$ でも成立すると仮定しよう。その仮定がゼータ関数の解析接続となる。

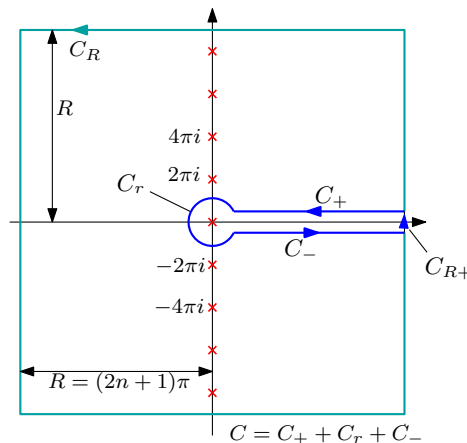


図 4.7: ゼータ関数を計算する積分路

積分表示 (4.55) が $\operatorname{Re} s \leq 1$ でも成立するとの仮定が解析接続になっていることを示そう。ゼータ関数の変数が負の整数 $z = -n$ であるなら、積分路を図 4.7 に示すような $C + C_{R+}$ に設定することができる。追加した積分路 C_{R+} は無限遠の正の実軸を第 IV 象限から第 I 象限にまたぐ微小経路である。この微小経路は長さが限りなくゼロに近いため、この微小経路に沿った積分はゼロとなる。そのため、

$$\zeta(s) = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_C \frac{(-z)^{-n-1}}{e^z - 1} dz = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_{C+C_{R+}} \frac{(-z)^{-n-1}}{e^z - 1} dz,$$

が成立するため、経路 $C + C_r$ に沿った周回積分によってゼータ関数を評価できる。補足しておく、この経路が周回経路として成り立つのはゼータ関数の変数が整数の場合に限られる。なぜなら、被積分関数の分子 $(-z)^{s-1}$ は、 z が原点の周りを1回転すると $(-z)^{s-1} e^{2\pi i(s-1)}$ となり、これが回転前と同一の値にならないければ経路 C_{R+} をひと続きの経路とはみなすことができないからである。その条件は s が整数の場合に限って満たされる。ここで考えているのは、 $s = -n$ であるので経路 $C + C_{R+}$ は周回経路として成立している、この経路の積分に留数定理を使用できる。被積分関数が、

$$\frac{(-z)^{-n-1}}{e^z - 1} = (-1)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^{k-n-2},$$

のようにベルヌーイ数を用いて展開でき、留数がローラン展開したときの -1 次の係数であることから、極 $z = 0$ における被積分関数の留数は、

$$\operatorname{Res}_{z=0} \frac{(-z)^{-n-1}}{e^z - 1} = \frac{(-1)^{n+1} B_{n+1}}{(n+1)!},$$

であることがわかる。さらに、 $\Gamma(1+n) = n!$ であることに注意し、経路 $C + C_{R+}$ の周回積分に留数定理を適用すると、

$$\zeta(-n) = \frac{(-1)^n B_{n+1}}{n+1},$$

が導かれる。ただし、 B_3 以降のベルヌーイ数の奇数項がゼロであることに注意すると、

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}, \quad \zeta(-2m+1) = -\frac{B_{2m}}{2m}, \quad \zeta(-2m) = 0 \quad (m = 1, 2, 3, \dots),$$

なる結果を得る。この結果に示すとおり、負の偶数のゼータ関数は、必ず、ゼロとなる。ゼータ関数の自明な零点に関するこのような結果は前節で解析接続した際にも得られた。

それでは、整数以外の $\operatorname{Re} s < 1$ の場合における経路 C での積分の評価について述べる。上で説明したように、 s が整数でなければ経路 $C + C_{R+}$ が周回経路とならないため、任意の s に対して、経路 $C + C_{R+}$ を積分経路とすることはできない。そこで、図 4.7 に示す左回りの積分路 C_R を考えよう。この積分路は、複素平面における4点: $R + iR$, $-R + iR$, $-R - iR$, $R - iR$ を頂点とする正方形であり、しかも、 $R = (2n+1)\pi$ であるとする。その積分路が与えられ、 $\operatorname{Re} s < 1$ の条件では、 $R \rightarrow \infty$ の極限で、 C_R に沿った積分はゼロとなる。それは次のようにして証明できる。

Proof まず、 $z = x \pm i(2n+1)\pi$ とし、 $0 < \alpha < 1$ を用いると、

$$\begin{aligned} \left| \int_{z=x \pm iR} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz \right| &< \int_{-R}^R \frac{z^{\operatorname{Re} s - 1}}{e^x + 1} dx < \int_{-R}^R z^{\operatorname{Re} s - 1} dx \\ &< \int_{-R}^R \frac{1}{R^{1-\operatorname{Re} s}} dz = \frac{2}{R^{-\operatorname{Re} s}}, \end{aligned}$$

となるので, $\operatorname{Re} s < 0$ のとき, この積分はゼロになる。つまり, 積分路 C_R のうち, 実軸と平行な積分路における積分は $\operatorname{Re} s < 0$ の条件でゼロになる。次に $z = R + iy$ とすると,

$$\left| \int_{z=R+iy} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz \right| < \int_{-R}^R \frac{(\sqrt{2}R)^{\operatorname{Re} s - 1}}{e^R - 1} dy,$$

となる。この積分は, $R \rightarrow \infty$ の極限では s と無関係にゼロになるので, 複素平面の第 I 象限と第 IV 象限を通る虚軸に平行な積分路での積分は必ずゼロになる。もう一方, $z = -R + iy$ における積分は,

$$\left| \int_{z=-R-iy} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz \right| < \int_{-R}^R \frac{(\sqrt{2}R)^{\operatorname{Re} s - 1}}{e^{-R} e^{iy} - 1} dy,$$

となるので, $R \rightarrow \infty$ の極限では, $\operatorname{Re} s < 1$ の場合にゼロとなる。したがって, 積分路 C_R における積分は, $\operatorname{Re} s < 1$ の場合にゼロとなる。◻

積分路 C_R での積分が $\operatorname{Re} s < 1$ の場合にゼロになる事実より, 積分路 C における積分は,

$$\int_C \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz = - \int_{C_R + C^{-1}} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz \quad (\operatorname{Re} s < 1),$$

と書くことができる。ここで, C^{-1} は経路 C を逆方向にたどる経路を意味する。ところで, 被積分関数は $z = 2\pi in$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) で 1 位の極をもつ。その極における留数を計算すると,

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=2\pi in} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} &= \lim_{z \rightarrow 2\pi in} \frac{(z - 2\pi in)(-z)^{s-1}}{e^z - 1} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z(-z - 2\pi in)^{s-1}}{e^z - 1} = (2\pi)^{s-1} n^{s-1} e^{-\pi i(s-1)/2}, \end{aligned}$$

となる。積分経路 $C_R + C^{-1}$ が $z = 0$ 以外の極をすべて取り囲んでいることに注目すれば, 留数定理によって,

$$\begin{aligned} \int_C \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz &= -2\pi i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (2\pi)^{s-1} n^{s-1} e^{-\pi i(s-1)/2} \\ &= -2\pi i \cdot (2\pi)^{s-1} \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1} e^{-\pi i(s-1)/2} (1 + e^{\pi i(s-1)}) \\ &= -2\pi i \cdot 2(2\pi)^{s-1} \cos \frac{\pi(s-1)}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1-s}} \\ &= -2\pi i \cdot 2(2\pi)^{s-1} \zeta(1-s) \sin \frac{\pi s}{2}, \end{aligned}$$

が得られる。この数式変形の第1行目に含まれる Σ' は $n = 0$ を取り除いた総和を意味する。得られた結果を複素平面におけるゼータ関数の積分表示に代入すれば、

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \Gamma(1-s) \zeta(1-s) \sin \frac{\pi s}{2} \quad (\operatorname{Re} s < 1), \quad (4.56)$$

なる関数等式が得られる。この関数等式は、経路 C_R における積分がゼロであること、すなわち、 $\operatorname{Re} s < 1$ の条件において導出された関係式であるので、(4.56) にはその条件を書いておいた。この条件を考慮すると、(4.56) は必ず正則であることがわかる。ここで、 $s = -2m$ ($m = 1, 2, \dots$) とおいて負の偶数のゼータ関数を求めるならば、 $\sin(-\pi m) = 0$ であり、 $\Gamma(1+2m)$ も $\zeta(1+2m)$ も正則であるので、 $\zeta(-2m) = 0$ であることが導かれる。これは、ゼータ関数の自明な零点を与える結果であり、前節、および、本節の負の整数に限定した場合の解析においても同一の性質が得られている。

次に、 $s = -2m+1$ とおいて負の奇数のゼータ関数を求めてみよう。その場合、 $\sin(-m + 1/2)\pi = (-1)^m$ 、 $\Gamma(2m) = (2m-1)!$ であり、さらに、

$$\zeta(2m) = \frac{(-1)^{m-1} 2^{2m-1} \pi^{2m} B_{2m}}{(2m)!},$$

であるので、 $\zeta(-2m+1) = -B_{2m}/2m$ が得られる。これも前節で導いた結果と同じである。つまり、図 4.7 に示す経路 C のように積分路を選び、積分 (4.55) によってゼータ関数を定義すれば、ゼータ関数の定義域を複素数全体に拡張することができる。また、積分路 C は必ずしも図 4.7 のように設定する必要はなく、無限遠の実軸上から開始し、正の実軸と積分路自身を交わることなく、また、極の上を通過することなく、 $z = 0$ を左回りに周回し、無限遠の正の実軸上に戻る経路であればどのような経路でもよい。

解析接続によって、ゼータ関数の定義域を複素数全体に拡張することができた。実数変数に対してゼータ関数を図 4.8 にグラフ表示しておこう。既に明らかにしたように、ゼータ関数 $\zeta(z)$ は $z = 1$ で発散し、負の偶数をゼロ点とする。変数が正の無限大に向かって増加すると、ゼータ関数は 1 に近づく。一方、変数が負の値になると、 x 軸の上下を振動する。このグラフでは、負の変数に対してゼータ関数はゼロに近い値となっているが、さらに変数が小さくなると、振幅が階乗の速さで増大しながら振動する。変数が負の無限大に向かって減少したときゼータ関数の振幅が増大することは、 $\zeta(-n) = -B_{n+1}/(n+1)$ から容易に理解できるだろう。

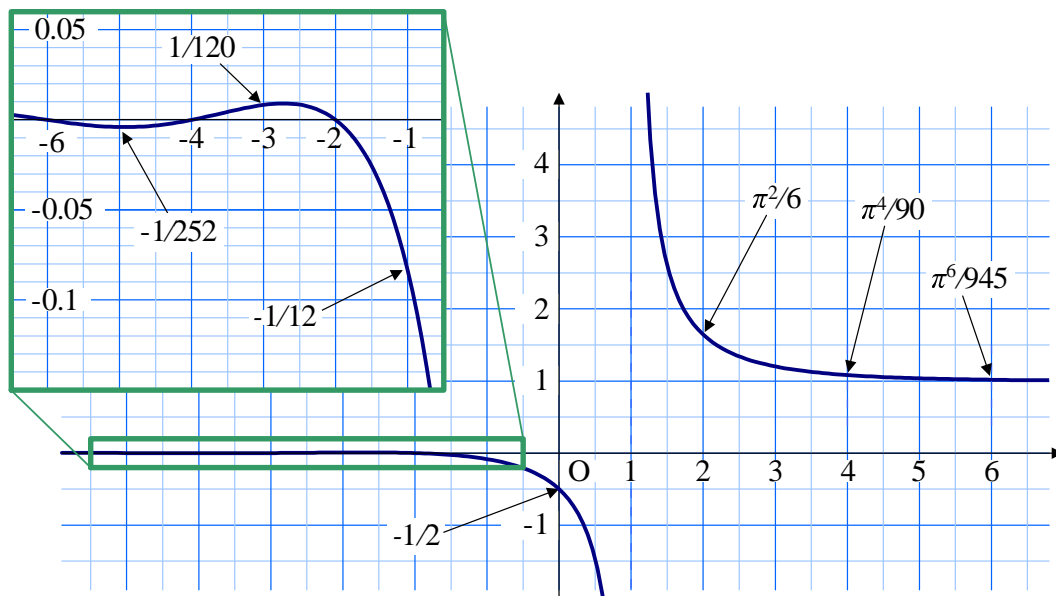


図 4.8: ゼータ関数

Break: 自然数の数は全部で $-1/2$ 個

このコラムに書いてある記事は、冗談と思って軽く流してほしい。本章で解析接続を使ってゼータ関数の定義域を複素平面全体に拡張した。その結果として、 $\zeta(0) = 1/2$, $\zeta(-1) = -1/12$, $\zeta(-2) = 0$, $\zeta(-3) = 1/120$ のような結果が得られる。もともとゼータ関数は、

$$\zeta(s) \equiv 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \dots$$

のように定義されていた。つまり、 $\zeta(0) = 1 + 1 + 1 + \dots$ である。この式は、

$$\zeta(0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N 1,$$

のように書いてよいだろう。この総和で得られる数値は、1 から N までの間に存在する自然数の数と考えることもできるだろう。ということは、 $N \rightarrow \infty$ とすれば、すべての自然数の数が得られるのではないか。つまり、 $\zeta(0)$ は自然数の数を与えると考えられるのである。先ほど述べたように、 $\zeta(0) = -1/2$ であるので、自然数の数は $-1/2$ 個ということになる。

これまで、ゼータ関数の性質を調べ、図 4.8 にゼータ関数をグラフに示した。しかし、これまでに調べた内容では整数変数しか関数値を与えることができず、任意の変数に対して関数値を計算するには異なる手段が必要である。その手段は本章の範囲を超えているため、本章で取り扱う代わりに、第 6 章で改めてゼータ関数の計算方法を取り扱う。

4.5.5 負整数のゼータ関数

本節では、負整数のゼータ関数を強引にべき級数と関連付けてみよう。あまりにも強引であるので、数学的な厳密さを伴っていないことを勘弁してほしい。その意味で、本節はコラム書くべき内容なのだが、多少まじめに議論してみたいので本文に書くことにした。

負整数のゼータ関数は、その関数の元来の定義によると、 $\zeta(-n) \equiv 1 + 2^n + 3^n + 4^n + \dots$ である。このような収束しない級数でゼータ関数を定義することはナンセンスであるが、本節はこのまま議論を進めていきたい。ここで、負整数のゼータ関数に現れる各項を係数とするべき級数(通常母関数):

$$f_n(x) = \sum_k^{\infty} k^n x^{k-1} = 1 + 2^n x + 3^n x^2 + 4^n x^3 + \dots \quad (4.57)$$

を考えてみよう。パラメータ n がゼロのとき、この関数は、

$$f_0(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots = \frac{1}{1-x},$$

であることがわかる。これから始めて、一般の $f_n(x)$ を表記してみよう。次の関数 $f_1(x)$ は、

$$f_1(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \dots$$

となることから、 $f_0(x)$ の1階微分、すなわち、 $f_1(x) = f_0'(x)$ であることがわかる。または、 $f_1(x) = (x f_0(x))'$ と考えても同じ結果が得られる。この後すぐにわかるが、 $f_1(x) = (x f_0(x))'$ と考えたほうが都合がよい。したがって、

$$f_1(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots = \frac{d}{dx} \frac{x}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2},$$

が得られる。階数を増加させるには、 $f_2(x) = (x f_1(x))'$ とすればよい。つまり、2階の関数は、

$$f_2(x) = 1 + 2^2 x + 3^2 x^2 + 4^2 x^3 + \dots = \frac{d}{dx} \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{1+x}{(1-x)^3},$$

が得られる。ここまでくれば、一般的に階数を1階上昇させるには $f_{n+1}(x) = (x f_n(x))'$ とすればよいことは明らかだろう。とりあえず、3階の母関数を計算してみると、

$$f_3(x) = 1 + 2^3 x + 3^3 x^2 + 4^3 x^3 + \dots = \frac{d}{dx} \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} = \frac{1+4x+x^2}{(1-x)^4},$$

のようになる。これから階数を上昇させるには計算が楽ではないようだ。上で計算した3階までの母関数を見ると、 $n-1$ 階の母関数は分子が x の n 次式で分母が $(1-x)^{n+2}$ と推測できる。つまり、 $n-1$ 階の母関数は、

$$f_{n+1}(x) = \frac{1}{(1-x)^{n+2}} \sum_{k=0}^n A_{n,k} x^k, \quad (4.58)$$

と書ける。この式に対して、 $f_n(x) = (xf_{n-1}(x))'$ の関係を用いて、階数を上昇させると、

$$\begin{aligned} f_{n+2}(x) &= \frac{1}{(1-x)^{n+3}} \left[(1-x) \sum_{k=0}^n A_{nk} x^k + (n+2) \sum_{k=0}^n A_{nk} x^{k+1} \right] \\ &= \frac{1}{(1-x)^{n+3}} \left\{ A_{n0} + \sum_{k=0}^n [(k+1)A_{nk} + (n-k+1)A_{n,k-1}] x^k + A_{nn} x^{n+1} \right\}, \end{aligned}$$

のように計算できる。この計算結果における x^k の係数を $A_{n+1,k}$ とすると、その係数は、

$$A_{nk} = (n-k+1)A_{n-1,k-1} + (k+1)A_{n-1,k}, \quad A_{n0} = A_{nn} = 1, \quad (4.59)$$

なる漸化式で与えられる。この式のうち、 $A_{n0} = A_{nn} = 1$ は、 $f_1(x) = 1/(1-x)^2$ である事実から得られる $A_{00} = 1$ から派生している。上に示した漸化式を用いて7階の母関数まで計算すると、表 4.8 が得られる。この表によると、展開係数に左右の対称性:

$$A_{nk} = A_{n,n-k} \quad (4.60)$$

が成立しているように見える。その対称性が n 階の展開係数で成立すると仮定して、 $n+1$ 階の展開係数を計算すると、

$$\begin{aligned} A_{n+1,(n+1)-k} &= (k+1)A_{n,n-k} + (n+1-k+1)A_{n,n-k+1} \\ &= (k+1)A_{n,k} + ((n+1)-k+1)A_{n,k-1} = A_{n+1,k}, \end{aligned}$$

となるので、 $n+1$ 階の展開係数も対称性が成立する。したがって、展開係数はいかなる階数においても左右対称である。

表 4.8: 母関数の展開係数

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	4	1					
3	1	11	11	1				
4	1	26	66	26	1			
5	1	57	302	302	57	1		
6	1	120	1191	2416	1191	120	1	
7	1	247	4293	15619	15619	4293	247	1

展開係数 A_{nk} は、 k について和をとると $(n+1)!$ に等しい事実がある。この事実は、次のように数式展開すると証明できる。展開係数 A_{nk} の総和を、漸化式に注意して変形すると、

$$\sum_{k=0}^n A_{nk} = A_{n0} + \sum_{k=1}^{n-1} A_{nk} + A_{nn}$$

$$\begin{aligned}
&= A_{n-1,0} + \sum_{k=1}^{n-1} \left[(n-k+1)A_{n-1,k-1} + (k+1)A_{n-1,k} \right] + A_{n-1,n-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)A_{n-1,k} + \sum_{k=1}^n (n-k+1)A_{n-1,k-1} = (n+1) \sum_{k=0}^{n-1} A_{n-1,k},
\end{aligned}$$

のように, $A_{n-1,k}$ の総和の $n+1$ 倍になっている。第 0 階の展開係数 A_{0k} の k についての和が 1 であることから,

$$\sum_{k=0}^n A_{nk} = (n+1)! \quad (4.61)$$

であることが導かれる。

展開係数 A_{nk} の性質がいくつかわかったので, $f_n(x)$ とゼータ関数の関係を調べよう。単純に考えれば, $x=1$ とすれば,

$$f_n(1) = 1 + 2^n + 3^n + 4^n + \dots$$

となるので, ゼータ関数 $\zeta(-n)$ そのものであるが, 取り扱うには注意が必要である。なぜなら,

$$f_n(x) = \frac{1}{(1-x)^{n+1}} \sum_{k=0}^{n-1} A_{n-1,k} x^k,$$

であるので, $x=1$ では $f_n(x)$ が発散するからである。発散を回避するため, 代わりに $x=-1$ を代入しよう。そのときの関数値を $\varphi(-n) \equiv f_n(-1)$ と定義すると,

$$\varphi(-n) = 1 - 2^n + 3^n - 4^n + \dots = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k A_{n-1,k},$$

のように書くことができる。さらに, $\varphi(-n) = (1-2^{n+1})\zeta(-n)$ であることに注意すれば,

$$\zeta(-n) = \frac{\varphi(-n)}{1-2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}(1-2^{n+1})} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k A_{n-1,k},$$

が導出される。展開係数 A_{nk} が k についての対称性があることから, n が偶数 ($n=2m$) のとき, この式は確実にゼロになるので, $\zeta(-2m) = 0$ となる。これは, 前に導出した結果と合致している。さらに, 表 4.8 を上の式に適用すると,

$$\begin{aligned}
\zeta(-1) &= -\frac{1}{12}, & \zeta(-3) &= \frac{1}{120}, & \zeta(-5) &= -\frac{1}{252}, \\
\zeta(-7) &= \frac{1}{240}, & \zeta(-9) &= -\frac{1}{132},
\end{aligned}$$

が得られる。これも, 前に解析接続によって導出した結果 $\zeta(-2m+1) = B_{2m}/2m$ と合致する。また, $\zeta(0)$ については,

$$\varphi(0) = f_0(-1) = \frac{1}{1-x} \Big|_{x=-1} = \frac{1}{2},$$

によって $\zeta(0) = -1/2$ を導くことができる。これも解析接続によって導出した結果と合致する。

本節で展開した手法は、オイラーがゼータ関数の拡張に用いた方法である。級数の収束性を無視した方法であるが、解析接続を用いて拡張した結果と一致している。本節で新たに検証したゼータ関数を、元来の定義形式と併せて値を記述すると、

$$\begin{aligned} 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \cdots &= -1/2, \\ 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots &= -1/12, \\ 1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \cdots &= 0, \\ 1 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + \cdots &= 1/120, \\ 1 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + 5^4 + \cdots &= 0, \\ 1 + 2^5 + 3^5 + 4^5 + 5^5 + \cdots &= -1/252, \end{aligned}$$

のようになる。しかし、本当にこれらの左辺と右辺が等号で結ばれると考えてはいけない。読者が気づいているように、この関係式を得るまでの数式変形に、非常に怪しい操作を実行しているのだ。例えば、 $\zeta(-1)$ の場合、数学的テクニックとして $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots = 1/(1-x)$ の関係を用いるのはよいとして、 $x = 1$ ではなく $x = -1$ とするのが怪しいのである。確かに、 $x = 1$ では左辺の級数が収束しない。かと言って、 $x = -1$ でも収束するわけではない。級数 $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots$ は $|x| < 1$ が収束条件である。つまり、この級数が関数として有効な定義域は $|x| < 1$ である。そんな収束条件が厳しい級数を、定義域が複素数全体に渡るように解析接続した関数が $1/(1-x)$ なのである。その関数は、 $x = 1$ を極とする（つまり、 $x = 1$ で正則ではない）ため $x = 1$ でなく $x = -1$ を用いて議論したのである。つまり、数式変形の途中から議論の対象は $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots$ でなく、それを解析接続した $1/(1-x)$ にすり替わっていたのである。したがって、最終的に得られる関係式の左辺は $\zeta(-1)$ であり、決して $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots$ ではないのである。言い換えると、結果として得られる関係式は、 $\zeta(-1) = -1/12$ であることに間違いのないのだが、 $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots = 1/12$ は正しくない。そのような、収束条件を満たさない数式と、それを解析接続した関数とを等号で結ぶことはかなり乱暴なことである。

不思議なことに、物理学の世界で上記の不可思議な数式が成立すると解釈できることがある。その例として、カシミール効果がある。カシミール効果とは、帯電していない2枚の金属板を微小距離隔てて平行配置したときに、それらの間に引力が発生する現象である。その現象は、量子論的なゼロ点エネルギーに起因する。あらゆる可能な組み合わせについてゼロ点エネルギーが総和が $1 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots$ のように3乗数の無限和となる。この無限和を $\zeta(-3) = 1/120$ で置き換えて金属板間に作用する力を計算すると、実験結果と一

致する[¶]。

[¶]この現象を紹介した文献は多いのだが、ゼータ関数との関係を説明している文献として、黒川信重, “オイラー探検 無限大の滝と 12 連峰,” 丸善, 2012, が挙げられる。

第5章 ベルヌーイ多項式とオイラー多項式

ベルヌーイ数やオイラー数に関する性質を調べる上で、それらの数列を係数にもつべき級数、いわゆるベルヌーイ多項式とオイラー多項式を導入すると便利ことがある。本節では、ベルヌーイ多項式とオイラー多項式を導入し、それらの応用例として、偶数ゼータ関数などの評価が容易にできることを示す。

5.1 ベルヌーイ多項式

ベルヌーイ多項式は、ベルヌーイ数を展開係数に含む x のべき級数である。後に解説するが、ベルヌーイ数は整数のべき乗和と同じ形式の関数である。ベルヌーイ多項式の具体的な形は、負でない整数 n を用い、

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k x^{n-k}, \quad (5.1)$$

なる数式によって定義される。この数式は n 次のベルヌーイ多項式と呼ばれる。この定義式から容易にわかるように、ベルヌーイ多項式は $B_n = B_n(0)$ によってベルヌーイ数と関係づけられる。具体的にベルヌーイ多項式をいくつか書いていくと、

$$\begin{aligned} B_0(x) &= 1, & B_1(x) &= x - \frac{1}{2}, \\ B_2(x) &= x^2 - x + \frac{1}{6}, & B_3(x) &= x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x, \\ B_4(x) &= x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}, & B_5(x) &= x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x, \end{aligned}$$

が得られる。ベルヌーイ多項式のうち、1次から3次までの多項式は図5.1に示す曲線を描く。後に改めて示すが、 $n-1$ 次のベルヌーイ多項式は、 n 次の多項式の導関数を $1/n$ 倍した値である。

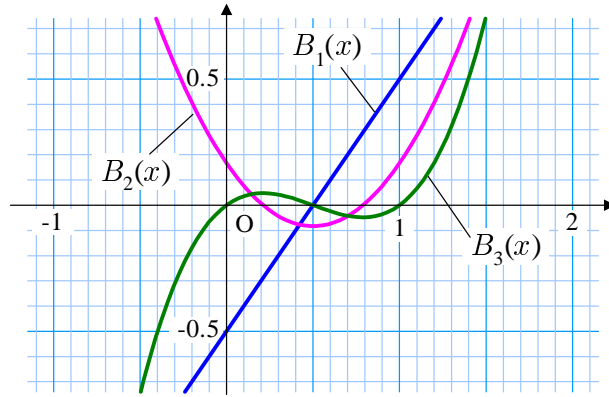


図 5.1: ベルヌーイ多項式

5.1.1 ベルヌーイ多項式の性質

ベルヌーイ多項式には次に示すような性質がある。これらの性質は、ベルヌーイ多項式とベルヌーイ数の関係や、ベルヌーイ数の導関数における関係を表している。

$$B_n(0) = B_n, \quad (5.2)$$

$$B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x), \quad (5.3)$$

$$B_{2n}(1/2) = \frac{2-2^{2n}}{2^{2n}} B_{2n}, \quad B_{2n+1}(1/2) = 0, \quad (5.4)$$

$$B'_n(x) = n B_{n-1}(x), \quad (5.5)$$

まず、第1の性質はベルヌーイ多項式の定義から容易に見出すことができる。第2の性質は、ベルヌーイ多項式の値が $x = 1/2$ について線対称であることを表している。その対称性は、次のようにして証明することができる。

$$\begin{aligned} B_n(1-x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{B_k}{k!} (1-x)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{n-k} \frac{n!}{k! j! (n-k-j)!} (-1)^{n-k-j} B_k x^{n-k-j} \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k \binom{n}{k} \binom{k}{j} (-1)^{n-k} B_j x^{n-k}. \end{aligned}$$

ここで、 $k \geq 2$ に対して成立するベルヌーイ数の漸化式:

$$\sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} B_j = 0,$$

に注意すると, $B_n(1-x)$ は,

$$\begin{aligned} B_n(1-x) &= (-1)^n B_0 x^n + \binom{n}{0} \binom{1}{0} (-1)^{n-1} B_0 x^{n-1} \\ &\quad + \binom{n}{1} \binom{1}{1} (-1)^{n-1} B_1 x^{n-1} + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} B_k (-1)^{n-k} x^{n-k} \\ &= (-1)^n \left[x^n - \frac{n}{2} x^{n-1} \right] + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} B_k x^{n-k}. \end{aligned}$$

のように変形できる。この右辺には, $B_0 = 1$, $B_1 = -1/2$ が代入されている。さらに, ベルヌーイ数 B_k が, $k > 2$ の奇数のときにゼロとなる事実から, $B_n(1-x)$ は,

$$B_n(1-x) = (-1)^n \left[x^n - \frac{n}{2} x^{n-1} + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} B_k x^{n-k} \right] = (-1)^n B_n(x),$$

のように書いても不都合は生じない。この証明は $k \geq 2$ を前提に数式変形した結果であるが, 第2の性質は, $k = 0, 1$ に対しても成立する。なぜなら, $B_0(x) = 1$ であることから $B_0(1-x) = B_0(x)$, さらに, $B_1(x) = x - 1/2$ であることから $B_1(1-x) = -B_1(x)$ となるからである。よって, 第2の性質を証明することができた。

第3の性質は, 指数型母関数を導入して第5.1.3項で証明することにする。第4の性質は, 前に述べたように, $n-1$ 次のベルヌーイ多項式が, n 次のベルヌーイ多項式の導関数を $1/n$ 倍すれば得られることを意味している。この性質は, ベルヌーイ多項式の定義式から容易に証明することができる。

5.1.2 べき乗和との関係

ベルヌーイ多項式はべき乗和と深い関係がある。というよりも, 定義域が整数のみであったべき乗和を, 複素数全体を定義域とするように解析接続した関数と言ってもよい。その証拠に n 次のベルヌーイ多項式を変形すると,

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k x^{n-k} = B_n + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k x^{n-k} = B_n + n S_{n-1}(x),$$

が得られる。この数式の右辺に記述した $S_{n-1}(x)$ は $n-1$ 次のべき乗和, すなわち, $0^{n-1} + 1^{n-1} + 2^{n-1} + \dots + (x-1)^{n-1}$ である。この関係式は,

$$S_k(x) = \frac{B_{k+1}(x) - B_{k+1}}{k+1}, \quad (5.6)$$

のように書き換えることもできる。ベルヌーイ多項式の変数 x は一般に複素数であるが, このようにべき乗和と対応づけるには, x が0以上の整数であると解釈すべきである。ま

た、任意の複素数 x についての関数 $S_k(x)$ はべき乗和を複素数全体に解析接続した関数と解釈することもできる。

ベルヌーイ多項式とべき乗和の関係がわかったので、ベルヌーイ多項式の性質から、逆にべき乗和の性質を見出そう。ベルヌーイ多項式の性質 (5.2) と (5.3) から、

$$S_k(0) = 0, \quad S_k(1) = [(-1)^{k+1} - 1] B_{k+1},$$

が導かれる。特に、第2の等式に注目すると、 k が奇数の場合、確実に $S_k(1) = 0$ が成立する。一方、 k が偶数のとき、 $S_k(1) = -2B_{k+1}$ となるが、3以上の奇数項のベルヌーイ数がゼロであることから、1以上の任意の次数 k について $S_k(1) = 0$ が成立することが導かれる。したがって、1以上の次数 k について、 $S_k(x)$ は $x(x-1)$ で因数分解できる。

ベルヌーイ多項式の性質 (5.4) に注目し、 $S_k(1/2)$ を評価しよう。性質 (5.4) によると、次数が偶数か奇数かによって結果が異なるはずだ。その性質を用いて $S_{2m}(1/2)$ と $S_{2m+1}(1/2)$ を計算すると、

$$S_{2m}(1/2) = \frac{B_{2m+1} - B_{2m+1}}{2m+1} = 0,$$

$$S_{2m+1}(1/2) = \frac{B_{2m+2} - B_{2m+2}}{2m+2} = \frac{2 - 2^{2m+3}}{2^{2m+2}} B_{2m+2} \neq 0,$$

が得られる。なお、上の数式における偶数次とはゼロ次を含まない。得られた数式から、2以上の偶数次の場合、 $S_k(x)$ は $x-1/2$ で因数分解できることがわかる。または、 $2x-1$ で因数分解できる、と言い換えてもよい。

本項で導出したべき乗和の性質を要約すると次のようになる。ゼロから $n-1$ までの整数に関する k 次のべき乗和 $S_k(n)$ について、

- ゼロ以外の任意の次数 k について、 $S_k(n)$ は $n(n-1)$ で因数分解できる。
- 次数 k がゼロ以外の偶数のとき、 $S_k(n)$ は $2n-1$ で因数分解できる。

が成立する。なお、べき乗和は整数変数に対して適用されるのだから、本項で用いた変数 x を整数 n に置き換えておいた。

5.1.3 指数型母関数

ベルヌーイ多項式の性質を調べるために指数型母関数を導入すると便利である。ベルヌーイ多項式の指数型母関数は、あるパラメータ t の関数として書くと、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} t^n,$$

のように定義される。総和をとる順序を並べ替え、数式変形すると、指数型母関数は、

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} t^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k x^{n-k} \frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k t^k}{k!} \cdot \sum_{n=k}^{\infty} \frac{x^n t^n}{n!} = \frac{t e^{xt}}{e^t - 1}, \end{aligned}$$

のように計算できる。ベルヌーイ多項式の指数型母関数は、ベルヌーイ数の指数型母関数 $t/(e^t - 1)$ に類似している。

ベルヌーイ多項式を用いれば前節で紹介した第3の性質を証明できる。指数型母関数に $x = 1/2$ を代入すると、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(1/2)}{n!} t^n = \frac{t}{2} \operatorname{cosech} \frac{t}{2},$$

が得られる。既に余割関数 $\operatorname{cosec} x$ のローラン展開が得られているので、それを参考に上式の展開式を書くと、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(1/2)}{n!} t^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2 - 2^{2n}) B_{2n}}{(2n)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n},$$

が得られる。両辺の係数を比較すると、

$$B_{2n}(1/2) = \frac{2 - 2^{2n}}{2^{2n}} B_{2n}, \quad B_{2n+1}(1/2) = 0, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

なる関係が得られる。よって、前節で紹介した第3の性質が証明できた。ここで、

$$T_{2n-1} = \frac{(-1)^n (2^{2n} - 4^{2n})}{2n} B_{2n}, \quad T_{2n} = 0,$$

なるタンジェント数を用いると、その第3の性質は、

$$B_n(1/2) = \frac{(-1)^{\lfloor n/2 \rfloor}}{2^n} T_{n-1},$$

と書くこともできる。ここで、 $\lfloor x \rfloor$ は実数 x を超えない最大の整数を表す。

5.1.4 周期ベルヌーイ多項式

ここでは周期ベルヌーイ多項式を紹介しよう。周期ベルヌーイ多項式 $\tilde{B}_n(x)$ は、ベルヌーイ多項式 $B_n(x)$ と区間 $(0, 1)$ で一致し、 $\tilde{B}_n(x+1) = \tilde{B}_n(x)$ なる周期性をもつ。周期ベルヌーイ多項式を導入することによって、 $n \rightarrow \infty$ のとき無限次の多項式 $B_n(x)$ が区間 $[0, 1]$ で $|B_n(x)| \leq 2n!/(2\pi)^n$ を満たすことが導かれる。

周期ベルヌーイ多項式は, $0 < x < 1$ なる条件で,

$$f(z) = \frac{e^{xz}}{e^z - 1} - \frac{1}{z},$$

を部分分数展開することによって得られる。関数 $f(z)$ は, $z_n = 2\pi in$ ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$) を 1 位の極としてもつ。一方, 第 2 項があるため $f(z)$ は原点で正則な関数になっている。それらの極 z_n に対する留数は,

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=2\pi in} f(z) &= \lim_{z \rightarrow 2\pi in} (z - 2\pi in) \frac{e^{xz}}{e^z - 1} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z e^{x(z+2\pi in)}}{e^z - 1} = e^{2\pi inx}, \end{aligned}$$

のように計算される。関数 $f(z)$ は原点で正則であり, たかだか 1 位の極しかもたないので付録 B に記載の方法によって部分分数展開できる。

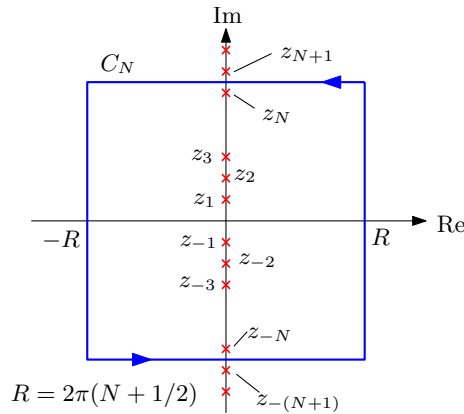


図 5.2: 関数 $f(z)$ の部分分数展開のための閉曲線

極 $z_{\pm 1}$ から $z_{\pm N}$ を囲む閉曲線として, $R = 2\pi(N + 1/2)$ として, 4 点: $R + iR$, $-R + iR$, $-R - iR$, $R - iR$ を頂点とする正方形を考える。部分分数展開のため, $N \rightarrow \infty$ としたときの閉曲線 C_N の上での関数の絶対値 $|f(z)|$ を評価してみる。まず, C_N のうち実軸に平行な経路, すなわち, $z = \xi \pm iR$ では,

$$|f(z)| = \left| \frac{e^{x\xi}}{-e^\xi - 1} \right| = \frac{e^{x\xi}}{e^\xi + 1} \leq x^x(1-x)^{1-x},$$

となる。ここで, $e^{iR} = e^{i\pi} = -1$ という事実を用いた。関数の絶対値 $|f(z)|$ は, $e^\xi = x/(1-x)$ の条件で右辺に示す最大値をとる。このことは, $e^{x\xi}/(e^\xi + 1)$ を e^ξ について微分することによって得られる。また, $|f(z)|$ の最大値は, R に依存しない定数 (しかもゼロでない) であるので, $|f(z)| = O(1)$ である。もう一方, 虚軸に平行な経路 $z = \pm R + i\eta$ においては,

$$|f(R + i\eta)| = \left| \frac{e^{xR}}{e^{R+i\eta} - 1} \right| = e^{-(1-x)R} = 0 \quad \text{as } R \rightarrow \infty,$$

$$|f(-R + i\eta)| = \left| \frac{e^{xR}}{e^{-R+i\eta} - 1} \right| = e^{-R} = 0 \quad \text{as } R \rightarrow \infty,$$

となる。したがって、閉曲線 C_N 全体では $|f(z)| = O(1) = o(R)$ である。引き続き、付録 B に記載した方法にしたがって部分分数展開すると、

$$\frac{e^{xz}}{e^z - 1} - \frac{1}{z} = - \sum'_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi inx} \left(\frac{1}{2\pi in - z} + \frac{1}{2\pi in} \right), \quad (5.7)$$

なる関係が得られる。なお、総和記号にプライム (') を付しているのは、 $n = 0$ を総和の対象から除外することを意味する。

部分分数展開された (5.7) を変形すると、周期ベルヌーイ多項式がフーリエ級数の形態で記述できる。これから、そのフーリエ級数を導出する。数式変形を簡単にするため、変数 z が実数の場合に限定しよう。そのとき、(5.7) の左辺が実数であるので、右辺の虚部は計算の過程で打ち消されることが明らかであるので、計算をする際には、実部だけに注目すればよい。そのように考えると、右辺の第 2 項は、 n が正と負を動くと、実部が打ち消されるので省略してもよい。さらに、第 1 項に二項定理を適用して変形すると、

$$\begin{aligned} \frac{e^{xz}}{e^z - 1} &= \frac{1}{z} - \operatorname{Re} \sum'_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi inx}}{2\pi in} \frac{1}{1 - z/2\pi in} \\ &= \frac{1}{z} - \sum_{k=0}^{\infty} \sum'_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} \frac{e^{2\pi inx}}{(2\pi in)^{k+1}} z^k, \end{aligned}$$

が得られる。上で説明したように、右辺を計算する際に実部のみを考えればよいので、演算子 Re によって複素関数から実部のみを取り出して計算している。この両辺に z を乗じるとベルヌーイ多項式の指数型母関数、すなわち、

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tilde{B}_k(x)}{k!} z^k = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \sum'_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} \frac{e^{2\pi inx}}{(2\pi in)^k} z^k,$$

が得られる。なお、ここで議論するベルヌーイ多項式は、定義域を $(0, 1)$ に制限しているため、通常のベルヌーイ多項式 $B_n(x)$ と区別するため、 $\tilde{B}_n(x)$ なる記号を用いている。両辺の展開係数を比較すると、

$$\tilde{B}_k(x) = - \sum'_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} \frac{k! e^{2\pi inx}}{(2\pi in)^k}, \quad (5.8)$$

なる関係が導出される。この関係式から実部を取り出すと、次数 k が偶数か奇数かによって形態が異なる。実部を具体的に書きだすと、

$$\tilde{B}_{2k}(x) = 2(-1)^{k-1}(2k)! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi nx}{(2\pi n)^{2k}}, \quad (5.9)$$

$$\tilde{B}_{2k+1}(x) = 2(-1)^{k-1}(2k+1)! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi nx}{(2\pi n)^{2k+1}}, \quad (5.10)$$

のように、偶数次は余弦級数、奇数次は正弦級数となる。例えば、 $\tilde{B}_1(x)$ の表現式は、

$$\tilde{B}_1(x) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi n x}{2\pi n},$$

であるが、この式が $B_1(x) = x - 1/2$ のフーリエ級数展開になっていることからこの式の正当性が確認できる。フーリエ級数展開によって表現される $\tilde{B}_n(x)$ は周期関数であるので、 $\tilde{B}_n(x)$ を周期ベルヌーイ多項式と呼ぶ。周期ベルヌーイ多項式は周期が1であり、その周期性とベルヌーイ多項式との関係は、

$$\tilde{B}_n(x) = B_n(x - [x]), \quad \tilde{B}_n(x+1) = \tilde{B}_n(x),$$

と表される。周期ベルヌーイ関数のフーリエ級数展開によって、 $0 \leq x \leq 1$ におけるベルヌーイ多項式 $B_k(x)$ の値域が、

$$|B_k(x)| \leq \frac{2k!}{(2\pi)^k} \zeta(k), \quad (5.11)$$

のように特定できる。とくに次数 k が大きくなれば $\zeta(k) \approx 1$ とみなせるので、

$$|B_k(x)| \leq \frac{2k!}{(2\pi)^k} \quad \text{for } k \text{ such that } \zeta(k) \approx 1,$$

なる関係式が成り立つ。周期ベルヌーイ多項式は図 5.3 に示す曲線を描く。この図を見る

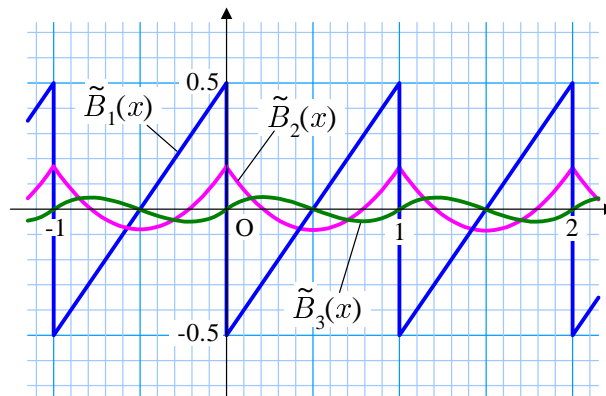


図 5.3: 周期ベルヌーイ多項式

と、次数が大きくなるにつれて周期ベルヌーイ多項式がとる値が減少するように見えるが正しくない。減少するのは次数が小さいときに限られる。上で示したように、周期ベルヌーイ多項式の値は次数 k の増加とともに階乗的に増加するのだ。

5.1.5 偶数ゼータ関数

周期ベルヌーイ多項式を利用すると、偶数ゼータ関数が容易に計算できる。その事実を示そう。計算に用いるのは、周期ベルヌーイ多項式の余弦級数 (5.9) である。この級数に $x = 0$ を代入すればよい。一方、ベルヌーイ多項式の性質から $\tilde{B}_{2k}(0) = B_{2k}$ であるので、

$$\frac{2(-1)^{k-1}(2k)!}{(2\pi)^{2k}} \zeta(2k) = B_{2k},$$

なる等式が成立する。言うまでもなく、

$$\zeta(2k) = 1 + \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{3^{2k}} + \cdots$$

である。したがって、

$$\zeta(2k) = \frac{(-1)^{k-1} 2^{2k-1} \pi^{2k}}{(2k)!} B_{2k}, \quad (5.12)$$

が得られる。この偶数ゼータの計算方法は、前章で示したフーリエ変換を利用した手法の一般系である。また、 $k = 1$ の場合、バーゼル問題の解 $\zeta(2) = \pi^2/6$ を与える。

5.2 オイラー多項式

オイラー数に関しても、ベルヌーイ数と同様、オイラー多項式と呼ばれる多項式が定義されている。オイラー多項式は、オイラー数を展開係数に含む多項式であるが、ベルヌーイ多項式と異なり、

$$E_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{E_k}{2^k} \left(x - \frac{1}{2}\right)^{n-k},$$

なる形で定義されている。ベルヌーイ多項式に比べ、複雑な形をしている。ここで、二項定理を用いて $(x - 1/2)^{n-k}$ を展開すると、オイラー多項式の定義式は、

$$\begin{aligned} E_n(x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{E_k}{2^k} \left(x - \frac{1}{2}\right)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{p=0}^{n-k} \frac{n!}{k! p! (n-k-p)!} \frac{(-1)^p E_p}{2^{k+p}} x^{n-k-p} \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{p=0}^k \frac{n!}{p! (k-p)! (n-k)!} \frac{(-1)^{k-p} E_p}{2^k} x^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{p=0}^k \binom{n}{k} \binom{k}{p} \frac{(-1)^{k-p} E_p}{2^k} x^{n-k}, \end{aligned}$$

のように変形される。ここで、オイラー数の奇数項がゼロであることに注意してオイラー多項式は、

$$E_{2n} = x^{2n} - \sum_{k=0}^n \sum_{p=0}^k \binom{2n}{2k+1} \binom{2k+1}{2p} \frac{E_{2p}}{2^{2k+1}} x^{2n-2k-1}$$

$$E_{2n+1} = x^{2n+1} - \sum_{k=0}^n \sum_{p=0}^k \binom{2n+1}{2k+1} \binom{2k+1}{2p} \frac{E_{2p}}{2^{2k+1}} x^{2n-2k},$$

のように変形される。ここで、オイラー数とタンジェント数の関係:

$$T_{2k-1} = (-1)^{k-1} \sum_{p=0}^{k-1} \binom{2k-1}{2p} E_{2p},$$

を思い出すと、オイラー多項式の展開式は、

$$E_{2n}(x) = x^{2n} - \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n}{2k+1} \frac{T_{2k+1}}{2^{2k+1}} x^{2n-2k-1}$$

$$E_{2n+1}(x) = x^{2n+1} - \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n+1}{2k+1} \frac{T_{2k+1}}{2^{2k+1}} x^{2n-2k},$$

のように簡略化できる。つまり、オイラー多項式は、その展開係数をタンジェント数によって記述することもできる。この展開式を用いて具体的にオイラー多項式を展開すると、

$$E_0(x) = 1, \quad E_1(x) = x - \frac{1}{2},$$

$$E_2(x) = x^2 - x, \quad E_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4},$$

$$E_4(x) = x^4 - 2x^3 + x, \quad E_5(x) = x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{2},$$

が得られる。オイラー多項式のうち、 $E_1(x)$ から $E_3(x)$ までをグラフに描くと図 5.4 のようになる。後に改めて示すが、ベルヌーイ多項式と同様に、 $n-1$ 次のオイラー多項式は n 次の多項式の導関数で表される。

5.2.1 オイラー多項式の性質

オイラー多項式には次に示す性質がある。これらの性質は、オイラー多項式とオイラー数やタンジェント数の関係、さらには、オイラー多項式の導関数における関係を表している。

$$E_n(1/2) = \frac{E_n}{2^n}, \quad (5.13)$$

$$E_n(1-x) = (-1)^n E_n(x), \quad (5.14)$$

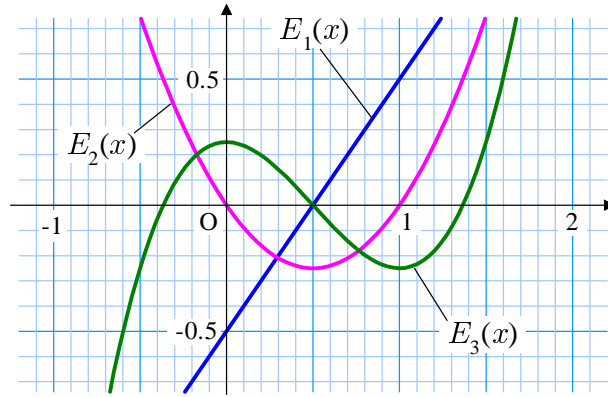


図 5.4: オイラー多項式

$$E_0(0) = 1, \quad E_n(0) = -\frac{(-1)^{\lfloor n/2 \rfloor} T_n}{2^n} \quad (n \geq 1), \quad (5.15)$$

$$E_0(1) = 1, \quad E_n(1) = \frac{(-1)^{\lfloor n/2 \rfloor} T_n}{2^n} \quad (n \geq 1), \quad (5.16)$$

$$E'_n(x) = nE_{n-1}(x), \quad (5.17)$$

第1の性質はオイラー多項式とオイラー数を関係づける公式である。その公式はオイラー多項式の定義式から明らかである。第2の性質は、オイラー多項式が $x = 1/2$ を中心として、 n が偶数のときに偶関数、 n が奇数のときに奇関数であることを意味する。その性質は $E_n(1/2 - x)$ を計算することによって証明できる。計算過程を示すと、

$$\begin{aligned} E_n(1/2 - x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \frac{E_k}{2^k} x^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^n \frac{E_k}{2^k} x^{n-k} = (-1)^n B_n(1/2 + x), \end{aligned}$$

となる。この計算は、 k が奇数の場合にオイラー数 E_k がゼロであることを利用している。これによって、 $E_n(1/2 - x) = (-1)^n B_n(1/2 + x)$ が示されたわけだが、 x を $1/2 - x$ で置き換えると、第2の性質が導かれる。

第3の性質はオイラー多項式とタンジェント数の関係を示す公式である。この公式はオイラー多項式に定義式に、 $x = 0$ を代入することで導出できる。第4の性質は、第3の性質に第2の性質を適用すれば得られる。第5の性質は、オイラー多項式の定義式を微分することによって証明することができる。

5.2.2 指数型母関数

ベルヌーイ多項式と同様に、オイラー多項式についても指数型母関数を調べよう。指数型母関数を特定すれば、オイラー多項式の性質を調べるのに便利である。オイラー多項式の指数型母関数は、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n(x)}{n!} t^n,$$

によって定義される。オイラー多項式の指数型母関数を計算すると、

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n(x)}{n!} t^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{E_k}{2^k} \frac{t^k}{k!} \left(x - \frac{1}{2}\right)^{n-k} \frac{t^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{E_k}{k!} \left(\frac{t}{2}\right)^k \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left(x - \frac{1}{2}\right)^n \\ &= \frac{2e^{(x-1/2)t}}{e^{t/2} + e^{-t/2}} = \frac{2e^{xt}}{e^t + 1}, \end{aligned}$$

のようになる。第2行目への数式変形には2項定理を利用した。第3行目への数式変形には、 E_k が双曲線正割関数 (sech 関数) の展開係数であることを利用した。具体的に述べると、第2行目の前半は $\text{sech}(t/2)$ である。一方、第2行目の後半は指数関数のマクローリン展開である。そのような経緯で第3行目が得られたのだ。

5.2.3 周期オイラー多項式

オイラー多項式も、ベルヌーイ多項式と同様に、母関数に基づく関数を部分分数展開することによってフーリエ級数展開を導くことができる。オイラー多項式の場合、部分分数展開する関数は、

$$f(z) = \frac{2e^{xz}}{e^z + 1},$$

である。つまり、母関数に基づくというよりも、母関数そのものである。ここでも、パラメータ x は $0 < x < 1$ のように制限されているとする。関数 $f(z)$ は、原点で正則であり、 $z_n = 2\pi i(n + 1/2)$ に1位の極をもつ。それらの極に対応する留数は、

$$\begin{aligned} \text{Res}_{z=2\pi i(n+1/2)} f(z) &= \lim_{z \rightarrow 2\pi i(n+1/2)} (z - 2\pi i(n + 1/2)) \frac{2e^{xz}}{e^z + 1} \\ &= \lim_{z=0} \frac{2z e^{2\pi i(n+1/2)x}}{-e^z + 1} = -2e^{2\pi i(n+1/2)x}, \end{aligned}$$

のように計算できる。なお、第2行目への数式変形のため、 $z \mapsto z + 2\pi i(n + 1/2)$ なる置き換えを適用した。このとき、 n が整数であるので、 $e^z \mapsto -e^z$ のように置き換えられる。

付録 B に記載する部分分数展開を適用するため、図 5.5 に示す閉曲線 C_N の上で関数の絶対値 $|f(z)|$ を評価してみよう。図に示す閉曲線 C_N は、極 z_{-N} から z_{N-1} を囲む閉曲線として、複素平面状の 4 点: $R + iR$, $-R + iR$, $-R - iR$, $R - iR$ を頂点とする正方形の外周である。まず、実軸に平行な経路 $z = \xi \pm iR$ では、関数の絶対値は、

$$|f(\xi \pm iR)| = \frac{2e^{x\xi}}{e^\xi + 1} \leq 2x^x(1-x)^{1-x},$$

のようになる。周期ベルヌーイ多項式を導出したときに説明したが、この絶対値が最大値をとるのは $e^\xi = x/(1-x)$ となるときである。また、この最大値は R に依存しない(さらに、ゼロではない)ので、 $|f(z)| = O(1)$ と考えればよい。もう一方、虚軸に平行な経路においては、

$$|f(R + i\eta)| = \left| \frac{2e^{xR}}{e^{R+i\eta} + 1} \right| = 2e^{-(1-x)R} = 0 \quad \text{as } R \rightarrow \infty,$$

$$|f(-R + i\eta)| = \left| \frac{2e^{-xR}}{e^{-R+i\eta} + 1} \right| = 2e^{-R} = 0 \quad \text{as } R \rightarrow \infty,$$

となる。したがって、閉曲線 C_N 全体では $|f(z)| = O(a) = o(R)$ である。

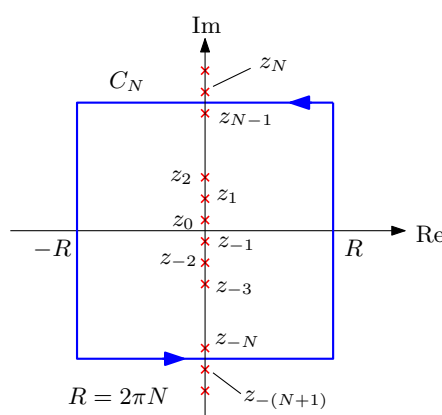


図 5.5: 関数 $f(z)$ の部分分数展開のための閉曲線

引き続き、付録 B に記載した方法にしたがって部分分数展開すると、

$$\frac{2e^{xz}}{e^z + 1} = -2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i(n+1/2)x} \left(\frac{1}{z - 2\pi i(n+1/2)} + \frac{1}{2\pi i(n+1/2)} \right),$$

となる。ベルヌーイ多項式の場合と異なり、ここでは $n = 0$ も総和の対称となっている。

ここから、部分分数展開された数式を変形し、フーリエ級数の形態で周期オイラー多項式を記述する。数式変形の便宜上、 x と z を実数としよう。そのとき、上記の左辺が実数関数であるので、右辺を計算するには実部のみを取り扱えばよい。その意味で、総和対象と

なる第2項は, z_n と $z_{-(n+1)}$ の組み合わせで実部が打ち消されるので省略することができる。また, 残された項に対して二項定理を適用すると,

$$\begin{aligned} \frac{2e^{xz}}{e^z + 1} &= -\operatorname{Re} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2e^{2\pi i(n+1/2)x}}{2\pi i(n+1/2) - z} \\ &= -\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} \frac{2e^{2\pi i(n+1/2)x}}{[2\pi i(n+1/2)]^{k+1}} z^k, \end{aligned} \quad (5.18)$$

のように変形される。上で説明したように, 左辺が実数関数であることがわかっているので, 右辺は実部のみを取り出して計算している。この式の左辺はオイラー多項式の指数型母関数であるので,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tilde{E}_k(x)}{k!} t^k = -\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} \frac{2e^{2\pi i(n+1/2)x}}{[2\pi i(n+1/2)]^{k+1}} z^k,$$

と書くことができる。ここで, オイラー多項式を $\tilde{E}_k(x)$ なる記号で書いたのは, 関数の定義域を $(0, 1)$ で制限しているため本来のオイラー多項式 $E_n(x)$ と区別するためである。この指数型母関数の展開係数を比較すれば,

$$\tilde{E}_k(x) = -2k! \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} \frac{e^{2\pi i(n+1/2)x}}{[2\pi i(n+1/2)]^{k+1}}, \quad (5.19)$$

が得られる。この結果は, オイラー多項式のフーリエ級数展開である。演算子 Re によって取り出される実部は, 偶数次か奇数次かによって異なり,

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{2k}(x) &= 4(-1)^{k-1}(2k)! \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin \pi(2n+1)x}{[\pi(2n+1)]^{2k+1}}, \\ \tilde{E}_{2k+1}(x) &= 4(-1)^{k-1}(2k+1)! \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \pi(2n+1)x}{[\pi(2n+1)]^{2k+2}}, \end{aligned}$$

となる。偶数次はフーリエ正弦級数, 奇数次はフーリエ余弦級数である。もともと, $0 < x < 1$ である仮定から考察を始めたのだが, この結果は, 奇数倍波によって合成された周期が2の周期関数である。特に, $\tilde{E}_1(x)$ の展開式を書くと,

$$\tilde{E}_1(x) = -4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \pi(2n+1)x}{[\pi(2n+1)]^2},$$

となる。この関数 $E_1(x)$ は周期2の三角波であるが, $0 \leq x \leq 1$ の条件でオイラー多項式 $x - 1/2$ と一致するので, この結果の正当性が確認できる。フーリエ級数展開によって表現される $\tilde{E}_k(x)$ は周期関数であるので, **周期オイラー多項式**と呼ばれる。周期オイラー多項式は周期が2であり, その周期性とオイラー多項式との関係は,

$$\tilde{E}_n(x) = E_n(x - [x]), \quad \tilde{E}_n(x+1) = (-1)^{n+1} \tilde{E}_n(x),$$

と表される。周期オイラー多項式のフーリエ級数展開によって、 $0 \leq x \leq 1$ におけるオイラー多項式 $E_k(x)$ の値域が

$$|E_k(x)| \leq \frac{8k!(2^k - 1)}{(2\pi)^{k+1}} \zeta(k), \quad (5.20)$$

のように特定できる。とくに次数 k が大きくなれば $\zeta(k) \approx 1$ とみなせるので、

$$|E_k(x)| \leq \frac{4k!}{\pi^{k+1}} \quad \text{for } k \text{ such that } \zeta(k) \approx 1$$

なる関係式が成り立つ。この関係式は、後に紹介するオイラー・ブールの和公式において剰余項の評価をするために有用な関係式である。

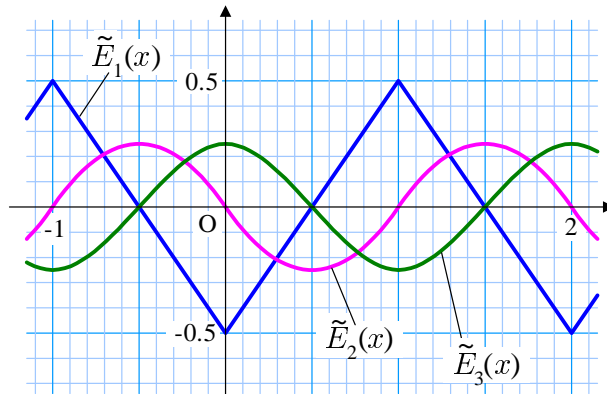


図 5.6: 周期オイラー多項式

5.2.4 奇数ゼータ関数類似の級数

奇数ゼータ関数を解析に取り扱うことは現代の数学では成功していないが、奇数次の調和級数の奇数項から再構成した交代級数は周期オイラー多項式を用いて評価できる。そのような奇数次の交代級数を $\xi(2k+1)$ なる記号で書くことにすると、

$$\xi(2k+1) = 1 - \frac{1}{3^{2k+1}} + \frac{1}{5^{2k+1}} - \frac{1}{7^{2k+1}} + \cdots$$

なる定義ができる。この関数を評価するには、周期オイラー多項式 $\tilde{E}_{2k}(x)$ のフーリエ正弦級数 (5.20) を利用すればよい。そのとき、変数には $x = 1/2$ を代入する。その条件で方程式をつくると、

$$(-1)^k 4(2k)! \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[\pi(2n+1)]^{2k+1}} = \frac{(-1)^k 4(2k)!}{\pi^{2k+1}} \xi(2k+1) = \frac{E_{2k}}{2^{2k}},$$

が得られる。なお、右辺はオイラー多項式の特値 (5.17) を用いて記述した。この関係式からただちに、

$$\xi(2k+1) = \frac{(-1)^k \pi^{2k+1}}{2^{k+2}(2k)!} E_{2k},$$

が得られる。記号 $\xi(2k+1)$ を戻すと、この数式は、

$$1 - \frac{1}{3^{2k+1}} + \frac{1}{5^{2k+1}} - \frac{1}{7^{2k+1}} + \cdots = \frac{(-1)^k \pi^{2k+1}}{2^{2k+2}(2k)!} E_{2k}, \quad (5.21)$$

のように書き換えることができる。この公式は、前章で紹介した公式である。前章で予告したように、周期オイラー多項式を用いて公式を導出することができた。

第6章 総和公式

数列の総和を評価するにあたり、その数列を連続関数で置き換え、離散的な総和の代わりに連続関数を定積分することで大まかな値を評価できる。例えば、 $1/k$ を k が 1 から 500 までにわたって加算した総和を評価する代わりに、連続関数 $1/x$ を積分変数 x について区間 $[1, 500]$ で定積分をしても近い値が得られる。しかし、総和と積分の間には誤差が生じる。その誤差をオイラー・マクローリンの総和公式によって評価できる。

6.1 オイラー・マクローリンの総和公式

オイラー・マクローリンの総和公式は、離散的な総和と連続関数の定積分の関係を記述するために、オイラーとマクローリンが独立に導いた公式である。本節では、オイラー・マクローリンの総和公式を導出し、その典型的な用途として、調和級数の評価や階乗の漸近展開を取り扱う。

関数 $f(x)$ の変数に整数 j を代入した値 $f(j)$ を、ある範囲の整数にわたって総和 $\sum f(j)$ を評価することを考えよう。関数 $f(x)$ が解析的に積分可能であれば、総和の粗い評価として $f(x)$ の積分を用いてもよいことが図 6.1 から推測できる。図に描いた曲線が関数 $f(x)$ であり、網掛けの面積が $f(x)$ を区間 $[0, n]$ で積分した結果である。一方、そのグラフに重ねて描いた長方形の面積の総和が整数 j を 1 から N まで増加しながらとった $f(j)$ の総和である。この図から、関数 $f(x)$ の導関数が小さければ、積分と総和はほぼ等しくなることがわかる。

例えば $1/j$ を $j = 1, 2, \dots, n$ まで増加させた総和は、 $1/x$ を $[1, n]$ で積分した $\log n$ に近い値であることが予想できる*ということである。実際には、総和と積分は異なる値となる。その総和と積分の関係は、

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n f(j) &= \int_0^n f(x) dx + \frac{1}{2} [f(n) - f(0)] \\ &\quad + \sum_{k=2}^m \frac{B_k}{k!} [f^{(k-1)}(n) - f^{(k-1)}(0)] + R_m(n), \end{aligned} \quad (6.1)$$

*整数 n が十分に大きな数であれば、オイラー数 γ を用いて $\sum_{j=1}^n 1/j \simeq \log n + \gamma$ となる。

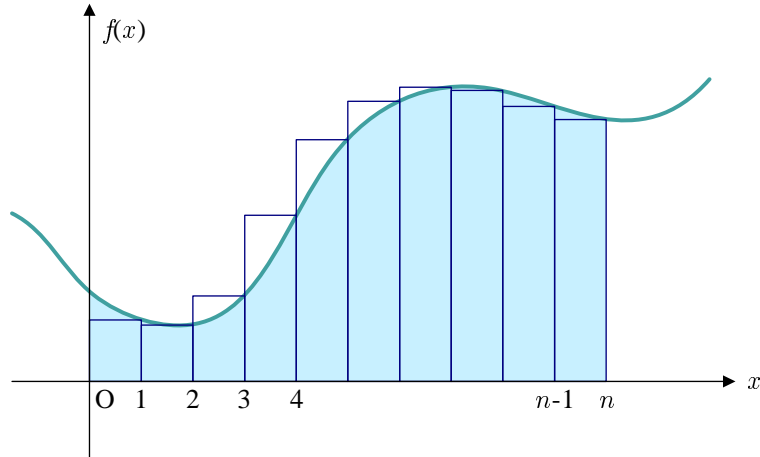


図 6.1: 関数 $f(x)$ の積分と $f(j)$ の総和の関係

なる形で記述される。この公式がオイラー・マクローリンの総和公式である。ただし、 $R_m(n)$ は剰余項であり、

$$R_m(n) = \frac{(-1)^{m-1}}{m!} \int_0^n \tilde{B}_m(x) f^{(m)}(x) dx,$$

のように定義される。さらに、 $\tilde{B}_m(x)$ は前節で導入した周期ベルヌーイ多項式である。周期ベルヌーイ多項式 $\tilde{B}_m(x)$ は区間 $[0, 1)$ を繰り返す多項式であり、

$$\tilde{B}_m(x+1) = \tilde{B}_m(x), \quad \tilde{B}_m(x) = B_m(x) \quad (0 \leq x < 1),$$

なる関係を満足する。ここで、 $B_m(x)$ は前節で紹介したベルヌーイ多項式である。ベルヌーイ数が $k \leq 1$ に対して $B_{2k+1} = 0$ であることに注意すると、オイラー・マクローリンの総和公式 (6.1) は、

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n f(j) &= \int_0^n f(x) dx + \frac{1}{2} [f(n) - f(0)] \\ &\quad + \sum_{k=1}^m \frac{B_{2k}}{(2k)!} [f^{(2k-1)}(n) - f^{(2k-1)}(0)] + R_{2m}(n), \end{aligned} \quad (6.2)$$

のように書き換えることができる。総和の範囲をもう少し一般化して、

$$\begin{aligned} \sum_{j=a+1}^b f(j) &= \int_a^b f(x) dx + \frac{1}{2} [f(b) - f(a)] \\ &\quad + \sum_{k=1}^m \frac{B_{2k}}{(2k)!} [f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)] + R_{2m}(a, b), \end{aligned} \quad (6.3)$$

という記述も可能である。なお、この場合の剰余項は、

$$R_{2m}(a, b) = -\frac{1}{(2m)!} \int_a^b \tilde{B}_{2m}(x) f^{(2m)}(x) dx,$$

のように定義されているとする。この剰余項は $R_{2m}(a, b) = R_{2m}(b) - R_{2m}(a)$ であると考えてもよい。本書での総和公式の適用において、積分区間の開始点 a は定数であることが多い。その場合、 $R_{2m}(a, b)$ の代わりに、積分区間の開始点 a の記載を省略し、 $R_{2m}(b)$ と記述する。一般化した記述 (6.3) は、次項で示す導出過程から明らかになるだろう。または、公式 (6.2) について、 $x \mapsto x + a$ のように置き換え、 $n + a = b$ を代入すれば、(6.3) が得られるはずだ。

6.1.1 公式の導出

本項では、オイラー・マクローリンの公式を導出する。公式の導出は、 $n = 1$ の場合について限定して証明し、 n を任意の自然数に拡張するという2段階のステップを実行する。

第1ステップとして、 $n = 1$ の場合に限定して証明してみよう。その場合、証明する関係式は、

$$\frac{1}{2} [f(1) + f(0)] = \int_0^1 f(x) dx + \sum_{k=2}^m \frac{B_k}{k!} [f^{(k-1)}(1) - f^{(k-1)}(0)] + R_m(1), \quad (6.4)$$

であり、そのときの剰余項は、

$$R_m(1) = \frac{(-1)^{m-1}}{m!} \int_0^1 \tilde{B}_m(x) f^{(m)}(x) dx,$$

のように計算される。剰余項を含めて (6.4) の右辺を計算すると、

$$\begin{aligned} \text{RHS of (6.4)} &= \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) f'(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 f'(x) dx = \frac{1}{2} [f(1) - f(0)] = \text{LHS of (6.4)}, \end{aligned}$$

となるので、 $m = 1$ の条件でオイラー・マクローリンの公式が成立していることがわかる。次に、部分積分を適用して剰余項 R_m を計算する。剰余項は、

$$\begin{aligned} R_m(1) &= \frac{(-1)^{m-1}}{m!} \int_0^1 \tilde{B}_m(x) f^{(m)}(x) dx \\ &= \frac{(-1)^{m-1}}{(m+1)!} [\tilde{B}_{m+1}(x) f^{(m)}(x)]_0^1 - \frac{(-1)^{m-1}}{(m+1)!} \int_0^1 \tilde{B}_{m+1}(x) f^{(m+1)}(x) dx \\ &= \frac{(-1)^{m-1} B_{m+1}}{(m+1)!} [f^{(m)}(1) - f^{(m)}(0)] + \frac{(-1)^m}{(m+1)!} \int_0^1 \tilde{B}_{m+1}(x) f^{(m+1)}(x) dx \\ &= \frac{(-1)^{m-1} B_{m+1}}{(m+1)!} [f^{(m)}(1) - f^{(m)}(0)] + R_{m+1}(1), \end{aligned}$$

と計算される。例えば、 $m = 1$ における剰余項 R_1 に対してこの計算結果を適用すると、

$$\begin{aligned} R_1(1) &= \frac{B_2}{2!} [f'(1) - f'(0)] + R_2 \\ &= \frac{B_2}{2!} [f'(1) - f'(0)] + \frac{B_3}{3!} [f^{(2)}(1) - f^{(2)}(0)] + R_3 \\ &= \sum_{k=2}^m \frac{B_m}{m!} [f^{(m-1)}(1) - f^{(m-1)}(0)] + R_m(1), \end{aligned}$$

が得られる。つまり、剰余項に対して部分積分を繰り返していくことによって、 $n = 1$ のときのオイラー・マクローリンの総和公式 (6.4) が成立することが導かれた。

第2ステップとして、任意の自然数 a を用いて、証明された公式 (6.4) に関して $f(x)$ を $f(x+a)$ で置き換える。すると、その総和公式 (6.4) は、

$$\begin{aligned} f(a+1) &= \int_a^{a+1} f(x) dx + \frac{1}{2} [f(a+1) - f(a)] \\ &\quad + \sum_{k=2}^m \frac{B_k}{k!} [f^{(k-1)}(a+1) - f^{(k-1)}(a)] + R_m(a+1) - R_m(a), \end{aligned}$$

のように書き換えることができる。この結果に対し、 a を 0 から $n-1$ まで増加させて和をとると、オイラー・マクローリンの総和公式 (6.1) が得られる。また、容易にわかるように、公式 (6.1) は、

$$\sum_{j=a+1}^n f(j) = \int_a^n f(x) dx + \sum_{k=1}^m \frac{B_k}{k!} [f^{(k-1)}(n) - f^{(k-1)}(a)] + R_m(n) - R_m(a), \quad (6.5)$$

のように書き換えることができる。なお、 $B_1 = -1/2$ なる事実を用いた。この関係式が、総和の範囲を一般化した公式 (6.3) である。よって、オイラーマクローリンの公式が導出できた。◀

オイラー・マクローリンの総和公式は便利な公式であるが万能ではなく、取り扱いに注意を要する。その公式の使用において、剰余項 $R_m(n) - R_m(a)$ を除く右辺の項は左辺の近似式として解釈される。つまり、剰余項は誤差として取り扱われるわけだが、次数 m を増加させると、ほとんどの場合において、誤差を表す剰余項が発散するからである。前節で導出した周期ベルヌーイ多項式の絶対値に関する法則 $|\tilde{B}_m(x)| \leq 2m!/(2\pi)^m$ を考慮して、剰余項の絶対値の範囲を計算すると、

$$\begin{aligned} |R_m(n) - R_m(a)| &= \frac{1}{m!} \int_a^n \tilde{B}_m f^{(m)}(x) dx \\ &\leq \frac{2}{(2\pi)^m} \int_a^n f^{(m)}(x) dx, \end{aligned}$$

となる。テイラー級数の剰余項の分母に $m!$ が含まれていたことと比べると、オイラー・マクローリンの総和公式の剰余項が発散しやすいことがわかるだろう。

6.1.2 べき乗和への応用

オイラー・マクローリンの公式の応用として、整数の3乗和を計算してみよう。そのために $f(x) = x^3$ とおいてみる。この関数を微分してみると、 $f'(x) = 3x^2$, $f^{(2)}(x) = 6x$, $f^{(3)}(x) = 6$ となり、4階以上の導関数がゼロとなるので、整数の3乗和はオイラー・マクローリンの総和公式において4次以上の剰余項は必ずゼロとなる。具体的に計算してみると、計算結果は

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n j^3 &= \int_1^n x^3 dx + \frac{n^3 + 1}{2} + \sum_{k=2}^3 \frac{B_k}{k!} [f^{(k-1)}(n) - f^{(k-1)}(1)] \\ &= \frac{n^4 - 1}{4} + \frac{n^3 + 1}{2} + \frac{n^2 - 1}{4} = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2,\end{aligned}$$

となり、よく知られた整数の3乗和の公式と一致する。この場合、剰余項は、

$$R_4(n) = \int_0^n \tilde{B}_4(x) f^{(4)}(x) dx,$$

となる。この例では、必ず、 $f^{(4)}(x) = 0$ となるので剰余項はゼロである。その理由で、上記のオイラー・マクローリンの総和公式の適用結果には剰余項の記述を省略したのだ。

得られた結果に対し、 $n \rightarrow \infty$ の極限をとると、 j^3 の総和は発散する。当然の性質であるが、 j^3 の無限級数が発散級数であることを意味する。第6.1.6項に発散級数にオイラー・マクローリンの総和公式を適用し、有限の値となるゼータ関数に結びつける手法について説明する。

6.1.3 階乗の漸近形式

オイラー・マクローリンの総和展開に適用する関数を $f(x) = \log x$ とすると、階乗の漸近公式を得ることができる。なぜなら、総和公式が評価する値が、 $\log 1 + \log 2 + \dots + \log n = \log n!$ となるからだ。階乗 $n!$ は n の増加とともにすさまじい勢いで増加する関数であるだけでなく、1から n まで順次に乗じて計算する関数であるので、大きな n に対して $n!$ を計算することは現実的でないことがある。その意味で、階乗の漸近展開を得ることに大きな意味がある。

関数 $f(x) = \log x$ を対象とし、高次導関数を計算すると、 $f^{(m)}(x) = (-1)^{m-1}(m-1)!/x^m$ となるのが容易にわかる。対象関数をこのように定義すると、 $f(0)$ が発散するため、公式(6.2)は使えない。その代わりに(6.3)を利用すればよい。オイラー・マクローリンの総和公式で取り扱う関数は、階乗 $n!$ の対数:

$$\log n! = \sum_{j=1}^n \log j = \sum_{j=2}^n \log j,$$

である。この等式が成立するのは $\log 1 = 0$ であることが理由である。オイラー・マクローリンの総和公式を適用すると、

$$\sum_{j=2}^n \log j = n \log n - n + 1 + \frac{1}{2} \log n + \sum_{k=1}^m \frac{B_{2k}}{2k(2k-1)} \left(\frac{1}{n^{2k-1}} - 1 \right) + R_{2m}(n), \quad (6.6)$$

が得られる。定義にしたがって剰余項 $R_{2m}(n)$ を記述すると、

$$R_{2m}(n) = \frac{1}{2m} \int_1^n \frac{\tilde{B}_{2m}(x)}{x^{2m}} dx,$$

となる。剰余項 $R_{2m}(n)$ は、 n に依存する項と依存しない項に分離することができる。その分離方法は任意であり、一例として、

$$R_{2m}(n) = \frac{1}{2m} \left(\int_2^{n-1} \frac{\tilde{B}_{2m}(x)}{x^{2m}} dx + \int_1^2 \frac{\tilde{B}_{2m}(x)}{x^{2m}} dx \right),$$

なる数式を挙げるができる。右辺の第1項は n に依存し、第2項は n に依存しない。とはいえ、第1項はさらに n に依存する項と依存しない項に分離できるので、 n にしか依存しない項を抽出するのは一般的には困難である。後に示すように、 $R_{2m}(\infty)$ が有限の値であれば、その値を n に依存しない項とすることが有効である。

オイラー・マクローリンの公式を適用した数式 (6.6) から $\log n!$ を得ることができる。具体的に数式を記述すると、

$$\log n! = n \log n - n + \frac{1}{2} \log n + C_n + \frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + \frac{1}{1260n^5} + \dots,$$

が得られる。ここで、 C_n は剰余項 $R_{2m}(n-1)$ のうち、 n に依存しない係数項である。この場合、剰余項を完全に n の依存項と、係数項に分離したときの係数項を意味する。上で述べたように、係数項 C_n を抽出するのが困難であるので、後に、数学的な考察によって C_n を決定する。未知数 C_n を残したまま $n!$ を記述すると、

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{n} e^{C_n} \exp \left(\frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + \frac{1}{1260n^5} + \dots \right), \quad (6.7)$$

なる式が得られる。さらに、指数関数 $\exp(1/12n - \dots)$ をマクローリン展開してみよう。指数関数のマクローリン展開の各項を $1/n$ の5次の項まで計算すると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{1!} \left(\frac{1}{12n} - \dots \right)^1 &= \frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + \frac{1}{1260n^5} + \dots \\ \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{12n} - \dots \right)^2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{144n^2} - \frac{2}{4320n^4} + \dots \right) = \frac{1}{288n^2} - \frac{1}{4320n^4} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{3!} \left(\frac{1}{12n} - \dots \right)^3 &= \frac{1}{6} \left(\frac{1}{1728n^3} - \frac{3}{51840n^5} + \dots \right) = \frac{1}{10368n^3} - \frac{1}{103680n^5} + \dots \\ \frac{1}{4!} \left(\frac{1}{12n} - \dots \right)^4 &= \frac{1}{24} \left(\frac{1}{20736n^4} - \dots \right) = \frac{1}{497664n^4} - \dots \\ \frac{1}{5!} \left(\frac{1}{12n} - \dots \right)^5 &= \frac{1}{120} \left(\frac{1}{248832n^5} - \dots \right) = \frac{1}{29859840n^5} - \dots,\end{aligned}$$

を得る。これらの結果を加算すると指数関数がマクローリン展開でき、

$$\begin{aligned}n! = n^n e^{-n} \sqrt{n} e^{C_n} &\left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{51840n^3} \right. \\ &\left. - \frac{571}{2488320n^4} + \frac{163879}{209018880n^5} + \dots \right),\end{aligned}$$

が得られる。係数 C_n の決定には、ウォリス積:

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)},$$

が有用である。ウォリス積を変形すると、

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{4n} (n!)^4}{(2n+1)((2n)!)^2},$$

と書き直すことができる。この式に、階乗の漸近形式 $n! \simeq n^n e^{-n} \sqrt{n} e^{C_n}$ を代入すると、 $e^{C_n} = \sqrt{2\pi}$ が得られる。よって、上の式は

$$\begin{aligned}n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} &\left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{51840n^3} \right. \\ &\left. - \frac{571}{2488320n^4} + \frac{163879}{209018880n^5} + \dots \right), \quad (6.8)\end{aligned}$$

のように書き換えることができる。この結果はスターリングの公式と呼ばれる。スターリングの公式のゼロ次近似 ($n! \simeq \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$) を表 6.1 に示す。この表によると、 $n = 100$ で 10 進 2 桁程度の精度が得られている。変数が 10^8 になると 10 進 9 桁程度の精度となる。

表 6.1 に示すように、階乗は変数の増加とともにすさまじい勢いで増加するので、この公式よりも、 $\log n!$ の方が取り扱いやすいかもしれない。数式 (6.7) の対数をとると、

$$\log n! = n(\log n - 1) + \log \sqrt{2\pi n} + \frac{1}{12n} - \frac{1}{230n^3} + \frac{1}{1260n^5} + \dots \quad (6.9)$$

が得られる。統計力学のように、非常に大きな n (10^{23} のオーダー) を取り扱う場合、右辺の第 2 項以降は無視できるとみなされ、 $\log n! \simeq n(\log n - 1)$ のように近似される。

スターリングの公式の導出において、剰余項を含め、 n に依存しない項の総和が収束すると仮定した。その仮定のもとでは、剰余項のうち n に依存する部分がスターリングの公

表 6.1: スターリングの公式のゼロ次近似

n	$n!$	$\sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$
10^1	3.628800000×10^6	3.5986956187×10^6
10^2	$9.3326215443 \times 10^{157}$	$9.3248476252 \times 10^{157}$
10^3	$4.0238726007 \times 10^{2567}$	$4.0235372920 \times 10^{2567}$
10^4	$2.8462596809 \times 10^{35659}$	$2.8462359621 \times 10^{35659}$
10^5	$2.8242294079 \times 10^{456573}$	$2.8242270544 \times 10^{456573}$
10^6	$8.2639316883 \times 10^{5565708}$	$8.2639309996 \times 10^{5565708}$
10^7	$1.2024234005 \times 10^{65657059}$	$1.2024233904 \times 10^{65657059}$
10^8	$1.6172037949 \times 10^{756570556}$	$1.6172037935 \times 10^{756570556}$

式の誤差となる。つまり、その誤差は、

$$\begin{aligned} |R_{2m}(n) - R_{2m}(\infty)| &= \left| \frac{1}{(2m)!} \int_n^\infty \tilde{B}_{2m}(x) \frac{(2m-1)!}{x^{2m}} dx \right| \\ &\leq \frac{2(2m-2)!}{(2\pi)^{2m} n^{2m-1}}, \end{aligned}$$

となるので m を限りなく増加させるとオイラー・マクローリンの公式は発散する。しかし、 m を十分大きくとっても、 $n > m$ であれば誤差は十分に小さくなる。よって、スターリングの公式の有効条件は n が漸近展開の次数 m より大きいことである。

6.1.4 オイラー定数

オイラー・マクローリンの公式を利用すると、オイラー定数を計算することができる。オイラー定数は本書で何度も取り扱った $\gamma \simeq 0.57721566\dots$ である。この定数は、無理数かどうか不明な定数であるが、本項でその計算方法の一例を示す。オイラー定数は、調和級数と対数の差、すなわち、

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{j} - \log n \right),$$

で定義される。積分公式から、 $1/x$ の原始関数が $\log x$ であるので、 $1/j$ の総和は $\log n$ に近い値となる。具体的に上にあげた数式が $n \rightarrow \infty$ の極限で収束することは第4章で示した。

オイラー定数 γ を得るには、オイラー・マクローリンの総和公式に適用する関数を $f(x) = 1/x$ とし、 $j = 1, 2, \dots, n$ にわたる総和を、

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{j} = 1 + \sum_{j=2}^n \frac{1}{j},$$

のように考える。右辺をこのように分割したのは、オイラー・マクローリンの総和公式の適用において、分割をしなければ $f(0)$ が必要になるので都合が悪いからである。右辺を分割したことによって、右辺の第2項に対して、オイラー・マクローリンの公式(6.3)を適用することになるので、幸いにも、 $f(0)$ を使わないでもよくなるのだ。対象となる関数 $f(x)$ の高階の導関数は $f^{(m)}(x) = (-1)^m m! / x^{m+1}$ となる。これらに注意すると、オイラー・マクローリンの総和公式は、

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} &= 1 + \sum_{j=2}^n \frac{1}{j} \\ &= 1 + \log n + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^m \frac{B_{2k}}{2k} \left(1 - \frac{1}{n^{2k}}\right) + R_{2m}(n), \end{aligned} \quad (6.10)$$

となる。一方、剰余項 $R_{2m}(n)$ は、

$$R_{2m}(n) = -\frac{1}{(2m)!} \int_1^n \frac{(2m)! \tilde{B}_{2m}(x)}{x^{2m+1}} dx,$$

のように定義される。剰余項の被積分関数に周期ベルヌーイ多項式 $\tilde{B}_{2m}(x)$ が含まれているので、任意の m に対して解析的に積分を実行するのは容易ではない。その代わりに、

$$|B_{2m}(x)| \leq \frac{2(2m)!}{(2\pi)^{2m}} \zeta(2m),$$

であることを利用すると、

$$|R_{2m}(n)| < \frac{4m(2m)!}{(2\pi n)^{2m}} \zeta(2m),$$

なる関係が導かれる。この関係式より、 $n \geq m$ なる n を選び、そのうえで m を十分に大きくとれば、剰余項をゼロに近づけることができる。オイラー・マクローリンの総和公式から導出した(6.11)に対して、 $n \rightarrow \infty$ の極限をとると、

$$\log n + \gamma = \log n + \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^m \frac{B_{2k}}{2k}, \quad (6.11)$$

が得られる。この極限(6.11)から即座に γ が計算できそうであるが、そうはいかない。なぜなら、 $B_k/2k$ が k の増加とともに、階乗と同程度の速度で増加するからである。一方、(6.10)と(6.11)の差をとると、

$$\gamma = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} - \log n - \frac{1}{2n} + \sum_{k=1}^m \frac{B_{2k}}{2k n^{2k}} - R_{2m}(n),$$

が得られる。その結果、ベルヌーイ数を含む項が $B_{2k}/2kn^{2k}$ になるため、増加が抑制される。上に書いたように $n \gg m$ となるように n を選べば、 $B_{2k}/2kn^{2k}$ は k の増加に対して単調減少する。したがって、 n が大きいという条件のもとでオイラー定数は、

$$\gamma = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} - \log n - \frac{1}{2n} + \frac{1}{12n^2} - \frac{1}{120n^4} + \frac{1}{252n^6} + \cdots, \quad (6.12)$$

なる漸近形式で計算することができる。ここで、剰余項 $R_{2m}(n-1)$ は十分小さくできるものとして省略した。得られた漸近展開による近似精度を図 6.2 に示す。近似精度と書いたが、実際には $-2m-2$ 次の項の絶対値をプロットした。このグラフには、 n を媒介変

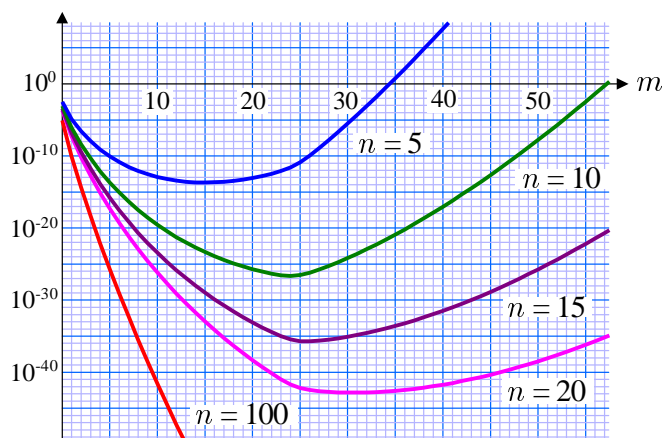


図 6.2: 漸近展開によるオイラー定数の近似精度

数としたときの、打ち切り項数 m による依存性を示している。一般の漸近展開と同様、打ち切り項数を増加すると、途中で誤差が増加に転じる。理屈としては、 $n \gg m$ の関係が崩れると、計算精度の向上が望めないのだ。打ち切り項数 m をさらに増加させると誤差が発散する。そのため、実際の数値計算においては、目標精度に応じて n と m を選択することが必要である。このグラフによると、倍精度浮動小数点の精度 (10 進数 15 桁) であれば、 $n = 10$ で、打ち切り項数 $m = 8$ で十分だろう。

図 6.2 で、 $n = 100$ とした場合、 $m = 7$ で 10 進数 30 桁の精度が得られると予想されている。その近似精度を検証しよう。オイラー定数を計算すると、表 6.2 の結果を得る。表に示す計算結果は、誤差がある桁を淡色表示している。なお、 $m = 0$ の近似結果は、(6.12) の右辺の第 3 項まで計算した値である。この数値計算によって、確かに、打ち切り項数 $m = 7$

表 6.2: オイラー定数の計算結果

m	計算結果
0	0.57720 73316 51528 89276 91347 66289
1	0.57721 56649 84862 22610 24680 99622
2	0.57721 56649 01528 89276 91347 66289
3	0.57721 56649 01532 86102 31030 20257
4	0.57721 56649 01532 86060 64363 53591
5	0.57721 56649 01532 86060 65121 11166
6	0.57721 56649 01532 86060 65120 90074
7	0.57721 56649 01532 86060 65120 90082

で10進数30桁まで正確に計算できることが実証されている。しかも、 m の増加とともに精度向上を追ってみると、図6.2との一致が確認できる。

6.1.5 ゼータ関数の計算

前項で、オイラー・マクローリンの総和公式がオイラー定数の計算に有用であることを確認した。オイラー定数の計算は、調和級数に関する数学定数であるので、高次の調和級数であるゼータ関数の計算にも有用であることが予想できる。本項では、オイラー・マクローリンの総和公式を利用してゼータ関数を計算する。

第4章でゼータ関数の解析をし、整数変数におけるゼータ関数の振る舞いを明らかにしたが、任意の関数における振る舞いには言及していなかった。ゼータ関数 $\zeta(s)$ は s 次の調和級数:

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s},$$

として定義される。変数 s が大きければ定義式でも十分な収束速度を得られる。その場合、 $\zeta(s)$ をちよっくせつ計算する代わりに、 s 次の交代調和級数:

$$\eta(s) = 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \cdots$$

を利用するとよい。交代調和級数を利用する利点は、誤差見積もりをしやすいことである。例えば、 n 項で演算を打ち切ったときの誤差は $1/(n+1)^s$ より小さいことが明らかである。さらに、 $\eta(s) = (1 - 2^{-s+1})\zeta(s)$ なる関係を利用して、

$$\zeta(s) = \frac{\eta(s)}{1 - 2^{-s+1}},$$

によってゼータ関数を計算するのである。倍精度浮動小数点(10進数15桁)の演算精度を得るために、10項程度の打ち切り項数で計算するには $s > 15$ でなければならない。つまり、 $s \leq 15$ については、収束が遅いので他の計算アルゴリズムが必要ということだ。

小さい s についても速く収束させる方法として、オイラー・マクローリンの総和公式を適用してみよう。総和公式を適用するにあたり、 $f(x) = 1/x^s$ を設定する。すると、 $f(x)$ の m 階の導関数は、

$$f^{(m)}(x) = (-1)^m \frac{s(s+1)(s+2)\cdots(s+m-1)}{x^{s+1}},$$

となる。このような関数の設定によって、マクローリン総和公式は、

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{j^s} = 1 + \sum_{j=2}^n \frac{1}{j^s}$$

$$= 1 + \frac{1}{s-1} \left(\frac{1}{n^{s-1}} - 1 \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n^s} - 1 \right) + \sum_{k=1}^m \frac{(-1)^{2k+1} s(s+1)(s+2) \cdots (s+2k-2) B_{2k}}{(2k)!} \left(\frac{1}{n^{s+2k-1}} - 1 \right), \quad (6.13)$$

のように記述できる。この公式について、 $n \rightarrow \infty$ の極限をとると、オイラー・マクローリンの総和公式は、

$$\zeta(s) = \frac{1}{2} - \frac{1}{s-1} + \sum_{k=1}^m \frac{(-1)^{2k+1} s(s+1)(s+2) \cdots (s+2k-2) B_{2k}}{(2k)!}, \quad (6.14)$$

のように書き換えられる。この級数でゼータ関数を計算することは可能だが、 m の増加に対して収束が遅いのが問題である。その問題を解決するには、(6.14)から(6.13)を減算するとよい。減算の結果、

$$\zeta(s) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j^s} + \frac{1}{(s-1)n^{s-1}} - \frac{1}{2n^s} + \sum_{k=1}^m \frac{s(s+1)(s+2) \cdots (s+2k-2) B_{2k}}{(2k)! n^{s+2k-1}}, \quad (6.15)$$

なる公式が得られる。この公式の使い方としては、 j が1から n の範囲にわたって $1/j^s$ の総和を計算しておく。得られた総和に、(6.15)の右辺の第2項と第3項を加算し、第4項に記述する総和によって演算結果を補正する。その補正項の打ち切り項数によって、図6.3に示すように演算精度が変化する。この図は、 $n = 10$ の条件で誤差を評価した結果を表している。つまり、補正項の追加をする前に、定義式にしたがった加算を10項だけ実行している。上で述べたように、ゼータ関数の変数が $s = 15$ のとき、補正項なしでも10進数

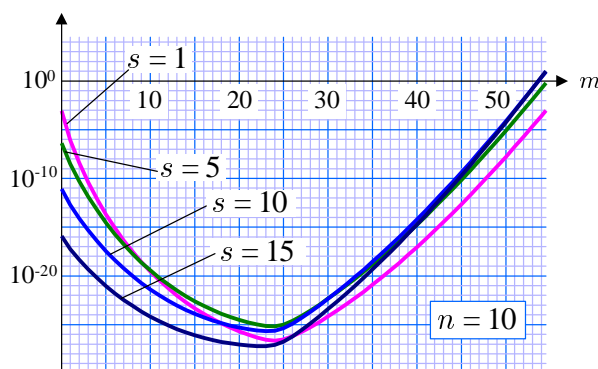


図 6.3: オイラー・マクローリンの総和公式による $\zeta(s)$ 近似精度

15桁の精度が達成されている。変数 s が小さくなると補正項が必要であるが、それでも、 $m = 8$ で10進数15桁の精度は確保できる。

6.1.6 発散級数の評価

ゼータ関数は、 $\zeta(s) \equiv 1^{-s} + 2^{-s} + 3^{-s} + \dots$ のように定義されているので、負の整数変数に対して、 $\zeta(-n) = 1^n + 2^n + 3^n + \dots$ と結びつけられると考えられるかもしれない。しかし、この数式の右辺は発散するので左辺と等号で結ぶのは正しくない。とはいえ、解析接続の結果として、右辺は $\zeta(-n) = -B_{n+1}/(n+1)$ と結びつけられるため、発散級数 $1^n + 2^n + 3^n + \dots$ と $\zeta(-n)$ の間に何らかの関係があるかもしれない。本項ではその関係性を考察する。

第一に、 $n = 1$ の場合、すなわち、 $1 + 2 + 3 + 4 + \dots$ なる無限級数について考察しよう。この級数と $\zeta(-1)$ の関係性を調べるのだ。当然、この級数は発散するので、加算するにあたり、

$$\sum_{k=0}^{\infty} k \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} k g(k),$$

のように因数 $g(k)$ を乗じて加算することにする。因数 $g(k)$ を、信号処理の手法にならって窓関数と呼ぶことにしよう。窓関数 $g(k)$ は大きくない k について $g(k) \simeq 1$ であり、十分に大きな k についてべき級数よりも速くゼロに収束するものとする。そのようにすることで、級数の発散を抑えようというのだ。その条件を満たす窓関数として、 $g(k) \equiv e^{-\varepsilon k}$ が考えられる。係数 ε として非常に小さな値をとれば、大きくない k について $g(k) \simeq 1$ とすることができ、しかも、指数関数なので、 k の増加に対して、どのべき級数よりも速くゼロに収束する。

上の考察にしたがい、 k の無限級数の代わりに、 $ke^{-\varepsilon k}$ の無限級数を計算しよう。この無限級数の評価のためにオイラー・マクローリンの総和公式を利用するなら、 $f(x) \equiv xe^{-\varepsilon x}$ を定義する。定義した関数 $f(x)$ の導関数を順次計算すると、

$$\begin{aligned} f'(x) &= (1 - \varepsilon x) e^{-\varepsilon x} = e^{-\varepsilon x}, \\ f''(x) &= -\varepsilon e^{-\varepsilon x} = 0, \\ &\vdots \\ f^{(m)}(x) &= 0 \quad (m \geq 2), \end{aligned}$$

が得られる。この計算において、 $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限をとった。この導関数の計算によると、オイラー・マクローリンの総和公式 (6.2) において、 m を大きくとれば剰余項 $R_{2m}(x)$ を確実にゼロにできる。ここまでに計算した要素をオイラー・マクローリンの総和公式に代入すると、

$$\sum_{j=0}^{\infty} j e^{-\varepsilon j} = \int_0^{\infty} x e^{-\varepsilon x} dx - \frac{1}{12} = \frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{1}{12},$$

が得られる。既に述べたように、 $\varepsilon \rightarrow 0$ なので、この数式の右辺は発散する。そもそも、 $1+2+3+\dots$ が発散級数なので当然である。しかし、右辺の第1項が勝手に設定したパラメー

タ ε に依存するのに対し, 第2項は ε に依存しない定数である。つまり, $-1/12 (= \zeta(-1))$ は発散級数に隠された本質的な値であるとの解釈ができるかもしれない。

次の例として, $n = 0$ の条件で発散級数と $\zeta(-n)$ の関係を考察しよう。その例に相当する無限級数とは, $1 + 1 + 1 + \dots$ のように1を無限に加算する級数である。当然, この級数に対しても窓関数 $e^{-\varepsilon j}$ を乗じて級数を計算する。その級数計算にオイラー・マクローリンの総和公式を適用するため, 関数 $f(x) = 1 \cdot e^{-\varepsilon x}$ を定義すればよい。このとき, 導関数を計算すると,

$$f'(x) = -\varepsilon e^{-\varepsilon x} = 0,$$

$$f^{(m)}(x) = (-1)^m \varepsilon^m e^{-\varepsilon x} = 0 \quad (m \geq 2),$$

となる。これらの導関数として, $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限をとった。つまり, 1階以上の導関数はすべてゼロである。いうまでもなく, 剰余項 $R_m(x)$ はゼロとなるはずだ。これらの導関数をオイラー・マクローリンの総和公式に適用すると,

$$\sum_{j=0}^{\infty} 1 \cdot e^{-\varepsilon j} = \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon x} dx - \frac{1}{2} \cdot f(0) = \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2},$$

が得られる。右辺の第1項は発散項であると同時に, 勝手なパラメータ ε に依存する項である。その ε に依存する項を除くと, $-1/2 (= \zeta(0))$ が残るのである。

これまでに得られた数式をさらに拡張する意味で, 発散級数 $1^p + 2^p + 3^p + \dots$ について考察しよう。ここで, 指数 p は正の整数である。ここでも, $x \rightarrow \infty$ の極限で x のべき級数よりも速くゼロに収束する窓関数として, $g(x) = e^{-\varepsilon x}$ を仮定する。その窓関数を乗じた関数 $f(x)$ についてオイラー・マクローリンの総和公式を適用する。総和公式を適用するにあたり, 導関数を順次計算すると,

$$f'(x) = (px^{p-1} - \varepsilon x^p) e^{-\varepsilon x} = px^{p-1} e^{-\varepsilon x},$$

$$f''(x) = (p(p-1)x^{p-2} - \varepsilon px^{p-1}) e^{-\varepsilon x} = p(p-1)x^{p-2} e^{-\varepsilon x},$$

$$\vdots$$

$$f^{(k)}(x) = p(p-1)(p-2)\cdots(p-k+1)x^{p-k} e^{-\varepsilon x},$$

が得られる。ここで, $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限をとった。指数 p が整数であるので, $m \geq p+1$ のとき, $f^{(m)}(x) = 0$ とすることが可能だ。つまり, オイラー・マクローリンの総和公式において, $m \geq p+1$ なる m を選べば剰余項 $R_m(x)$ を確実にゼロにできる。得られた情報をオイラー・マクローリンの総和公式に適用すると,

$$\sum_{j=1}^{\infty} j^p e^{-\varepsilon j} = \int_0^{\infty} x^p e^{-\varepsilon x} dx - \frac{B_{p+1}}{p+1}$$

$$= \frac{p!}{\varepsilon^{p+1}} - \frac{B_{p+1}}{p+1} = \frac{p!}{\varepsilon^{p+1}} + \zeta(-p),$$

が得られる。右辺の第1項は、ガンマ関数の積分表示に注意すれば導出できる。右辺の第1項は、勝手に選んだパラメータ ε に依存する項であり、 $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限で発散する。極限として発散するのは、もともと、 j^p の総和が発散級数だからだ。ここで、 ε に依存する項を取り除くと、 $\zeta(-p)$ が残ることになり、やはり、 j^p の総和を解析接続した関数 $\zeta(-p)$ と一致した。ここまで示すと、本来発散するはずの j^p についての無限級数がゼータ関数 $\zeta(-p)$ と無関係とは思えないだろう。

異なる窓関数を適用した場合 発散級数とゼータ関数の関係を示したものの、やはり、うさん臭い気がするかもしれない。発散級数に乗じた窓関数 $g(k)$ に依存する疑いがあるのだ。そこで、小さい k に対して $g(k) \simeq 1$ を満たし、十分に大きい k ではべき級数より速くゼロに収束する関数として、 $g(k) = e^{-\varepsilon k^2/2}$ を考えてみよう。ここでは、 $1 + 2 + 3 + \dots$ に窓関数を乗じ、

$$\sum_{k=0}^{\infty} k e^{-\varepsilon k^2/2},$$

を評価しよう。連続関数 $x e^{-\varepsilon x^2/2}$ の原始関数が $\varepsilon^{-1} e^{-\varepsilon x^2/2}$ であることが容易にわかるので、オイラー・マクローリンの総和公式を利用するのがよさそうだ。オイラー・マクローリンの総和公式を利用するにあたり、 $f(x) = x e^{-\varepsilon x^2/2}$ とおいて、導関数を順次計算すると、

$$\begin{aligned} f'(x) &= (1 - \varepsilon x^2) e^{-\varepsilon x^2/2} = e^{-\varepsilon x^2/2}, \\ f''(x) &= (-3\varepsilon x + \varepsilon^2 x^3) e^{-\varepsilon x^2/2} = 0, \\ f'''(x) &= (-3\varepsilon + 6\varepsilon^2 x^2 - \varepsilon^3 x^4) e^{-\varepsilon x^2/2} = 0, \end{aligned}$$

が得られる。ここで、 $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限をとった。容易に予想できるように、これより高階の導関数は、すべてゼロになる。一方、 $x \rightarrow \infty$ の極限を考えると、1階の導関数もゼロになる。これらの値をオイラー・マクローリンの総和公式に代入すると、

$$\sum_{k=0}^{\infty} k e^{-\varepsilon k^2/2} = \int_0^{\infty} x e^{-\varepsilon x^2/2} dx - \frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{B_2}{2} f'(0) = \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{12},$$

が得られる。右辺の第1項は $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限で発散するが、これはもともと発散級数であることに起因する。第2項は勝手なパラメータ ε に依存しない項であり、ここでもやはり $\zeta(-1) = -1/12$ と等しくなっている。

繰り込みとラマヌジャン総和法 発散級数から発散項を取り除き、本質的な性質を表す量だけを取り出す手法を物理学では繰り込みと呼ばれる。繰り込みに相当する例として、ラマヌジャン総和法を紹介しておこう。関数 $f(x)$ が与えられたとき、その関数による級数 $f(0) + f(1) + f(2) + \dots$ が発散級数であるとき、ラマヌジャン総和法によると、

$$\sum_{j=0}^{\infty} {}^* f(j) = -\frac{1}{2} f(0) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} f^{(2k-1)}(0), \quad (6.16)$$

のように記述できる。ここで、総和記号の右肩にアスタリスク(*)を付した記号 Σ^* がラマヌジャン総和法における総和記号であるとする[†]。ラマヌジャン総和法は、発散級数に適切な窓関数を乗じてオイラー・マクローリンの総和公式を適用した結果に対し、発散項を取り除いた値を与えている。ラマヌジャン総和法を利用すると、

$$\sum_{k=0}^{\infty} *j^p = \zeta(-p),$$

となる。まさに、ラマヌジャン総和法は発散級数に繰り込みを適用した結果を与えるのだ。なお、ラマヌジャンはラマヌジャン総和法によって計算される値を、級数 $\Sigma f(j)$ の定数と呼んでいた[‡]。

繰り込みに相当する例が実在することが実験でもわかっている。その例は、カシミール効果と呼ばれる量子物理の現象である。金属板を2枚平行に接近して配置したとき、その金属板が帯電していないにも関わらず互いに引力が働くのである。引力発生メカニズムは、金属板が近傍に配置されているときとされていないときでエネルギーが異なり、よりエネルギーが低い状態に移ろうとするため金属板の間に引力が働くのである。カシミール効果における本質部分のみを数式として抽出すると、

$$\sum_{j=1}^{\infty} j^3 - \int_0^{\infty} x^3 dx = \zeta(-3) = \frac{1}{120},$$

である。左辺の第1項が近傍に金属板が配置されたときのエネルギー、第2項が金属板が近傍に存在しないときのエネルギーである。数式の上では、どちらのエネルギーも発散しているのだが、差をとると有限の値に繰り込まれるのである。カシミール効果は1948年にカシミール(Casimir)が予言し、1996年にラモロー(Lamoreaux)が実証した。ゼータ関数は量子力学を先取りしたかのような数学的ツールであるといえる。

6.2 オイラー・ブールの総和公式

オイラー・マクローリンの総和公式に類似した関係式として、オイラー・ブールの総和公式を紹介しよう。オイラー・ブールの総和公式は、交代級数の評価に適している。形式的に、オイラー・ブールの総和公式は、

$$\sum_{j=a}^{n-1} (-1)^j f(j+h) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{E_k(h)}{k!} \left[(-1)^{n-1} f^{(k)}(n) + (-1)^a f^{(k)}(a) \right] + R_m(n) - R_m(a), \quad (6.17)$$

[†]これは一般的な記法ではなく、本書に限り、筆者が導入した記法である。

[‡]黒川信重, “ラマヌジャンの衝撃,” 現代数学社, ISBN 978-4-7687-0447-9, p. 84, 2015.

なる形式で記述される。ただし、剰余項 $R_m(n)$ は、

$$R_m(n) = \frac{1}{2(m-1)!} \int_a^n f^{(m)}(x) \tilde{E}_{m-1}(h-x) dx,$$

である。総和対象に $(-1)^j$ が含まれることが、交代級数の評価に適している理由だ。

オイラー・ブールの総和公式は、交代級数で表現される数学定数や超越関数の誤差評価に利用できる。数学定数や超越関数を無限級数で計算する場合、現実的には、ある有限項で計算を打ち切るわけだ。例えば、1000 項で計算を打ち切ったとする。本来、無限項まで計算することによって真値が得られるのであれば、第 1001 項目から無限項までの総和が、打ち切ったことによる誤差であるのだ。オイラー・ブールの総和公式は、級数の途中から無限項までの総和を評価することによって、級数の誤差を調べることができるわけだ。

6.2.1 公式の導出

級数の誤差を調べるのに有用なオイラー・ブールの総和公式を導出しよう。導出の順序として、最初に、特殊なケース $a = 0, n = 1$ について公式を導出する。導出した結果を、さらに一般化して、オイラー・ブールの総和公式を完成させるのである。

特殊なケースとして、 $a = 0, n = 1$ のときについて証明する。その場合、証明すべき関係式は、

$$f(h) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{E_k(h)}{k!} [f^{(k)}(1) + f^{(k)}(0)] + R_m(1), \quad (6.18)$$

である。そのうち、 $m = 1$ に限定すると、第一に証明する関係式は、

$$f(h) = \frac{1}{2} E_0(h)[f(1) + f(0)] + \frac{1}{2} \int_0^1 f'(x) \tilde{E}_0(h-x) dx, \quad (6.19)$$

となる。この関係式の被積分項に含まれる周期オイラー多項式が、 $0 \leq x < 1$ で $E_0(x) = 1$ 、一方、 $-1 \leq x < 0$ で $E_0(x) = -1$ であることに注意すると、(5.8) の右辺は、

$$\begin{aligned} \text{RHS of (5.8)} &= \frac{1}{2} E_0(h)[f(1) + f(0)] + \frac{1}{2} \int_0^h f'(x) dx - \frac{1}{2} \int_h^1 f'(x) dx \\ &= \frac{1}{2} [f(1) + f(0)] + \frac{1}{2} [f(h) - f(0)] - \frac{1}{2} [f(1) - f(h)] \\ &= f(h) = \text{LHS of (6.19)}, \end{aligned}$$

となる。したがって、 $a = 0, n = 1, m = 1$ の条件でオイラー・ブールの総和公式が成立する。続いて、 m を一般化したときにオイラー・ブールの総和公式が成立することを示す。

剰余項 $R_m(1)$ に部分積分を適用して計算すると,

$$\begin{aligned} R_m(1) &= \frac{1}{2(m-1)!} \int_0^1 f^{(m)}(x) \tilde{E}_{m-1}(h-x) dx \\ &= \frac{\tilde{E}_m(h)}{2m!} [f^{(m)}(1) + f^{(m)}(0)] + \frac{1}{2m!} \int_0^1 f^{(m+1)}(x) \tilde{E}_m(h-x) dx \\ &= \frac{\tilde{E}_m(h)}{2m!} [f^{(m)}(1) + f^{(m)}(0)] + R_{m+1}(1), \end{aligned}$$

が得られる。この結果を, $R_1(1)$ に対して繰り返し適用すると,

$$R_1(1) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\tilde{E}_k(h)}{k!} [f^{(m)}(1) + f^{(m)}(0)] + R_m(1),$$

なる結果を得る。この結果を (6.18) に代入すると,

$$f(h) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\tilde{E}_k(h)}{k!} [f^{(m)}(1) + f^{(m)}(0)] + R_m(1), \quad (6.20)$$

が得られる。ただし, $0 \leq h < 1$ に対して, $\tilde{E}_k(h) = E_k(h)$ であるので, $a = 0, n = 1$ であれば任意の自然数 m に対してオイラー・ブールの総和公式が成立する。

さらに続き, n を一般化し, オイラー・ブールの総和公式を証明する。導出された関係式 (6.20) について, $f(h)$ を $f(j+h)$ で置き換えると, (6.20) は,

$$f(j+h) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\tilde{E}_k(j+h)}{k!} [f^{(m)}(j+1) + f^{(m)}(j)] + R_m^{(j)}(1), \quad (6.21)$$

のように書き換えられる。この式において, 剰余項 $R_m^{(j)}(1)$ は次のように計算される。

$$\begin{aligned} R_m^{(j)}(1) &= \frac{1}{2(m-1)!} \int_0^1 f^{(m)}(j+x) \tilde{E}_{m-1}(h-x) dx \\ &= \frac{1}{2(m-1)!} \int_j^{j+1} f^{(m)}(x) \tilde{E}_{m-1}(h-x-j) dx \\ &= \frac{(-1)^j}{2(m-1)!} \int_j^{j+1} f^{(m)}(x) \tilde{E}_{m-1}(h-x) dx \\ &= (-1)^j [R_m(j+1) - R_m(j)]. \end{aligned}$$

この計算において, $\tilde{E}_m(x+1) = -E_m(x)$ の関係を利用した。この剰余項を (6.21) に代入すると,

$$\begin{aligned} (-1)^j f(j+h) &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-1)^j \tilde{E}_k(j+h)}{k!} [f^{(m)}(j+1) + f^{(m)}(j)] \\ &\quad + R_m(j+1) - R_m(j), \quad (6.22) \end{aligned}$$

なる関係が得られる。整数 j を a から $n-1$ まで増加させてこの結果の総和を計算すると, オイラー・ブールの総和公式が導出される。◀

6.2.2 メルカトル級数の誤差

オイラー・ブールの総和公式の応用例としてメルカトル級数の誤差を評価しよう。メルカトル級数とは、対数関数のマクローリン級数から得られる関係式:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \log 2,$$

である。この級数を第 N 項で打ち切ったときの誤差について考察しよう。その誤差は、 $f(x) = 1/x$ とおいてオイラー・ブールの総和公式を適用することによって評価することができる。このとき、 $f^{(m)}(x) = (-1)^m m! / x^{m+1}$ である。このような関数 $f(x)$ についてオイラー・ブールの総和公式を適用すると、

$$\sum_{j=N}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j+h} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-1)^{N+k} E_k(h)}{N^{k+1}} + \bar{R}_m(N), \quad (6.23)$$

が得られる。ただし、剰余項 $\bar{R}_m(N)$ は、

$$\bar{R}_m(N) = \frac{(-1)^m m}{2} \int_N^{\infty} \frac{\tilde{E}_{m-1}(h-x)}{x^{m+1}} dx,$$

によって計算される。剰余項 $R_m(N)$ に含まれる因数 $\tilde{E}_m(x-h)$ は周期オイラー多項式であるので、いかなる変数 $x-h$ においても、 $|\tilde{E}_m(x-h)| \leq 1$ が成立する。よって、次数 m と N を大きくとると剰余項 $R_m(N)$ は急速にゼロに近づく。ここで、 $h=1$ を代入すると上の式は、

$$\begin{aligned} \sum_{j=N}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j+1} &= -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-1)^{N+k} 2^{k+1} E_k(0)}{(2N)^{k+1}} + \bar{R}_m(N) \\ &= -\frac{(-1)^N}{2N} + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(-1)^{N+[k/2]} T_k}{(2N)^{k+1}} + \bar{R}_m(N), \end{aligned}$$

のように書き換えられる。したがって、メルカトル級数を N 項で打ち切った総和は、

$$\sum_{j=0}^{N-1} \frac{(-1)^j}{j+1} = \log 2 - \frac{(-1)^N}{2N} - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(-1)^{N+k} T_{2k-1}}{(2N)^{2k}} + \tilde{R}_{2m}(N),$$

となる。右辺の第2項以降が級数を打ち切ったことによる誤差である。この数式変形では、タンジェント数の偶数項が必ずゼロであることを利用し、奇数項のみで数式を書き換えている。例として、打ち切り項数を $N = 500\,000$ としよう。そのとき、メルカトル級数の計算結果は、

$$\sum_{j=0}^{N-1} \frac{(-1)^j}{j+1} = \log 2 - 10^{-6} - \sum_{k=1}^m (-1)^k T_{2k-1} \cdot 10^{-12k} + \tilde{R}_{2m}(N),$$

となることが予想できる。つまり、計算結果を上桁から調べていくと、最初の誤りは小数点以下の第6桁目に存在する。誤りは、真値より1小さい値である。第2の誤りは小数点以下の第12桁目に存在し、それ以降の誤りは12桁間隔で存在する。しかも、その桁ではタンジェント数 T_{2k-1} が誤差となって現れる。具体的に数値計算した結果を示すと、

$$\sum_{j=0}^{499999} \frac{(-1)^j}{j+1} = 0.693146\underline{18056094530941723012145817658407550013408825} \dots$$

-1
+1
-2
+16
-272

のようになる。この数値のアンダラインを示した位置が $\log 2$ と異なる場所であり、その下に示した小さな数字が誤差を表す。第500000項で打ち切った場合、小数点以下第5桁までしか正しくないが、ほとんどの桁は $\log 2$ と一致している。しかも、上に示した数式のように、誤った桁の誤差はタンジェント数になっている。

6.2.3 ライプニッツ級数の誤差

次の応用例として、ライプニッツ級数の誤差を評価しよう。ライプニッツ級数は、逆正接関数のマクローリン展開から派生する級数であり、

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4},$$

に示すように、 $\pi/4$ に収束する。この級数を第 N 項で打ち切ったときの誤差について考察しよう。その誤差は、 $f(x) = 1/x$ とおいてオイラー・ブールの総和公式を適用することによって評価することができる。このとき、 $f^{(m)}(x) = (-1)^m m! / x^{m+1}$ である。このような関数 $f(x)$ についてオイラー・ブールの総和公式を適用すると、

$$\sum_{j=N}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j+h} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-1)^{N+k} E_k(h)}{N^{k+1}} + \bar{R}_m(N), \quad (6.24)$$

が得られる。ただし、剰余項 $\bar{R}_m(N)$ は、

$$\bar{R}_m(N) = \frac{(-1)^m m}{2} \int_N^{\infty} \frac{\tilde{E}_{m-1}(h-x)}{x^{m+1}} dx,$$

によって計算される。ここで、 $h = 1/2$ を代入すると上の式は、

$$2 \sum_{j=N}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2j+1} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-1)^{N+k} E_k}{(2N)^{k+1}} + \bar{R}_m(N),$$

のように書き換えられる。すなわち、この式はライプニッツ級数の2倍を第 N 項で打ち切ったときの誤差である。この結果より、ライプニッツ級数の4倍を第 N 項で打ち切ったときの総和は、

$$4 \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(-1)^j}{2j+1} = \pi - 2 \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-1)^N E_{2k}}{(2N)^{2k+1}} - 2\bar{R}_m(N), \quad (6.25)$$

のように表すことができる。この数式の記述において、オイラー数の奇数項が必ずゼロになるので、奇数項のみで記述できるように数式を書き換えた。ここで、打ち切り項数を $N = 500\,000$ とすると、打ち切ったライプニッツ級数は、

$$4 \sum_{j=0}^{499\,999} \frac{(-1)^j}{2j+1} = \pi - 2 \sum_{k=0}^{m-1} E_{2k} \cdot 10^{-12k-6} - 2\tilde{R}_m(N),$$

のように書くことができる。この数式は次のように解釈できる。計算結果を上桁から調べていくと、小数点以下の第6桁目で最初の誤りがあり、その後、12桁間隔で誤りが繰り返される。このような規則性で生じた誤りは、各桁に対して順番にオイラー数の2倍にあたる $2E_{2k}$ だけ真値と異なっている。実際に計算した結果を書くと、

$$4 \sum_{j=0}^{499\,999} \frac{(-1)^j}{2j+1} = 3.14159\underset{+2}{4}65358979323\underset{-2}{6}46264338328\underset{+10}{9}50288419704\underset{-122}{7}39937510\dots$$

い結果となる。表示した計算結果は、数式で記述した予想通り、小数点以下の第6桁目で最初の誤りが現れ、その後、12桁間隔で誤りが現れる。各桁の誤差は予想通りオイラー数の2倍になっている。計算結果の有効桁が小数点以下の5桁しかないが、ほとんどの桁は正確に計算されている。

6.3 アーベルの部分積

数列の和と積分の関係を示す公式として、アーベルの部分積を紹介しよう。部分積という名称は、部分積分の公式から導き出されることに由来する。本節では、アーベルの部分積を導出したのち、その応用例としてゼータ関数のローラン展開を取り扱う。

6.3.1 アーベルの部分積

アーベルの部分積は、本章で取り扱った他の公式のように、数列の和と積分の関係を示す数式である。この公式が部分積分の公式から導き出されるため、部分積と呼ばれる。アーベルの部分積は、数列 a_n と関数 $\phi(x)$ との積 $a_n\phi(n)$ の総和に関する公式:

$$\sum_{k=1}^n a_k\phi(k) = A(n)\phi(n) - \int_1^n A(x)\phi'(x) dx, \quad (6.26)$$

で記述できる。ここで、 $A(x)$ は数列 a_n を関数とみなしたときの、 a_n の原始関数、 $\phi'(x)$ は $\phi(x)$ の導関数である。具体的に書くなら、

$$A(x) = \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} a_k,$$

である。なお、 $[x]$ は、 x を超えない最大の整数である。このような $A(x)$ の定義から、その導関数を $a(x) = \sum a_k \delta(k)$ と考えるとよいだろう。ただし、 $\delta(k)$ はディラックのデルタ関数である。

証明 アーベルの部分和は、端的にいうと部分積分である。部分積分とは異なる名称で呼ばれているが、上に記述した定義において $A(x)\phi'(x)$ を区間 $[1, n]$ で部分積分すれば、アーベルの部分和が証明できる。部分積分を実行すると、

$$\begin{aligned} \int_1^n A(x)\phi'(x) dx &= \left[A(x)\phi(x) \right]_1^n - \int_1^n a(x)\phi(x) dx \\ &= A(n)\phi(n) - \int_1^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(k)\phi(x) dx = A(n)\phi(n) - \sum_{k=1}^n a_k \phi(k), \end{aligned}$$

が得られる。上で定義したように、デルタ関数を用いて a_n と $A(x)$ の導関数を関係づけたことから、計算がスムーズに進んだ。この計算の第2行目への数式変形において、第1項は $A(n)\phi(n)$ でなく、 $A(n)\phi(n) - A(1)\phi(1)$ なるように思えるかもしれない。それについては後に考察する。その疑問点を除くと、アーベルの部分和が証明されたことになる。◻

証明ができたものの、アーベルの部分和は具体的な使い方がわかりにくいかもしれない。ここで具体的な例を示しておいた方がよいだろう。例として、 $1/k^2$ の和を考えよう。この例では、 $a_n = 1$ 、 $\phi(x) = 1/x^2$ とするのだ。そのとき、 $A(x) = [x]$ である。この関数の設定で計算すると、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{x^2} &= \frac{[n]}{n^2} + \int_1^n \frac{2[x]}{x^3} dx = \frac{[n]}{n^2} + \sum_{m=1}^{n-1} \int_m^{m+1} \frac{2[x]}{x^3} dx \\ &= \frac{1}{n} + \sum_{m=1}^{n-1} \int_m^{m+1} \frac{m}{2x^3} dx = \frac{1}{n} - \sum_{m=1}^{n-1} \left[\frac{m}{x^2} \right]_m^{m+1} \\ &= \frac{1}{n} + \sum_{m=1}^{n-1} m \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{(m+1)^2} \right) \\ &= \frac{1}{n} + 1 + \sum_{m=2}^{n-1} \frac{1}{m^2} - \frac{n-1}{n^2} \\ &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}, \end{aligned}$$

が得られる。この結果は、具体的な計算を実行しているのではなく、アーベルの部分和が左辺と同一の数式の結果になることを示したにすぎない。しかし、一つの実例をもってアーベルの部分和の正当性を示している。

アーベルの部分和の証明において、第2行目への数式変形について生じた疑問点について考察しよう。考察の鍵は関数 $A(x)$ の導関数 $a(x)$ である。その導関数は、 $a(x) = \sum A_k \delta(k)$

と定義されるように、無限小の幅をもつ非常に鋭い山をなす。デルタ関数の解釈によると、 $\delta(k)$ は $x = k$ である瞬間に、山をふもとからその反対側まで超えてしまうので、区間 $[k, k + 1]$ には、導関数 $a(x)$ は $a_k\delta(k)$ と $a_{k+1}\delta(k + 1)$ の二つの山が含まれているのだ。その理由で、証明過程における第 2 行目への数式変形で第 1 項を、

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [A(n)\phi(n) - A(1 - \varepsilon)\phi(1 - \varepsilon)] &= A(n)\phi(n) - A(0)\phi(1) \\ &= A(n)\phi(n) - 0 \cdot \phi(1) = A(n)\phi(n), \end{aligned}$$

としたわけだ。それに対して、 $x = 1$ におけるデルタ関数の山を明示的に含みたくない場合、総和の区間を $1 < k \leq n$ とすればよい。さらに一般的に書くと、

$$\sum_{m < k \leq n} a_k \phi(k) = A(n)\phi(n) - A(m)\phi(m) - \int_m^n A(x)\phi'(x) dx, \quad (6.27)$$

のように記述する。この数式の左辺の総和の範囲は、 $m + 1, m + 2, \dots$ である。本来なら、総和の開始が $m + 1$ であることを明確に記述すべきであるが、左辺の積分区間との対比のために、総和の範囲を不等号を用いて記述していると解釈すればよい。

数式 (6.27) に記述した積分区間 $(m, n]$ は、二つの整数の間の区間である。それをさらに一般化し、任意の実数間の区間に書きたいと考えるのは当然の要求であろう。そのような要求に対し、アーベルの部分和の公式は、

$$\begin{aligned} \sum_{a < k \leq b} \phi(k) &= \int_a^b \phi(x) dx + \int_a^b \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) \phi'(x) dx \\ &\quad + \left(a - [a] - \frac{1}{2}\right) \phi(a) - \left(b - [b] - \frac{1}{2}\right) \phi(b), \quad (6.28) \end{aligned}$$

のように一般化できる。ここで、 a と b は任意の実数であり、整数でなくてもよい。この数式には、これまで使ってきた a_n とその原始関数 $A(x)$ を用いていない。この数式は、 $a_n = 1$ であることを前提に記述されている。アーベルの部分和で $a_n = 1$ 以外であることが考えられないので、当然の限定である。

証明 一般化されたアーベルの部分和の公式を証明しよう。第 1 ステップとして、 $a = n$, $b = n + 1$ のように積分区間を隣り合う整数の場合に限定する。その限定条件で部分積分を実行すると、

$$\begin{aligned} \int_k^{k+1} \left(x - k - \frac{1}{2}\right) \phi'(x) dx &= \left[\left(x - k - \frac{1}{2}\right) \phi(x)\right]_k^{k+1} - \int_k^{k+1} \phi(x) dx \\ &= \frac{\phi(k) + \phi(k + 1)}{2} - \int_k^{k+1} \phi(x) dx, \end{aligned}$$

のように計算できる。この数式は、

$$\begin{aligned} \phi(k + 1) &= \int_k^{k+1} \phi(x) dx + \int_k^{k+1} \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) \phi'(x) dx \\ &\quad + \left(k - [k] - \frac{1}{2}\right) \phi(k) - \left(k + 1 - [k + 1] - \frac{1}{2}\right) \phi(k + 1), \end{aligned}$$

のように書き換えられる。この書き換えにおいて、積分区間 $(k, k+1)$ で $\lfloor x \rfloor = k$ であることを利用した。さらに、 $k - \lfloor k \rfloor = 0$ と $k+1 - \lfloor k+1 \rfloor = 0$ 成立することも明らかだ。また、トリッキーであるが、数式変形において、両辺に $\phi(k+1)$ を加算した。その理由で、変形後の右辺に $\phi(k+1)/2$ が残っている。この数式の左辺 $\phi(k+1)$ は、

$$\phi(k+1) = \sum_{k < j \leq k+1} \phi(j),$$

のように、積分区間に含まれる整数による関数値の総和であると考えると、これからの考察がしやすい。

積分区間を $(a, b]$ としよう。ただし、その積分区間は隣り合う整数の間に挟まれた狭い区間、すなわち、 $n \leq a < b \leq n+1$ であるとする。その積分区間の条件で部分積分を実行すると、

$$\int_a^b \left(x - n - \frac{1}{2}\right) \phi'(x) dx = \left(b - n - \frac{1}{2}\right) \phi(b) - \left(a - n - \frac{1}{2}\right) \phi(a) - \int_a^b \phi(x) dx, \quad (6.29)$$

が得られる。ここまでに得られた結果を分類して書いてみよう。分類した結果だけ書くと、

$$\begin{aligned} \sum_{m < k \leq n} \phi(n) &= \int_m^n \phi(x) dx + \int_n^m \left(x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}\right) \phi'(x) dx \\ &\quad + \left(m - \lfloor m \rfloor - \frac{1}{2}\right) \phi(m) - \left(n - \lfloor n \rfloor - \frac{1}{2}\right) \phi(n), \end{aligned} \quad (6.30a)$$

$$\begin{aligned} \phi(m) &= \int_a^m \phi(x) dx + \int_a^m \left(x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}\right) \phi'(x) dx \\ &\quad + \left(a - \lfloor a \rfloor - \frac{1}{2}\right) \phi(a) - \left(m - m - \frac{1}{2}\right) \phi(m), \end{aligned} \quad (6.30b)$$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_n^b \phi(x) dx + \int_n^b \left(x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}\right) \phi'(x) dx \\ &\quad + \left(n - \lfloor n \rfloor - \frac{1}{2}\right) \phi(n) - \left(b - b - \frac{1}{2}\right) \phi(b), \end{aligned} \quad (6.30c)$$

が得られる。第1式は、積分区間を異なる二つの整数間 $(m, n]$ に設定した場合であり、これは(6.29)において、 m から $n-1$ の範囲で k を変化させて加算すれば得られる。第2式は、積分区間の終端が整数である場合であり、(6.29) から導出される。第3式は、積分区間の始点が整数である場合であり、これも(6.29) から導出される。これら三つの式の和をとると、積分区間が少なくとも一つの整数をまたぐ条件で、一般化されたアーベルの部分 and (6.28) を満たすことが示される。一方、積分区間が整数をまたがない場合、(6.29) から

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b \phi(x) dx + \int_a^b \left(x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}\right) \phi'(x) dx \\ &\quad + \left(a - \lfloor a \rfloor - \frac{1}{2}\right) \phi(a) - \left(b - \lfloor b \rfloor - \frac{1}{2}\right) \phi(b), \end{aligned} \quad (6.30d)$$

が導出される。この数式も一般化されたアーベルの部分 and (6.28) と合致している。したがって、一般化されたアーベルの部分 and の公式(6.28) は常に成立する。◻

6.3.2 ゼータ関数のローラン展開

アーベルの部分和の応用例で、ゼータ関数をローラン展開することができる。ゼータ関数 $\zeta(s)$ は $s = 1$ で 1 位の極をもち、その留数が 1 である関数である。そのような関数は、極を示す項 $1/(s-1)$ を含む級数で記述できる。その項を除けば、 $\zeta(s)$ は $s = 1$ で正則となるはずだ。つまり、ゼータ関数 $\zeta(s)$ は、

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + a_0 + a_1(s-1) + a_2(s-1)^2 + a_3(s-1)^3 + \dots, \quad (6.31)$$

のようにローラン展開できる。本項の目的は、ローラン展開の展開係数 a_0, a_1, a_2, \dots を特定することである。

展開係数の特定の第 1 歩として、ゼロ次の係数を求めよう。ゼロ次の展開係数は、

$$a_0 = \lim_{s \rightarrow 1+} \left[\zeta(s) - \frac{1}{s-1} \right],$$

を計算すれば得られる。ここで、 $s \rightarrow 1+$ は、変数 s を正の方向から 1 に近づけることを意味する。正の方向から近づけることには理由がある。この数式の評価に対して、ゼータ関数の定義:

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots$$

を利用しようとしているからだ。この級数は $s > 1$ でなければ収束しない。それが変数 s を正の方向から近づける理由である。アーベルの部分和の公式を利用すると、ゼータ関数は、

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \sum_{1 < k \leq n} \frac{1}{k^s} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \int_1^n \frac{dx}{x^s} - s \int_1^n \frac{x - [x] - 1/2}{x^{s+1}} dx - \frac{1}{2} + \frac{1}{2n^s} \right] \\ &= \frac{1}{s-1} - s \int_1^\infty \frac{x - [x] - 1/2}{x^{s+1}} dx + \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (6.32)$$

のように記述できる。この計算結果も、ゼータ関数 $\zeta(s)$ が $s = 1$ に 1 位の極をもち、その留数が 1 であることを示唆している。

アーベルの部分和の公式を利用したゼータ関数の記述から、ローラン展開のゼロ次の係数を算出しよう。上で記述した数式を引き継ぎ、

$$\begin{aligned} a_0 &= \lim_{s \rightarrow 1+} \left[\zeta(s) - \frac{1}{s-1} \right] = \int_1^\infty \frac{[x] - x + 1/2}{x^2} dx + \frac{1}{2} \\ &= \int_1^\infty \frac{[x] - x}{x^2} dx + \frac{1}{2} \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} + \frac{1}{2} = \int_1^\infty \frac{[x] - x}{x^2} dx + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \left(\frac{k}{x^2} - \frac{1}{x} \right) dx + 1 \right] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} - \log n + 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \right) = \gamma,
\end{aligned}$$

が得られる。この結果によって、ゼータ関数 $\zeta(s)$ を $s-1$ を中心にローラン展開したときのゼロ次の係数が、オイラー定数 γ に等しいことが明らかになった。

引き続き、他の展開係数を計算しよう。ゼータ関数の展開係数を得るための手続きは単純である。本項の冒頭で示したゼータ関数のローラン展開の形態 (6.31) に $s-1$ を乗じると、

$$(s-1)\zeta(s) = 1 + a_0(s-1) + a_1(s-1)^2 + a_2(s-1)^3 + \dots$$

のような形で記述できる。展開係数のうち、 a_0 は既に $a_0 = \gamma$ であることがわかっている。展開係数を得るには、

$$a_{n-1} = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{ds^n} \left[(s-1)\zeta(s) \right] \Big|_{s=1}, \quad (6.33)$$

を計算すればよい。ゼータ関数を第 m 項で打ち切った高次の調和級数で表現し、その n 階の導関数を記述すると、

$$(-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \left[(s-1) \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^s} \right] = (s-1) \sum_{k=1}^m \frac{\log^n k}{k^s} - n \sum_{k=1}^m \frac{\log^{n-1} k}{k^s}, \quad (6.34)$$

が得られる。本章で取り扱ったオイラー・マクローリンの総和公式によると、数列の和は近似的に積分に置き換えることができるので、(6.34) に記載した総和を積分で評価してみよう。右辺の第 1 項に含まれる総和は、

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^m \frac{\log^n k}{k^s} &= \int_1^m \frac{\log^n x}{x^s} dx + c_n(s) + O\left(\frac{\log^n m}{m^s}\right) \\
&= \int_0^{\log m} u^n e^{-(s-1)u} du + c_n(s) + O\left(\frac{\log^n m}{m^s}\right) \\
&= \frac{1}{(s-1)^{n+1}} \int_0^{(s-1)\log m} t^n e^{-t} dt + c_n(s) + O\left(\frac{\log^n m}{m^s}\right), \quad (6.35)
\end{aligned}$$

のように計算できる。第 2 行目への数式変形では積分変数を $x \mapsto u$ で置き換え、第 3 行目への数式変形では $u \mapsto t$ で置き換えた。右辺の第 2 項 $c_n(s)$ はオイラー・マクローリンの総和公式によって総和を積分に置き換えた際の誤差であり、第 3 項は無級数を m 項で打ち切ったことによる誤差である。打ち切り項数 m を大きくすると誤差が小さくなることは、ランダウのオミクロンで示されている。一方、第 2 項をあえて数式として記述すると、

$$c_n(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log^n k}{k^s} - \int_1^{\infty} \frac{\log^n x}{x^s} dx,$$

である。この数式は、無限級数を積分で表現した場合の誤差を率直に表現した数式であり、面白みのない数式かもしれない。しかし、これが現実の $c_n(s)$ である。この数式から、 $c_n(s)$ を s で微分した導関数は、

$$c'_n(s) = -c_{n+1}(s), \quad (6.36)$$

なる関係を満たすことに注意しておこう。定義した量 $c_n(s)$ を構成する関数 $\log^n x/x^s$ を x の関数と考えると図 6.4 に示す曲線を描く。この曲線は、 $x \geq 1$ で極大値を 1 か所だけもつ関数である。微分すれば容易に確認できることだが、極大値の位置は $x = e^{n/s}$ であり、そ

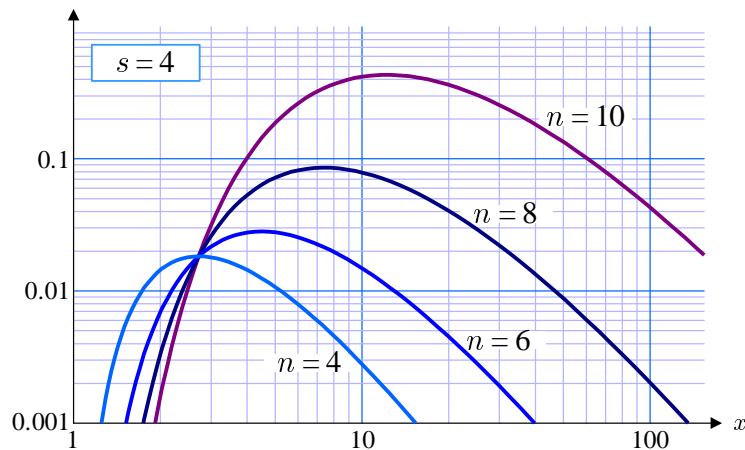


図 6.4: 関数 $\log^n x/x^s$ が描く曲線 ($s = 4$)

の極大値は $(n/es)^n$ となる。このとき、 $|c_n(s)|$ は、必ず、有限の値となり、

$$|c_n(s)| \leq \sup_{x \geq 1} \frac{\log^n x}{x^s} = \left(\frac{n}{es} \right)^n,$$

の関係を満たす。当然のように書いたが説明が必要だろう。図 6.5 に $\log^n x/x^s$ のグラフと、 $c_n(s)$ の対応関係を示している。その図において、網掛け部分の面積が c_n である。正確にいうと、関数 $\log^n x/x$ の最大値より右の網掛けの面積から、左の網掛けの面積を減算した結果が $c_n(s)$ である。これに対して、 $\log^n x/x$ に重なるように描いた太枠の長方形を考えてみよう。図から容易に推測できるように、 $\log^n x/x$ の最大値より右の長方形の面積の和は、関数の最大値 (と 1 の積) と等しい。最大値より左の面積の和も関数の最大値と等しい。網掛け部の面積は、太枠の長方形の面積より小さいので、結局、 $c_n(s)$ は関数の最大値より小さい値どうしの差であるので、その大きさは、やはり、関数の最大値より小さくなる。

ゼータ関数の展開係数の特定に進んでいこう。導関数 (6.34) の右辺の第 1 項は、数式 (6.35) を $s-1$ 倍した結果に等しい。その値を計算すると、

$$(s-1) \sum_{k=1}^m \frac{\log^n k}{k^s} = \frac{1}{(s-1)^n} \int_0^{(s-1) \log m} x^n e^{-x} dx$$

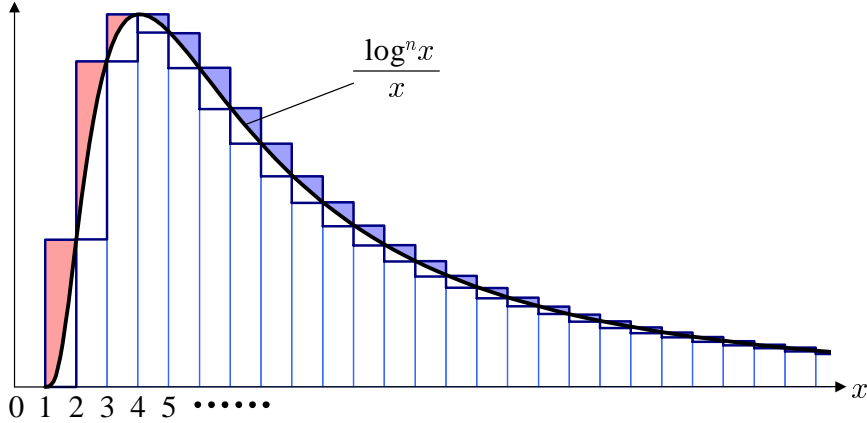


図 6.5: 誤差 $c_n(s)$ の検討の模式図

$$+ (s-1)c_n(s) + (s-1)O\left(\frac{\log^n m}{m^s}\right), \quad (6.37)$$

が得られる。一方, (6.34) の右辺の第 2 項は, 数式 (6.35) において n を $n-1$ に置き換え, n 倍した結果に等しい。その値を計算すると,

$$\begin{aligned} n \sum_{k=1}^m \frac{\log^{n-1} k}{k^s} &= \frac{n}{(s-1)^n} \int_0^{(s-1)\log m} x^{n-1} e^{-x} dx \\ &\quad + (s-1)c_{n-1}(s) + (s-1)O\left(\frac{\log^{n-1} m}{m^s}\right) \\ &= m^{-(s-1)} \log^n m + \frac{1}{(s-1)^n} \int_0^{(s-1)\log m} x^{n-1} e^{-x} dx \\ &\quad + nc_{n-1}(s) + O\left(\frac{\log^{n-1} m}{m^s}\right), \end{aligned} \quad (6.38)$$

が得られる。この数式の右辺を得るには, 第 1 項の積分に部分積分を適用した。ここで得られた (6.37) と (6.38) の差が (6.34) に等しいはずなので,

$$(-1)^n \frac{d^n}{ds^n} [(s-1)\zeta(s)] = (s-1)c_n(s) - nc_{n-1}(s), \quad (6.39)$$

なる等式が得られる。驚くことに, 誤差を表現するつもりだった $c(s)$ によって導関数が表現できてしまった。この数式に $s=1$ の極限を適用すると,

$$\begin{aligned} (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} [(s-1)\zeta(s)] \Big|_{s=1} &= -nc_{n-1}(s) = n \int_1^m \frac{\log^{n-1} x}{x^2} dx - n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log^{n-1} k}{k^s} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\frac{n}{(s-1)^n} \int_0^{(s-1)\log m} t^{n-1} e^{-t} dt - n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log^{n-1} k}{k^s} \right] \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\frac{n}{(s-1)^n} \int_0^{(s-1)\log m} \left(t^{n-1} - t^n + \frac{t^{n+1}}{2!} - \dots \right) dx - n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log^{n-1} k}{k^s} \right] \end{aligned}$$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\log^n m - n \sum_{k=1}^m \frac{\log^{n-1} k}{k} \right], \quad (6.40)$$

が得られる。第3行目への数式変形では、(6.35)を導出する計算過程を参考にした。第4行目への数式変形で、 e^{-t} をマクローリン展開した。最終行への数式変形では、 $s-1=0$ であることから、 $s-1$ が残っている項をすべて削除した。この計算結果を(6.33)に適用すると、展開係数が、

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n!} \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=1}^m \frac{\log^n k}{k} - \frac{\log^{n+1} m}{n+1} \right],$$

であることが導かれる。導出した展開係数に関して、

$$\gamma_n = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=1}^m \frac{\log^n k}{k} - \frac{\log^{n+1} m}{n+1} \right], \quad (6.41)$$

なる記号を定義すると、ゼータ関数 $\zeta(s)$ のローラン展開:

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \gamma_n}{n!} (s-1)^n, \quad (6.42)$$

が得られる。既に示したように、ローラン展開のゼロ次の係数はオイラー定数 γ になる。この事実は、(6.41)に $n=0$ を代入すると、 $\gamma_0 = \gamma$ が得られることで確認できる。なお、 $n=0$ 以外の定数 γ_n はスティルチェス定数と呼ばれる。

スティルチェス定数は、オイラー定数と同様、有理数であるかどうかなど、詳しい性質がわかっていない。ましてや、その定義式(6.41)では収束がオイラー定数よりも遅く、近似値を得ることも難しい。オイラー・マクローリンの総和公式など、計算方法を工夫すれば、表6.3のようなスティルチェス定数の近似式を得ることができる。オイラー・マクローリンの総和公式によるスティルチェス定数の計算方法は後に説明する。この表に記載した数値は、オイラー・マクローリンの公式で計算した結果である。この表を見ると、スティルチェス定数は 10^{-3} から 10^{-5} の範囲でばらついているように見えるが、次数 n をさらに上昇させると、スティルチェス定数 γ_n はそれに対応して上昇する。例えば、 $\gamma_{40} \simeq 0.2487$ 、 $\gamma_{50} \simeq 126.8$ 、 $\gamma_{60} \simeq 9.854 \times 10^4$ のように上昇する。その上昇の振る舞いは、詳しくわかっていない[§]が、脚注に掲げたSteven R. Finchの文献によると、 γ_n の大きさは、

$$|\gamma_n| \leq \frac{(3 + (-1)^n)(2n)!}{n^{n+1}(2\pi)^n},$$

の関係を満たすようだ。その情報によると、ゼータ関数のローラン展開(6.42)は、 $\pi e/2$ ($\simeq 4.27$)の収束半径をもつ。

[§]Steven R. Finch, "Mathematical Constants," Cambridge Univ. Press, ISBN 0 521 81805 2, Sect. 2.21, p.167, 2003.

表 6.3: スティルチェス定数

n	γ_n	n	γ_n
0	$5.77215664901532860606 \times 10^{-1}$	12	$1.67272912105140193353 \times 10^{-4}$
1	$-7.28158454836767248605 \times 10^{-2}$	13	$-2.74638066037601588600 \times 10^{-5}$
2	$-9.69036319287231848453 \times 10^{-3}$	14	$-2.09209262059299945837 \times 10^{-3}$
3	$2.05383442030334586616 \times 10^{-3}$	15	$-2.83468655320241446642 \times 10^{-4}$
4	$2.32537006546730005746 \times 10^{-3}$	16	$-1.99696858308969774707 \times 10^{-4}$
5	$7.93323817301062701753 \times 10^{-4}$	17	$2.62770371099183366994 \times 10^{-5}$
6	$-2.38769345430199609872 \times 10^{-4}$	18	$3.07368408149252826592 \times 10^{-4}$
7	$-5.27289567057751046074 \times 10^{-4}$	19	$5.03605453047355629055 \times 10^{-4}$
8	$-3.52123353803039509602 \times 10^{-4}$	20	$4.66343561511559449400 \times 10^{-4}$
9	$-3.43947744180880481779 \times 10^{-5}$	21	$1.04437769756000115810 \times 10^{-4}$
10	$2.05332814909064794683 \times 10^{-4}$	22	$-5.41599582203997701655 \times 10^{-4}$
11	$2.70184439543903526672 \times 10^{-4}$	23	$-1.24396209040824577929 \times 10^{-3}$

6.3.3 スティルチェス定数

前項でゼータ関数を記述する際に定義したスティルチェス定数を計算しよう。スティルチェス定数 γ_n は, (6.41) によって定義される。計算には, オイラー・マクローリンの総和公式 (6.2) を適用する。この公式を適用するにあたり, 関数 $f(x)$ を,

$$f(x) \equiv \frac{\log^n x}{x},$$

のように定義する。スティルチェス定数 γ_n を計算する公式の導出は, オイラー定数やゼータ関数と同一の導出過程を経るので, その過程を示すことは省略し, 結果を書くと,

$$\gamma_n = \sum_{k=1}^m \frac{\log^n k}{k} - \frac{\log^{n+1} m}{n+1} - \frac{\log^n m}{2m} - \sum_{k=1}^p \frac{B_{2k}}{(2k)!} f^{(2k-1)}(m) + R_{2p}(m), \quad (6.43)$$

となる。ただし, $R_{2p}(m)$ は剰余項であり,

$$R_{2p}(m) = -\frac{1}{(2p)!} \int_1^m \tilde{B}_{2p}(x) f^{(2p)}(x) dx,$$

によって定義される。スティルチェス定数の計算において, 剰余項は計算に含まれない項である。つまり, $R_{2p}(m)$ は, 補正項を p 項だけ追加したことによる誤差であると考えられる。

スティルチェス定数を (6.43) で計算するには, $f(x)$ の高次導関数の計算が必要だ。その高次導関数は単純な形にはならず,

$$f^{(m)}(x) = \frac{1}{x^{m+1}} \sum_{k=1}^m a_{mk} \log^{n-k} x, \quad (6.44)$$

なる級数で表現される。展開係数 a_{mk} は、 $0 \leq k \leq m$ のときだけ $a_{mk} \neq 0$ となる係数であり、 $a_{00} = 1$ である。さらに、展開係数 a_{mk} は、

$$a_{mk} = \begin{cases} -ma_{m-1,k}, & \text{if } k = 0, \\ (n-k+1)a_{m-1,k-1} - ma_{m-1,k}, & \text{if } 1 \leq k \leq m-1, \\ (n-k+1)a_{m-1,m-1}, & \text{if } k = m, \end{cases} \quad (6.45)$$

なる漸化式で計算できる。上で述べたように $a_{00} = 1$ であるから、(6.44) は $m = 0$ のとき成立している。その数式が $m - 1$ で成立していると仮定するなら、 m 階の導関数 $f^{(m)}(x)$ は、

$$\begin{aligned} f^{(m)}(x) &= \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{x^m} \sum_{k=0}^{m-1} a_{m-1,k} \log^{n-k} x \right] \\ &= \frac{1}{x^{m+1}} \sum_{k=0}^{m-1} \left[-ma_{m-1,k} \log^{n-k} x + (n-k)a_{m-1,k} \log^{n-k-1} x \right] \\ &= \frac{1}{x^{m+1}} \left\{ -ma_{m-1,0} \log^n x \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=0}^{m-1} \left[(n-k+1)a_{m-1,k-1} - ma_{m-1,k} \right] \log^{n-k} x \right. \\ &\quad \left. + (n-m+1)a_{m-1,m-1} \log^{n-m} x \right\}, \end{aligned}$$

のように計算できる。この数式で漸化式 (6.45) が確認でき、 n 階の導関数が (6.44) なる数式で表現できることが証明できた。例として、 $f(x) = \log^2 x/x$ について、高次導関数の展開係数は表 6.4 を用いて計算できる。例えば、第 m 行、第 k 列のセルを計算するには、上隣のセルに $-m$ を乗じ、左上隣のセルに $n-k$ を乗じ（この例では $n = 2$ ）、その二つの積の和を書き込む。そのような手順によって表 6.4 が得られるわけだ。このように $n = 2$ の例で

表 6.4: 関数 $\log^2 x/x$ の高次導関数の展開係数

$m \setminus k$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	-1	2				
2	2	-6	2			
3	-6	16	-12	0		
4	24	-76	64	0	0	
5	-120	428	-396	0	0	0

は、 $k \geq 3$ のセルはすべてゼロになる。また、空白のセルと表外のセルがゼロであると考

えると、常に $1 \leq k \leq m - 1$ の漸化式と同一の漸化式だけで計算しても同じ結果が得られる。この表によると、4階と5階の導関数は、

$$f^{(4)}(x) = \frac{1}{x^5} (24 \log^2 x - 76 \log x + 64),$$

$$f^{(5)}(x) = \frac{1}{x^6} (-120 \log^2 x + 428 \log x - 396),$$

となる。このようにして計算した高次の導関数をオイラー・マクローリンの総和公式に代入するとスティルチェス定数が計算できるのだ。

付録A 微積分の公式

本書では、数式変形をする過程で、様々な数学公式を利用している。本文の中で証明を交えている公式もあるが、本文の流れを妨げる理由で本文中での証明や解説を省略した公式もある。そのような改めて解説が必要であると思われる数学公式について、本章で取り扱いたい。

A.1 ロピタルの定理

解析学では時として、分子と分母がともにゼロに近い場合、または、分子と分母がともに無限大に発散するような分数を計算する必要性に迫られる。そのような局面において便利なツールとなるのがロピタルの定理である。ロピタルの定理を以下に記述する。

ロピタルの定理 関数 $f(x)$ と $g(x)$ が $x = a$ で微分可能であり、 $f(a) = g(a) = 0$ であり、かつ、 $g'(a) \neq 0$ であるとき、

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)},$$

が成立する。

ロピタルの定理の証明は容易である。変数 x を $x \equiv a + \varepsilon$ と置き換えると、 $x \rightarrow a$ は $\varepsilon \rightarrow 0$ と置き換えるとよい。また、 $f(x)$ と $g(x)$ が $x = a$ で微分可能であるので、 $f(a + \varepsilon) = f(a) + \varepsilon f'(a) + o(\varepsilon)$ 、 $g(a + \varepsilon) = g(a) + \varepsilon g'(a) + o(\varepsilon)$ が成立するはずである。したがって、ロピタルの定理の左辺は、

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(a + \varepsilon)}{g(a + \varepsilon)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(a) + \varepsilon f'(a) + o(\varepsilon)}{g(a) + \varepsilon g'(a) + o(\varepsilon)} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon f'(a) + o(\varepsilon)}{\varepsilon g'(a) + o(\varepsilon)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}, \end{aligned}$$

のように計算できる。なお、この計算を見ると、 ε は正でも負でもよいことがわかるだろう。つまり、ロピタルの定理が成立することが証明された。◻

ロピタルの定理は、 $f(a) = \pm\infty$, $g(z) = \pm\infty$ のときにも成立するので、それを証明しよう。今度は、関数 $f(x)$ と $g(x)$ が $x = a$ で発散するので、その場所で連続関数ではない。そのため、 $x \rightarrow a$ ではなく、 $x \rightarrow a - 0$ と $x \rightarrow a + 0$ のように、負の方向から a に近づける場合と、正の方向から近づける場合を個別に考察する必要がある。関数 $f(x)$ と $g(x)$ が、 $x \rightarrow a - 0$ の極限で $f(x) \rightarrow \infty$, $g(x) \rightarrow \infty$ であるなら、

$$\lim_{x \rightarrow a-0} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow a-0} \frac{1}{g(x)} = 0,$$

となるので、 $f(x)$ と $g(x)$ の代わりに $1/f(x)$ と $1/g(x)$ を使えば、ロピタルの定理を適用することができる。その考え方でロピタルの定理を適用すると、

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a-0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow a-0} \frac{1/g(x)}{1/f(x)} = \lim_{x \rightarrow a-0} \frac{g'(x)/[g(x)]^2}{f'(x)/[f(x)]^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow a-0} \frac{g'(x)}{f'(x)} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)^2 = \lim_{x \rightarrow a-0} \frac{g'(x)}{f'(x)} \cdot \left(\lim_{x \rightarrow a-0} \frac{f(x)}{g(x)} \right)^2, \end{aligned}$$

となる。この結果を $f(x)/g(x)$ の極限について解くと、

$$\lim_{x \rightarrow a-0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a-0} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \quad (\text{A.1})$$

が導出できる。つまり、 $x \rightarrow a - 0$ の極限で $f(x) \rightarrow \infty$, $g(x) \rightarrow \infty$ となる場合にもロピタルの定理がそのまま適用できる。一方、 $x \rightarrow a + 0$ の極限でも同様にロピタルの定理を証明できるはずである。◻

極限值を計算することを考えると、ロピタルの定理が分子と分母がともにゼロである場合と、ともに無限大になる場合の双方で適用できることは重要である。その理由は $x \rightarrow 0$ の極限で $x \log x$ を評価することで示すことができる。その値を評価するにあたり、 $x/(1/\log x)$ という形にすると分子と分母がゼロになるのでロピタルの定理が適用できる。ロピタルの定理を適用すると、

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1/\log x} = - \lim_{x \rightarrow 0} x (\log x)^2,$$

が得られ、ますます極限值がわかりにくくなる。それに対して、分子と分母がともに無限大になる形態 $\log x/(1/x)$ でロピタルの定理を適用すると、

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log x}{1/x} = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/x}{1/x^2} = - \lim_{x \rightarrow 0} x = 0,$$

となるので極限が得られた。この例を見ると、ロピタルの定理が分子と分母がゼロである場合だけでなく、無限大である場合にも成立すると主張することに価値があるのだ。

指数関数の発散速度 指数関数 $e^{\alpha x}$ (ただし, $\alpha > 0$) は, $x \rightarrow \infty$ に対して, いかなる多項式よりも速く発散する。これについては, $x \rightarrow \infty$ における $e^{\alpha x}$ と x^n の振る舞いを調べれば証明できる。ロピタルの定理を繰り返し使用すれば,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha e^{\alpha x}}{n x^{n-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha^n e^{\alpha x}}{n!} = \infty,$$

が得られる。したがって, 指数関数 $e^{\alpha x}$ がいかなる多項式よりも速く発散することが示された。

対数関数の発散速度 対数関数 $\log x$ は $x \rightarrow \infty$ に対して, いかなる多項式よりも発散が遅い。これについては, $x \rightarrow \infty$ における $\log x$ と x^α (ただし, $\alpha > 0$) の振る舞いを調べれば証明できる。ロピタルの定理を適用すれば,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0,$$

となるので, 対数関数 $\log x$ がいかなる多項式よりも発散が遅いことが示された。

余接関数の発散速度 余接関数 $\cot x$ は $x = 0$ で発散するが, その速度は $1/x$ と同程度である。それを示すには, $\cot x/x^{-1}$ が $x \rightarrow 0$ の極限で定数になることを証明すればよい。分子も分母も $x \rightarrow 0$ の極限で発散するので, ロピタルの定理を用いると,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cot x}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin^2 x} = 1,$$

となる。この計算において, $x/\sin x \rightarrow 1$ の極限は, 三角関数の微分における基本的な関係式である。後に説明するが, $x/\sin x$ の極限表現はロピタルの定理で導出してはならない。話を戻し, 上に書いた極限表現から,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\cot x - \frac{1}{x} \right) = 0,$$

であることが導かれる。この結果は, 余接関数 $\cot x$ が,

$$\cot x = \frac{1}{x} + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

のように級数展開できることを示唆している。

ゼロのゼロ乗 ゼロではない数 α のゼロ乗は 1 (形式的には $\alpha^0 = 1$) である。それは, 指数に関して $a^{x-y} = a^x/a^y$ が成り立つことから導かれる。つまり, $\alpha^0 = \alpha^{1-1} = \alpha/\alpha = 1$ ということである。このような計算を使う限り, $\alpha = 0$ に対するゼロ乗が定義できない。その方法に代わり, x^x について $x \rightarrow 0$ における極限を評価することによってゼロのゼロ乗を定義すると,

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^x = \lim_{x \rightarrow 0} \exp(x \log x) = \exp \left(\lim_{x \rightarrow 0} x \log x \right) = 1,$$

が得られる。この関係式を得るために、前に示したように、 $x \rightarrow 0$ の極限で $x \log x \rightarrow 0$ が成立することを利用した。関数 x^x は図 A.1 のような極限を描き、上で証明したように、 $x \rightarrow 0$ の極限で1に等しいことが確認できる。したがって、ゼロのゼロ乗を x^x の極限の意味で定義すると1である。

無限大のゼロ乗 この場合もゼロのゼロ乗に類似の形態 $(1/x)^x$ について $x \rightarrow 0$ における極限を評価すればよい。計算を実行すると、

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{x \rightarrow 0} \exp\left(x \log \frac{1}{x}\right) = \exp\left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1/x)}{1/x}\right) \\ &= \exp\left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x(1/x^2)}{-1/x^2}\right) = \exp 0 = 1, \end{aligned}$$

が得られる。第2行目への数式変形でロピタルの定理を利用した。関数 $(1/x)^x$ は図 A.1 のようなグラフを描き、確かに、 $x \rightarrow 0$ の極限で1に等しい。したがって、無限大のゼロ乗は $(1/x)^x$ の極限の意味で定義すると1である。

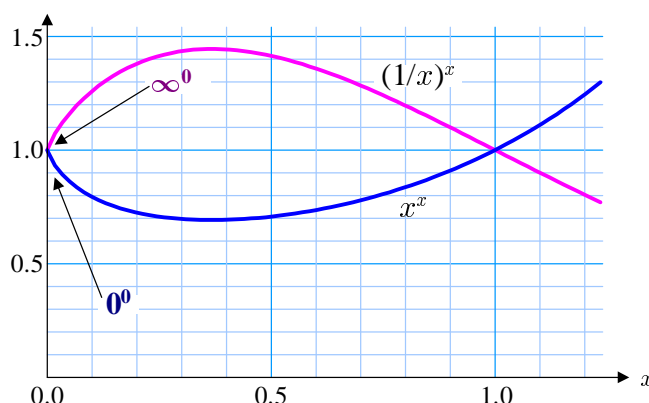


図 A.1: ゼロ乗にむかう関数の極限

ロピタルの定理の注意点 ロピタルの定理は関数の極限を評価するための便利な手段であるが、その適用には注意が必要である。例えば、 $x \rightarrow 0$ における $\sin x/x$ の極限をロピタルの定理によって評価すると、

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1,$$

のようになる。これを見ると、 $\sin x/x$ の極限值がロピタルの定理によって評価されたように見えるが、そうではない。上の数式変形にも示されるように、この極限値の評価には $\sin x$ の導関数が $\cos x$ であることを利用している。しかし、 $\sin x$ の導関数を導くには $\sin x/x \rightarrow 1$ である知識が必要なのである。つまり、ロピタルの定理で上の計算が導かれるのは当然の結果であり、ロピタルの定理が導いた結果ではないということである。

A.2 ウォリスの公式

正弦関数のべき乗 (n 乗) を区間 $[0, \pi/2]$ で定積分すると、その結果に面白い法則が成立する。その法則を与えるのがウォリスの公式である。ウォリスの公式によると、

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x \, dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)(2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n-2) \cdot 2n} \frac{\pi}{2}, \quad (\text{A.2})$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x \, dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n-2) \cdot 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1)(2n+1)}, \quad (\text{A.3})$$

が成立する。べき指数が偶数か奇数かで法則がわずかに異なるが、どちらも、類似した法則を示すことが面白い。この公式は次のようにして導出できる。まず、 $\sin^n x$ の定積分を I_n とおくと、部分積分の公式を用いて、

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx \\ &= - \left[\cos x \sin^{n-1} x \right]_0^{\pi/2} + (n-1) \int_0^{\pi/2} \cos^2 \sin^{n-2} x \, dx \\ &= (n-1)(I_{n-2} - I_n), \end{aligned}$$

のように計算できる。よって、積分 I_n は漸化式 $I_n = (n-1)/n \cdot I_{n-1}$ にしたがう。ここで、

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}, \quad I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = 1,$$

であることに注意するとウォリスの公式が得られる。ウォリスの公式は、余弦関数に対しても同一の法則:

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x \, dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)(2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n-2) \cdot 2n} \frac{\pi}{2}, \quad (\text{A.4})$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} x \, dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n-2) \cdot 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1)(2n+1)}, \quad (\text{A.5})$$

が成立する。余弦関数に対しても同一法則が成立することは、上と同様の手順で証明できるが、図を用いても成立することが納得できる。図***には正弦関数と余弦関数のべき乗が描かれている。正弦関数と余弦関数は x 軸方向に平行移動した関係にある。正弦関数のべき乗の積分が山の左半分の面積であるなら、余弦関数のべき乗の積分は山の右半分の面積である。山が左右対称であるので、余弦関数のウォリスの公式は正弦関数のウォリスの公式と同一となるのだ。

ウォリスの公式を利用すると円周率に関する面白い公式が得られる。その関係式は、 $0 \leq x \leq \pi/2$ において $\sin^{2n-1} x \leq \sin^{2n} x \leq \sin^{2n+1} x$ であることを利用すれば得られる。この関係式の等号が成立するのは $x = 0, \pi/2$ のときだけであるので、関係式を区間

$[0, \pi/2]$ で定積分した結果は, $I_{2n-1} < I_{2n} < I_{2n+1}$ なる関係がある。この定積分に関する不等式にウォリスの公式を代入すると,

$$\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n-2)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1)} < \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \frac{\pi}{2} < \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n-2) \cdot 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1)(2n+1)},$$

なる関係に変形される。ここで, $n \rightarrow \infty$ とすると, $2n/(2n+1) \rightarrow 1$ であるので, この関係式はさらに,

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdots (2n)^2}{1 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdots (2n-1)^2 (2n+1)},$$

のように変形される。この関係式は,

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)}, \quad (\text{A.6})$$

のような無限積として書くこともできる。この関係式はウォリス積と呼ばれる。この関係式は, 円周率を計算する効率のよいアルゴリズムではないが, 有理数の積が円周率に収束するという面白い性質を表している。その性質を表 A.1 に示そう。ウォリス積を有限の積で打ち切ったときの打ち切り項数と, ウォリス積を 2 倍した値を表に示している。この表

表 A.1: ウォリス積の 2 倍の円周率への収束

Num of product	Double of Wallis prod
10^1	3.0677038066
10^2	3.1337874906
10^3	3.1408077460
10^4	3.1415141186
10^5	3.1415847996
10^6	3.1415918681
10^7	3.1415925750
10^8	3.1415926394

によると, 項数の増加とともにウォリス積の 2 倍が円周率に近づいていくのがわかる。しかし, 1 億項の積であっても, 小数点以下の 7 桁までしか正しくないので, 効率よく円周率を計算する手法とはお世辞にも言えない。

付録B 部分分数展開

本文の中で、余接関数やベルヌーイ多項式の母関数などの部分分数展開を扱った。取り扱う関数が、たかだか1位の極しかもたない有理型関数は、本文で実行したような部分分数展開が可能である。本節では、その性質を証明する。

原点で正則で、たかだか1位の極しかもたない関数 $f(z)$ があったとする。この関数の極に z_n のような番号付けをし、それに対応する留数を r_n とする。ただし、極 z_n は $|z_1| \leq |z_2| \leq |z_3| \leq \dots$ となるように番号付けされている。さらに、 $|z_n| < R_n < |z_{n+1}|$ のような距離 R_n を選び、 $|z| = R_n$ となる閉曲線 C_n を考える。閉曲線 C_n は、極 z_1 から z_n までの極を取り囲む。ここで、自然数 q が与えられ、閉曲線 C_n の上で $|f(z)| = o(R^q)$ となるならば、関数 $f(z)$ は、

$$f(z) = \sum_{j=0}^{q-1} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} z^j + \sum_{n=1}^{\infty} r_n \left(\frac{1}{z - z_n} + \sum_{j=0}^{q-1} \frac{z^j}{z_n^{j+1}} \right), \quad (\text{B.1})$$

のように部分分数展開できる。この関係式において、 n についての総和が無限大までとられているが、極の数が有限であるときは、総和はすべての極を網羅するまでとられることを意味する。

上に示した部分分数展開は $g(\zeta) \equiv z^q f(\zeta) / \zeta^q (\zeta - z)$ を閉曲線 C_n 上で周回積分することによって証明できる。積分路 C_n の上において、 $|f(\zeta)| = o(R^q)$ であることから、被積分関数の絶対値は $|g(\zeta)| = o(R^{-1})$ となる。したがって、 $n \rightarrow \infty$ としたとき、 $g(\zeta)$ を C_n に沿って積分した結果はゼロとなる。

一方、 $f(\zeta)$ の周回積分は留数定理によっても計算することができる。そのために、被積分関数 $g(\zeta)$ の極 $\zeta = 0, z, z_n$ について留数を評価してみよう。まず、 $\zeta = 0$ に対応する留数の評価を始めるが、 $\zeta = 0$ は q 位の極、すなわち、2位以上の極である可能性があるので留数の評価には注意が必要である。被積分関数の分母が $\zeta^q (\zeta - z)$ のような積になっているので、被積分関数を $\zeta = 0$ 中心にしたローラン展開となるように変形すると、

$$g(\zeta) = \frac{z^q f(\zeta)}{\zeta^q (\zeta - z)} = -f(\zeta) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\zeta^{k-q}}{z^{k-q+1}},$$

なる形になる。さらに、原点で正則な関数 $f(\zeta)$ が $\zeta = 0$ 中心にテイラー展開できることを

利用すると、被積分関数 $g(\zeta)$ の展開式は、

$$g(\zeta) = - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} \zeta^j \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\zeta^{k-q}}{z^{k-q+1}} = - \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} \frac{\zeta^{j+k-q}}{z^{k-q+1}},$$

のように変形される。留数がローラン展開における -1 次の係数であることから、 $j+k-q = -1$ の条件で係数を集めれば、被積分関数 $g(\zeta)$ の留数を得ることができる。すなわち、その留数は

$$\operatorname{Res}_{\zeta=0} g(\zeta) = - \sum_{j=0}^{q-1} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} z^j,$$

である。ここで注意するのは、添え字 j の範囲である。上にも書いたように、留数に関する添え字の条件は $j = q - k - 1$ であるが、 k を 0 から増加させていったとき、 j は $q - 1$ から 1 ずつ減少する。添え字 j はゼロ以上の整数であるので、 j の可動範囲は 0 から $q - 1$ ということになる。

次に、 $\zeta = z$ における留数を計算する。この極 $\zeta = z$ は 1 位の極であるので、先ほどのように真面目にローラン展開しなくても留数を評価できる。その留数は、

$$\operatorname{Res}_{\zeta=z} g(\zeta) = \lim_{\zeta \rightarrow z} (\zeta - z) g(\zeta) = f(z),$$

のようにして計算できる。最後に、 $\zeta = z_n$ についての留数であるが、 $\zeta = z_n$ も 1 位の極であるので、

$$\operatorname{Res}_{\zeta=z_n} g(\zeta) = \lim_{\zeta \rightarrow z_n} (\zeta - z_n) \frac{z^q f(\zeta)}{\zeta^q (\zeta - z)} = - \frac{z^q r_n}{z_n^q (z - z_n)},$$

のようにして計算できる。ただし、この式の右辺は、さらに部分分数展開によって、

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{\zeta=z_n} g(\zeta) &= -r_n \left(\frac{z^{q-1}}{z_n^{q-1} (z - z_n)} + \frac{z^{q-1}}{z_n^q} \right) \\ &= -r_n \left(\frac{z^{q-1}}{z_n^{q-1} (z - z_n)} + \frac{z^{q-2}}{z_n^{q-1}} + \frac{z^{q-1}}{z_n^q} \right) \\ &= -r_n \left(\frac{1}{z - z_n} + \sum_{j=0}^{q-1} \frac{z^j}{z_n^{j+1}} \right), \end{aligned}$$

のように変形される。よって、留数定理により、積分路 C_n における $g(\zeta) \equiv z^q f(\zeta) / \zeta^q (\zeta - z)$ の周回積分は、 $n \rightarrow \infty$ としたとき、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{C_n} \frac{z^q f(\zeta)}{\zeta^q (\zeta - z)} d\zeta \\ &= f(z) - \sum_{j=0}^{q-1} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} z^j - \sum_{n=1}^{\infty} r_n \left(\frac{1}{z - z_n} + \sum_{j=0}^{q-1} \frac{z^j}{z_n^{j+1}} \right), \end{aligned}$$

のように表される。既に述べたように、積分路 C_n の上で $|f(z)| = o(R^q)$ であれば、その周回積分はゼロであるので、

$$f(z) = \sum_{j=0}^{q-1} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} z^j + \sum_{n=1}^{\infty} r_n \left(\frac{1}{z - z_n} + \sum_{j=0}^{q-1} \frac{z^j}{z_n^{j+1}} \right),$$

が成立する。この証明において、積分路が複素平面上の円であることを仮定したが、それは単に閉曲線 C_n が z_1 から z_n までの極を囲んでいることを意味しているだけであるので、積分路とする閉曲線 C_n は必ずしも円である必要はない。積分路上の任意の点における原点からの距離を R としたとき、その場所において $|g(z)| = o(R^{-1})$ であれば、 $g(z)$ を C_n に沿って周回積分した結果は必ずゼロとなるので、任意形状の積分路を仮定したとしても、この部分分数展開は成立する。

付録C 第2種スターリング数の一般項

第2種スターリング数は、漸化式によって計算できることができるが、一般項を計算する公式も知られている。しかし、漸化式からその公式を得るのは容易ではなく、むしろ、組み合わせ数学における考察を用いたほうがよい。本章では、組み合わせ数学の考察によって、第2種スターリング数の一般項を導出する。

第2種スターリング数は、組み合わせ数学において、 n 個のボールを r 個の箱に入れる組み合わせの数を与える。ただし、ボールには番号が書いてあり個体を識別できるようになっていて、箱は特に固体識別をしないものとする。

第2種スターリング数を導出するには、もう少し厳しい条件を課してみよう。すなわち、ボールも箱も個体識別ができるという条件である。すべてのボールを箱に入れた結果として、空箱が存在してもよければ、組み合わせの数は、 r^n となる。それを示すには表 C.1 のような、ボールと箱の対応表を書くことよいだらう。この対応表は、5つのボール (0, 1, 2, 3, 4) を収納する箱の番号 (0,1,2) を示した表である。この表によって、箱に入れる組み合わせをすべて書くことができる。この表の各行は、5桁の3進数表現とみなすことができる。そう考えると、5個のボールを3個の箱に入れる組み合わせは $3^5 = 243$ 通りである。ただし、前に書いたように、空箱が存在することも許容する。

表 C.1: ボールを入れる箱の番号 (ボール5個, 箱3個)

	0	1	2	3	4
0:	0	0	0	0	0
1:	0	0	0	0	1
2:	0	0	0	0	2
3:	0	0	0	1	0
4:	0	0	0	1	1
241:	2	2	2	2	1
242:	2	2	2	2	2

上の例を一般化して、ボールが n 個、箱が r 個の場合、各ボールを入れる箱を示した対応表は、 n 桁の r 進数とみなすことができる。したがって、 n 個のボールを r 個の箱に入れる組み合わせは、空箱の存在を許容した場合、 r^n 通り存在することになる。

空箱を許容しない場合の組み合わせの数を考えよう。まず、箱が1つの場合、空箱が存在することはありえないので、組み合わせの数は、

$$S_{n1} = 1^n = 1,$$

である。箱が2つの場合、求める組み合わせの数は、

$$S_{n2} = 2^n - \binom{2}{1} S_{n1},$$

となる。右辺の第2項が空箱が生じる組み合わせの数である。前半の乗数 $\binom{2}{1}$ は空箱とする箱を選ぶ組み合わせの数であり、 S_{n1} は残った箱に n 個のボールを入れる組み合わせの数である。箱が3個の場合、ボールを入れる組み合わせは、

$$S_{n3} = 3^n - \binom{3}{1} S_{n2} - \binom{3}{2} S_{n1},$$

となる。同様に考察すると、空箱が生じないように n 個のボールを r 個の箱に入れる組み合わせの数は、

$$S_{nr} = r^n - \sum_{p=1}^{r-1} \binom{r}{p} S_{np}, \quad (\text{C.1})$$

なる漸化式にしたがう。しかし、この漸化式から S_{nr} の一般項を求めるのは容易ではないので、 $r = 1, 2, \dots$ を適用したときの S_{nr} を具体的に求め、規則性を探してみよう。具体的に $r = 1, \dots, 6$ について S_{nr} を計算すると、

$$S_{n1} = 1^n,$$

$$S_{n2} = 1^n - 2 \cdot 2^n,$$

$$S_{n3} = 1^n - 3 \cdot 2^n + 3 \cdot 3^n$$

$$S_{n4} = 1^n - 4 \cdot 2^n + 6 \cdot 3^n - 4 \cdot 4^n,$$

$$S_{n5} = 1^n - 5 \cdot 2^n + 10 \cdot 3^n - 10 \cdot 4^n + 5 \cdot 5^n,$$

$$S_{n6} = 1^n - 10 \cdot 2^n + 15 \cdot 3^n - 20 \cdot 4^n + 15 \cdot 5^n - 6 \cdot 6^n,$$

が得られる。この結果から、

$$S_{nr} = \sum_{k=1}^r (-1)^{r-k} \binom{r}{k} k^n, \quad (\text{C.2})$$

が成立することが予想される。この予想が正しいことを数学的帰納法によって証明しよう。まず、 $r = 1$ のときにこの予想が正しいのは既に示したとおりである。この予想をもとに $S_{n,r+1}$ を計算した結果、(C.2) と同様の数式を得れば、予想は正しいと判断できるだろ

う。漸化式 (C.1) から始め, $S_{n,r+1}$ を計算すると,

$$\begin{aligned} S_{n,r+1} &= (r+1)^n - \sum_{p=1}^r \binom{r+1}{p} S_{np} \\ &= (r+1)^n - \sum_{p=1}^r \binom{r+1}{p} \sum_{k=1}^p (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n, \end{aligned}$$

のように計算できる。ここで, 添え字 p と k の組み合わせに注意して数式を変形すると,

$$\begin{aligned} S_{n,r+1} &= (r+1)^n - \sum_{k=1}^r \sum_{p=k}^r (-1)^{p-k} \binom{r+1}{p} \binom{p}{k} k^n \\ &= (r+1)^n - \sum_{k=1}^r \left[\sum_{p=k}^{r+1} (-1)^{p-k} \binom{r+1}{p} \binom{p}{k} - (-1)^{r-k} \binom{r+1}{k} \right] k^n, \end{aligned}$$

が得られる。ここで, 二項係数に関する公式 $\binom{a}{b} \binom{b}{c} = \binom{a}{c} \binom{a-c}{a-b}$ に注意すると,

$$\begin{aligned} S_{n,r+1} &= (r+1)^n - \sum_{k=1}^r \left[\sum_{p=k}^{r+1} (-1)^{p-k} \binom{r+1}{k} \binom{r+1-k}{r+1-p} - (-1)^{r-k} \binom{r+1}{k} \right] k^n \\ &= (r+1)^n - \sum_{k=1}^r \left[\binom{r+1}{k} \sum_{p=0}^{r+1-k} (-1)^{p-(r-k)} \binom{r+1-k}{p} - (-1)^{r-k} \binom{r+1}{k} \right] k^n, \end{aligned}$$

のように計算できる。さらに, 二項係数に関する別の公式:

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0,$$

に注意すると, 上式のブラケット内の第1項がゼロであることがわかるので,

$$S_{n,r+1} = (r+1)^n + \sum_{k=1}^r (-1)^{r+1-k} \binom{r+1}{k} k^n = \sum_{k=1}^{r+1} (-1)^{r+1-k} \binom{r+1}{k} k^n,$$

が導かれる。この結果は, (C.2) が r を $r+1$ で置き換えても成立することを示している。よって, (C.2) が成立することが帰納的に証明できたことになる。

上で計算した S_{nr} は, ボール n 個を箱 r 個に入れる組み合わせの数であり, しかも, ボールも箱も番号付けされて区別できる条件である。箱に番号がつけられず互いに区別ができない場合, 箱の数に起因する自由度 $r!$ が生じるので, ボール n 個を箱 r 個に入れる組み合わせの数は $S_{nr}/r!$ となる。この組み合わせの数は第2種スターリング数 $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ r \end{smallmatrix} \right\}$ に等しいので,

$$\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ r \end{smallmatrix} \right\} = \frac{1}{r!} \sum_{k=1}^r (-1)^{r-k} \binom{r}{k} k^n, \quad (\text{C.3})$$

なる関係が導かれる。

付録D 負整数のゼータ関数の考察

級数展開によるゼータ関数の定義 $\zeta(s) = 1^{-s} + 2^{-s} + 3^{-s} + \dots$ によると、その変数を負の値にすると、明らかに発散する。負の数を与えた場合、級数表現ではゼータ関数を定義できない。しかし、発散するにしても、解析接続で得られるゼータ関数の値と何らかの関連性があるかもしれない。ここで、負整数のゼータ関数について、発散級数と解析接続した関数値の関連性を考察していく。

ゼータ関数 $\zeta(s)$ の変数 s が負の値となった場合、級数によるゼータ関数の定義式:

$$\zeta(-k) = 1 + 2^k + 3^k + \dots$$

が収束しないことは既に説明したとおりである。数学的な厳密性はともかく、オイラーは交代級数によって定義したイータ関数:

$$\eta(-k) \equiv 1 - 2^k + 3^k - 4^k + \dots \quad (\text{D.1})$$

を導入し、 $\eta(-k) = (1 - 2^{k+1})\zeta(-k)$ なる関係式*から $\zeta(-k)$ を特定しようとしたのである。イータ関数 $\eta(-k)$ は前節で示したとおり、

$$\begin{aligned} \eta(-k) &= \frac{1}{(1-x)^{k+1}} \sum_{p=0}^{k-1} A_{k-1,p} x^p \Big|_{x=-1} \\ &= \frac{1}{2^{k+1}} \sum_{p=0}^{k-1} (-1)^p A_{k-1,p}, \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

によって与えられていた。なお、分子の展開係数 $A_{k-1,p}$ は本文中で既に与えてある。もともと交代級数で定義したイータ関数 (D.1) が収束しないため、それを解析接続した関数 (D.2) によって関数値を決定したのである。

それでは、発散する交代級数 (D.1) は、解析接続によって得た関数値との間に関連性をもたないだろうか？ 前節で既に確認したが、改めて $\eta(-k)$ を書いてみると、

$$\eta(0) = \frac{1}{2}, \quad \eta(-1) = \frac{1}{4}, \quad \eta(-2) = 0, \quad \eta(-3) = -\frac{1}{8}, \quad \dots$$

*もっとも、 $\zeta(-k)$ も $\eta(-k)$ も収束しないので、この関係式が成立すると考えるのは乱暴である。

のようになる。まず、 $k = 0$ について考えてみよう。そのイータ関数に対応するゼロ次べき乗の交代級数は $1, 0, 1, 0, \dots$ のように振動する。単純に考えれば、 $\eta(0) = 1/2$ はその平均値である。その安易な考えが他の次数 k について成り立つか検証しよう。

イータ関数 $\eta(-k)$ の変数が $k = 1$ の場合、対応するべき乗の交代級数は、 $1 - 2 + 3 - 4 + \dots$ である。この交代級数を n 項で打ち切った級数を：

$$\hat{S}_1^-(n) \equiv \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} j = 1 - 2 + 3 - 4 + \dots + (-1)^{n-1} n,$$

のように定義しよう。この表記は本書の第1章で取り扱ったべき乗和 $\hat{S}_k(n)$ に倣った記号を用いた。記号にハット (^) を付したのは、総和記号が 0 から $n-1$ でなく、 1 から n としたためである。交代級数 $\hat{S}_1^-(n)$ は、加算する項の数 n が増加するにともない、 $1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots$ のように振幅を拡大しながら振動する。その交代級数は、任意の正の整数 m を用いて、

$$\hat{S}_1^-(n) = \begin{cases} m & (n = 2m - 1), \\ -m & (n = 2m), \end{cases}$$

のように書くことができる。つまり、加算項の数 n の偶奇によって、計算式が異なるのである。この式を見ると、加算項が奇数個のときの交代級数の値と、偶数個のときの交代級数の値の平均値がゼロとなり、項の数 m に依存しないように見える。しかし、それは誤解である。加算項の数がさらに隣の奇数 $n = 2m + 1$ である場合には、交代級数の値は $m + 1$ となる。さらに、加算項の数がその隣の偶数 $n = 2m + 2$ の場合、交代級数の値は $-m - 1$ となるので、 $n = 2m + 1$ と $n = 2m + 2$ の組み合わせでの交代級数の平均値は再びゼロとなるのである。平均極限[†]の概念によって、一定の値を得るまで平均値をとる操作を繰り返す方法もあるが、別の方法を考えてみたい。

交代級数 $S_1^-(n)$ の値 (D) は、加算項の数 n が奇数と偶数の場合に分ける意味で、媒介変数 m を用いて書いている。その式を、あえて m を使わずに書くと、

$$\hat{S}_1^-(n) = \begin{cases} \frac{n+1}{2} & (n = \text{odd}), \\ -\frac{n}{2} & (n = \text{even}), \end{cases}$$

となる。この交代級数の値は、 n の偶奇によって上に書いた2つの値のどちらかになる。しかし、これを偶奇によらないものとし、次のように読み替えてみよう。交代級数 $\hat{S}_1^-(n)$ は、等確率で $(n+1)/2$ か、 $-n/2$ となる。そのように読み替えるのは、 $n \rightarrow \infty$ で交代級数の極限值を求めるので、 n の偶奇の依存性を排除すべきと考えたからである。偶奇の依存性を排除した平均値は、図 D.1 に示すように、振動する交代級数の上側包絡線と下側包絡線の間の中点である。つまり、その平均値は交代級数の振動の中心を与えると解釈できる。なお、1次の交代級数の場合、振動の中心は $\eta(-1) = 1/4$ に一致する。

[†]黒川信重, “オイラー探検,” 丸善, pp.71-77, 2012.

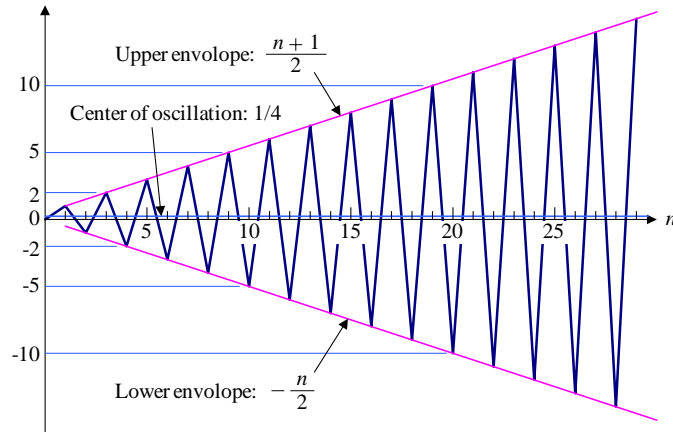


図 D.1: 交代級数の振動の中心 ($k = 1$)

振動の中心によるイータ関数の解釈が1次以外の交代級数でも $\eta(-k)$ と合致することを検証しよう。続く例として、2次の交代級数:

$$\hat{S}_2^-(n) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} j^2 = 1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{n-1} n^2,$$

を考えよう。この交代級数は、 n の増加にともない、 $1, -3, 5, -7, 9, \dots$ のように振幅を拡大しながら振動する。振幅の増加は1次の場合より速い。この交代級数は、図 D.2 (a) に示すように振動している。交代級数 $S_2^-(n)$ は、加算項の数 n との関係を書くと、

$$\hat{S}_2^-(n) = \begin{cases} \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n & (n = \text{odd}), \\ -\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n & (n = \text{even}), \end{cases}$$

のようになる。場合分けされた2つの結果は、それぞれ、2次の交代級数の上側包絡線と下側包絡線を与える。上側包絡線と下側包絡線は x 軸に対して対称であるので、それらの平均値として得られる振動の中心はゼロとなり、 $\eta(-2) = 0$ と一致する。

さらに次数が高い場合も同様に、交代級数の上側包絡線と下側包絡線の数式を導出し、その平均値を求め、振動の中心を特定するのである。例として、3次の交代級数は図 D.2 (b) に示すように、 n の増加と共に振幅を拡大しながら振動する。しかし、上側包絡線と下側包絡線を数式によって特定すれば、その振動の中心が $-1/8$ であることがわかるのだ。それでは、一般的な k 次の交代級数の振動の中心を導出しよう。そのために、 k 次べき乗和の公式:

$$S_k(n) = \sum_{j=0}^{n-1} j^k = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k \binom{k+1}{j} B_j n^{k-j+1},$$

を利用する。この公式では、加算の範囲 j が0から $n-1$ であることに注意が必要である。この公式を使うと、 k 次べき乗の交代級数は、

$$\hat{S}_k^-(2m-1) = S_k(2m) - 2^{k+1} S_k(m),$$

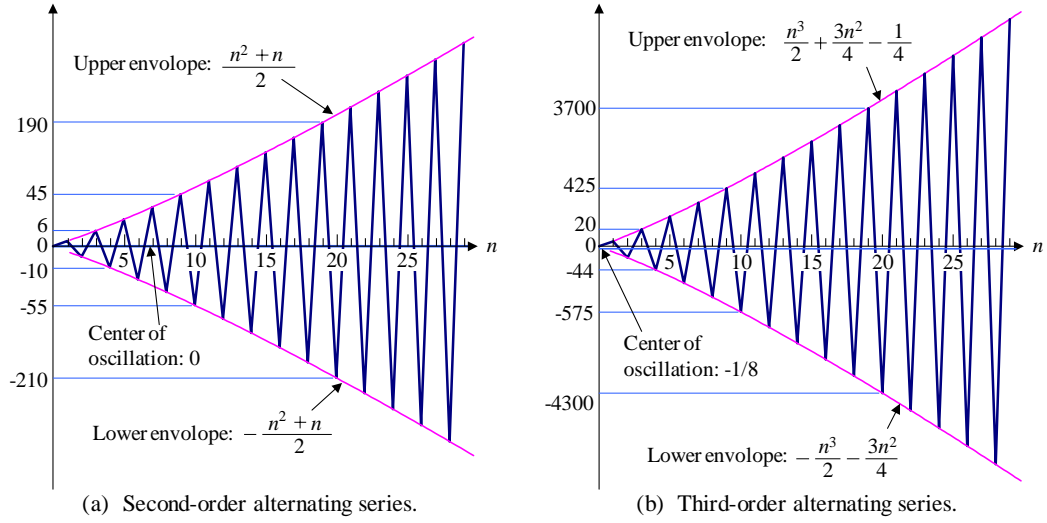


図 D.2: 交代級数の振動の中心

$$\hat{S}_k^-(2m) = S_k(2m) - 2^{k+1}S_k(m) - (2m)^k,$$

で計算できる。まず、加算項が奇数個のときの交代級数を計算すると、

$$\begin{aligned} \hat{S}_k^-(2m-1) &= \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k \binom{k+1}{j} (2^{k-j+1} - 2^{k+1}) B_j m^{k-j+1} \\ &= \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k \binom{k+1}{j} (1 - 2^j) B_j \cdot (2m)^{k-j+1}, \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

が得られる。それに対し、加算項が偶数個のときの交代級数は、

$$\hat{S}_k^-(2m) = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k \binom{k+1}{j} (1 - 2^j) B_j \cdot (2m)^{k-j+1} - (2m)^k, \quad (\text{D.4})$$

となる。続いて、 $\hat{S}_k^-(2m)$ と $\hat{S}_m^-(2m-1)$ から加算する項の数の偶奇依存を取り除き、交代級数の上側包絡線と下側包絡線を導出しよう。計算が容易であるので下側包絡線から特定する。下側包絡線は、(D.4) に $n = 2m$ を代入すると、

$$\hat{S}_k^-(n=2m) = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k \binom{k+1}{j} (1 - 2^j) B_j n^{k-j+1} - n^k, \quad (\text{D.5})$$

となる。上側包絡線は、下側包絡線より多くの計算の手順を要する。上側包絡線は、(D.3) に $n = 2m - 1$ を代入することによって、

$$\hat{S}_k^-(n=2m-1) = \frac{1}{k+1} \sum_{p=0}^k \binom{k+1}{p} (1 - 2^p) B_p \cdot (n+1)^{k-p+1}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{k+1} \sum_{p=0}^k \binom{k+1}{p} (1-2^p) B_p \sum_{j=0}^{k-p+1} \binom{k-p+1}{j} n^j \\
&= \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k+1} \sum_{p=0}^{k-j+1} \binom{k+1}{p} \binom{k-p+1}{j} (1-2^p) B_p n^j - \frac{(1-2^{k+1}) B_{k+1}}{k+1} \\
&= \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} \sum_{p=0}^{k-j+1} \binom{k-j+1}{p} (1-2^p) B_p n^j - \frac{(1-2^{k+1}) B_{k+1}}{k+1} \\
&= \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} \sum_{p=0}^j \binom{j}{p} (1-2^p) B_p n^{k-j+1} - \frac{(1-2^{k+1}) B_{k+1}}{k+1}, \quad (\text{D.6})
\end{aligned}$$

のように導出される。この数式変形は技巧的である。まず、第2行目への変形は $(n+1)^{k-p+1}$ の2項展開を適用した。第3行目への変形では、添え字 p と j の総和の順序を交換した。ただし、式に記述した総和記号のように計算すると、 $[p, j] = [k+1, 0]$ が余分に加算されるので、最終項でその余分を差し引いている。さらに、第4行目への変形では、二項係数の公式 $\binom{a}{b} \binom{a-b}{c} = \binom{a}{c} \binom{a-c}{b}$ を用いた。続いて、

$$\sum_{p=0}^k \binom{k}{p} (1-2^p) B_p = -(1-2^k) B_k \quad (k \geq 2), \quad (\text{D.7})$$

なる関係[‡]に注意すれば、(D.6)の右辺は、

$$\begin{aligned}
\hat{S}_k^-(n_{=2m-1}) &= \frac{1}{2} n^k - \frac{1}{k+1} \sum_{j=2}^k \binom{k+1}{j} (1-2^j) B_j n^{k-j+1} \\
&\quad - \frac{2(1-2^{k+1}) B_{k+1}}{k+1}, \quad (\text{D.8})
\end{aligned}$$

のように変形できる。この数式変形で総和の範囲が変わっているように見えるのは、次の3つの理由による。第1に、 $j=0$ のとき総和の結果が必ずゼロになるので数式から除外した。第2に、 $j=1$ が関係式(D.7)の適用範囲外なので、対応する項を総和記号の外に出した。最後に、 $j=k+1$ のとき、関係式(D.7)は成立するが、定数項となるので総和記号の外に書いた定数項に加算した。同じように、 $n=2m$ の場合の数式も同様に書き直すと、

$$\hat{S}_k^-(n_{=2m}) = -\frac{1}{2} n^k + \frac{1}{k+1} \sum_{j=2}^k \binom{k+1}{j} (1-2^j) B_j n^{k-j+1}, \quad (\text{D.9})$$

のようになる。先ほどの例のように、上側包絡線 $S_k^-(n_{=2m+1})$ と下側包絡線 $S_k^-(n_{=2m})$ の平均値を計算し、交代級数の振動の中心が得られる。導出された振動の中心をイータ関数の値として統合で結ぶと、

$$\eta(-k) = -\frac{(1-2^{k+1}) B_{k+1}}{k+1} \quad (\text{D.10})$$

[‡]ベルヌーイ多項式 $B_k(x)$ に関する性質: $S_k(1/2) = 2^{-k} - 1$ を利用すれば証明できる。

が得られる。この式からイータ関数の値は,

$$\eta(-1) = \frac{1}{4}, \quad \eta(-3) = -\frac{1}{8}, \quad \eta(-5) = \frac{1}{4}, \quad \dots$$

のように計算され, しかも, 負の偶数変数によるイータ関数がゼロになることは, 交代級数を正則関数に解析接続して得られた結果と合致するのである。さらに, 上に書いたようにイータ関数は $\eta(-k) = (1 - 2^{k+1})\zeta(-k)$ にてゼータ関数と関係づけられている。この関係に注目し, 負の整数変数によるゼータ関数を求めると,

$$\zeta(-k) = -\frac{B_{k+1}}{k+1},$$

が得られる。この結果は, 交代級数の形ではなく, ゼータ関数を複素数全体を定義域にできるように解析接続した結果と一致する。