

第4章 ゼータ関数

ベルヌーイ数はリーマンのゼータ関数とも関係があることが知られている。ゼータ関数とは、自然数のべき乗の逆数による無限級数、すなわち、 $\zeta(s) \equiv 1 + 1/2^s + 1/3^s + \dots$ で定義される関数である。特に、 $\zeta(1)$ を調和級数と呼ぶ。さらに、自乗逆数による級数 $\zeta(2)$ は、16世紀から17世紀初頭にかけてバーゼル問題として、その収束性を議論された。本章では、調和級数、バーゼル問題をとおしてゼータ関数を説明し、ベルヌーイ数との関係を紹介する。

4.1 調和級数

自然数の逆数は、 $1, 2, 3, \dots$ のように、順次小さくなり、その値はゼロに向かって収束していく。自然数の逆数を加算した級数、いわゆる調和級数は、加算する項の数を無限大にしたとき収束するのだろうか？ 調和級数は、記号を用いて、

$$H_n \equiv \sum_{k=1}^n \frac{1}{k},$$

によって定義される。この級数の隣り合う項との差は、 $H_n - H_{n-1} = 1/n$ であり、 $n \rightarrow \infty$ とすればこの差はゼロに収束するので、少なくとも紀元前において、調和級数はある有限の値に収束すると信じられていた。実際に調和級数を計算してみると、 $H_{100} = 5.18738$ 、 $H_{1000} = 7.48547$ のように値がゆっくりと上昇する。この上昇の緩さから、調和級数が発散するとは思えないかもしれない。しかし、調和級数は発散するのである。

調和級数が発散することは、14世紀にオレームによって証明された。オレームの証明にしたがって調和級数の発散を示してみよう。調和級数を次のように書いてみると調和級数の発散が理解できる。

$$\begin{aligned} H_4 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 + \frac{2}{2}, \\ H_8 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 1 + \frac{3}{2}.$$

この関係を一般化すると,

$$H_{2^n} > 1 + \frac{n}{2},$$

と書くことができる。この関係式において $n \rightarrow \infty$ とすれば右辺が発散するので、調和級数が発散することが示されるのである。

調和級数の項を部分的に抜き出し、分母が偶数だけ、または、奇数だけの項のみで構成される級数もやはり発散する。調和級数の項を部分的に抜き出した級数が発散することは、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdots \right) = \infty, \\ 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \cdots &> \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \cdots \right) = \infty, \end{aligned}$$

と書けば証明できる。つまり、調和級数は項を半分に間引いた程度では収束する級数をつくることはできない。同様に、分母が3の倍数になるものだけ、さらに、分母が1000の倍数になるものだけ間引いて抜き出したとしても、やはり、その級数は発散する。

総和計算の項数 n に対する調和級数 H_n は表 4.1 のようになる。その結果によると、調和級数 H_n は $\log n$ と同じくらいの速さで上昇している。しかも、 $\gamma_n \equiv H_n - \log n$ を計算してみると下表のように一定の値に収束しそうである。

表 4.1: 調和級数と対数関数の関係

n	H_n	γ_n
10	2.9289682	0.6263831
100	5.1873775	0.5822073
1 000	7.4854708	0.5777155
10 000	9.7876060	0.5772656
100 000	12.0901461	0.5772206
1 000 000	14.3927267	0.5772161
10 000 000	16.6953113	0.5772157

調和級数 H_n と対数関数 $\log x$ と差、すなわち、 γ_n を調べてみよう。その関係を調べるには図 4.1 に示す幾何学的関係に注目すればよい。この図は、関数 $f(x) = 1/x$ の定積分を長方形の面積で近似した場合を表している。図 4.1 (a) は、濃い網掛けの長方形の面積が関数の積分値より少なくなるように配置した図である。一方、図 4.1 (b) は、濃い網掛けの長方形の面積が関数の積分値より大きくなるように配置した図である。

図 4.1 のどちらも、濃い網掛けと薄い網掛けの長方形の面積の和は H_n (図では $n = 8$ としている) である。そのうち、関数 $1/x$ の積分の見積もり量に含むのは濃い網掛け部のみ

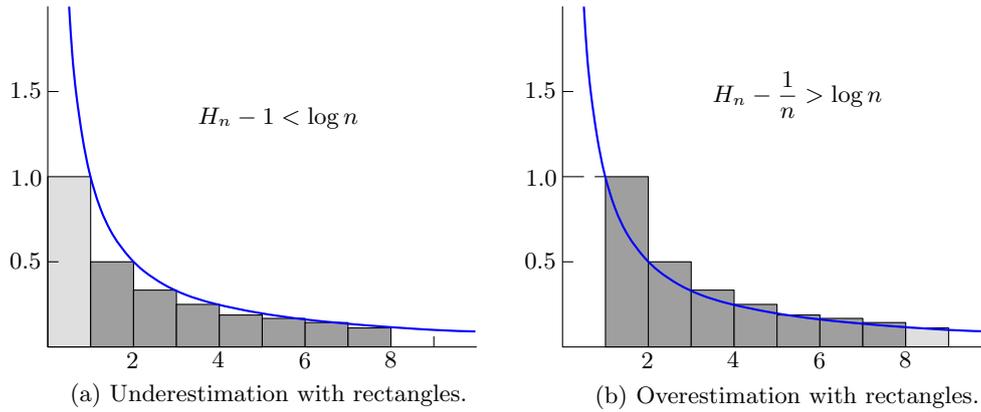


図 4.1: 調和級数と対数関数の関係

であり、薄い網掛け部は除外される。したがって、関数 $1/x$ を区間 $[1, n]$ で積分した結果は、

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} < \log n < \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k},$$

なる不等式で記述できるが、これを調和級数の記号 H_n を用いて書き換えると、

$$H_n - 1 < \log n < H_n - \frac{1}{n},$$

となる。さらに、この不等式から H_n を減じて -1 倍すると、 $1/n < \gamma_n < 1$ が得られる。しかし、これだけでは γ_n が収束するとはいえない。なぜなら、数列 $a_n = (2 + (-1)^n)/4$ のように $1/n < a_n < 1$ を満足しているが、収束せずに振動している場合も考えられるからである。そこで、 γ_n の階差を評価してみよう。

$$\begin{aligned} \gamma_n - \gamma_{n-1} &= H_n - H_{n-1} + \log(n-1) - \log n \\ &= \frac{1}{n} + \log\left(1 - \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

この階差を評価するには、 $x \neq 0$ に対して $x > \log(1-x)$ が成立することに注意すればよい。この関係式の x を $-1/n$ で置き換えれば、

$$\gamma_n - \gamma_{n-1} < 0,$$

であることが導かれる。したがって、 γ_n は単調減少の数列である。単調減少の数列 γ_n が $n \rightarrow \infty$ の条件で $0 < \gamma_n < 1$ となるということは、 γ が区間 $(0, 1)$ の中のどこかの点に収束することを意味している。その極限值は、

$$\gamma \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \right), \quad (4.1)$$

のように記号 γ によって記述し、**オイラー一定数**と呼ばれる。これを利用すると、 n が十分に大きければ、調和級数は $H_n \simeq \log n + \gamma$ なる近似式で評価できる。

4.1.1 オイラー定数

前節で調和級数 H_n が $\log n$ と同じくらいの速さで発散し、 $\gamma_n \equiv H_n - \log n$ が特定の値に収束することを示した。オイラー定数と呼ばれるその特定の値は、0 から 1 の間のある数値であることだけはわかっている。本節では、オイラー定数がどのくらいの値になるのかを、もう少し詳しく評価する。

前節での定義によると、調和級数と対数関数の差 γ_n は、

$$\gamma_n = H_n - \log n = H_n - \int_1^n \frac{dx}{x},$$

のように書くことができる。おおまかな評価であるが、右辺の積分は図 4.2 のような台形公式によって評価することができる。その図は、 x 軸上の各整数の座標における関数値と x 軸によって指定される台形の面積を積分区間に渡って加算することによって近似的に積分計算することを表している。その台形公式によって積分計算すると、

$$\begin{aligned} \gamma_n &\simeq H_n - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \cdots - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right) \\ &= H_n - \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1}\right) - \frac{1}{2n} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}, \end{aligned}$$

が得られる。この近似式において $n \rightarrow \infty$ の極限をとると、 $\gamma \simeq 1/2$ となる。かなり荒い近似であるが、オイラー定数 γ は 0.5 に近い数値である。

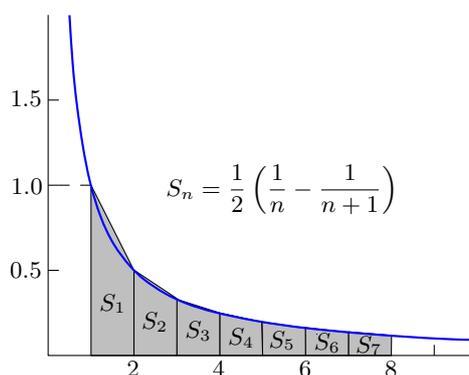


図 4.2: 台形公式による積分計算方法

台形公式による積分の評価はかなり荒い近似である。もう少し精度よくオイラー定数を評価できないだろうか。オイラー定数を与える数列 γ_n の定義式は、

$$\begin{aligned} \gamma_n &= H_n - \log n = H_n - \log n + \log 1 \\ &= H_n - \left[\log n - \log(n-1)\right] - \left[\log(n-1) - \log(n-2)\right] - \cdots - \left[\log 2 - \log 1\right], \end{aligned}$$

のように変形できる。さらに、対数関数のテイラー級数展開 $\log x = x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + \dots$ を用いると、上の式は、

$$\begin{aligned}\gamma_n &= H_n - \sum_{k=1}^{n-1} \log \left(1 + \frac{1}{k}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{3k^3} - \frac{1}{4k^4} + \dots\right) + \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2k^2} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{3k^3} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{4k^4} - \dots,\end{aligned}$$

のように変形される。この関係式において、 $n \rightarrow \infty$ の極限をとると、

$$\gamma = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3k^3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^4} - \dots, \quad (4.2)$$

が得られる。この結果は、第 4.3 節で紹介するゼータ関数 $\zeta(s)$ によって記述できる。後に示すように、 s 次の調和級数は $\zeta(s)$ と定義される。ゼータ関数を用いてオイラー定数を記述すると、

$$\gamma = \frac{\zeta(2)}{2} - \frac{\zeta(3)}{3} + \frac{\zeta(4)}{4} - \dots, \quad (4.3)$$

となる。とはいえ、オイラー定数を計算する公式が得られたと喜んではいけない。なぜなら、この級数は収束が非常に遅いからである。具体的には、2 以上の自然数 s に対して $\zeta(s) > 1$ であることから、この級数は $\log 2 = 1 - 1/2 + 1/3 - \dots$ よりも収束が遅いのである。そう考えただけで、この公式を計算に利用しようとは思わないだろう。

一方、上で計算した同一の γ_n から計算を開始しても、もう少し収束が速い級数を得ることができる。導出過程を示すと、

$$\begin{aligned}\gamma_n &= H_n - \sum_{k=2}^n \log \frac{k}{k-1} = H_n + \sum_{k=2}^n \log \left(1 - \frac{1}{k}\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{3k^3} + \frac{1}{4k^4} + \dots\right) \\ &= 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{2k^2} - \sum_{k=2}^n \frac{1}{3k^3} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{4k^4} - \dots,\end{aligned}$$

となる。この計算結果は、 $n \rightarrow \infty$ の極限をとり、ゼータ関数を用いると、

$$\gamma = 1 - \frac{\zeta(2) - 1}{2} - \frac{\zeta(3) - 1}{3} - \frac{\zeta(4) - 1}{4} - \dots = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(k+1) - 1}{k+1}, \quad (4.4)$$

なる級数が得られる。十分に大きい自然数 k に対して $\zeta(k) - 1 \simeq 2^{-k}$ であるので、級数 (4.4) は級数が 3 項だけ進行するたびに 10 進数で 1 桁だけ有効桁が増加する。

4.1.2 素数の逆数和

調和級数を構成する項の部分集合として、素数の逆数のみによる級数の収束を調べてみよう。自然数の中における素数の分布は、その値が大きくなるにつれてまばらになっていくため、自然数全体における素数の割合はかなり小さいはずである。とはいえ、素数の逆数による級数:

$$P_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \cdots + \frac{1}{p_n},$$

は収束するだろうか。

素数の逆数による級数は無限項まで存在する。つまり、素数が無限に存在するということなのだが、その事実は古代ギリシャでも知られていた。古代ギリシャのユークリッドが次のようにして、素数が無限に存在することを証明している。

証明 素数が有限個 (n 個) であることを仮定し、すべての素数を $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ と書く。すべての素数の積に 1 を加えた自然数 q , すなわち, $q = p_1 p_2 p_3 \cdots p_n + 1$ を考える。自然数 q は, p_1 から p_n のどの素数で割っても, 必ず, 1 が余る。すなわち, p_1 から p_n がすべての素数であるという仮定に矛盾する。つまり, 素数は無限に存在する。◻

さて, 表 4.2 によって素数の逆数による級数を調べてみよう。その表には, 与えられた上限数 (upper limit) を超えない素数の個数 n と, 最大の素数 p_{n-1} と, それら n 個の素数の逆数からなる級数の値 S_n を記載している。素数の逆数による級数は調和級数に比べ, かなりゆっくりと上昇する。上限数を百万としたときの級数にしても, その値は 2.887 程度にしかならない。これくらい上昇が遅いと, この級数はある数値に収束しそうな気がするのだが, 驚くことにこの級数も発散するのである。

表 4.2: 素数の逆数による級数

Upper limit	n	p_{n-1}	S_n
10	4	7	1.17619048
100	25	97	1.80281720
1 000	168	997	2.19808013
10 000	1 229	9 973	2.48305998
100 000	9 592	99 991	2.70527218
1 000 000	78 498	999 983	2.88732810
10 000 000	664 579	9 999 991	3.04144938

素数の逆数による級数は, オイラーがゼータ関数を研究することによって発散することを発見した。一方, 20 世紀にエルデシュがわかりやすい証明によって, 素数の逆数による

級数が発散することを示しているのでその方法を紹介します。エルデシュの証明は背理法によるものである。つまり、素数の逆数による級数が収束すると仮定した上でその矛盾を暴くことによって級数の発散を証明するのである。

証明 素数の逆数による級数が収束するという事は、ある任意の正の数 ε が与えられたとき、

$$\frac{1}{p_{n+1}} + \frac{1}{p_{n+2}} + \frac{1}{p_{n+3}} + \cdots < \varepsilon,$$

を満たす整数 n が存在する。この ε は、任意の正の数であるのでどんな値であってもよい。どんなに小さい ε を設定しても、必ず、上の不等式を満たす n が存在するという事によって級数の収束を約束しているのである。まず、素数の逆数の級数が収束することを仮定し、 ε はどのような正の数であってもよいので、 $\varepsilon = 1/2$ としてみよう。さらに、上の不等式の両辺に自然数 N を乗じると、不等式は

$$\frac{N}{p_{n+1}} + \frac{N}{p_{n+2}} + \frac{N}{p_{n+3}} + \cdots < \frac{N}{2},$$

となる。ここで、1 から N までの自然数のうち、 p_n 以下の素数だけで因数分解できる自然数の個数を N_1 個とする。逆に、少なくとも p_{n+1} 以上の約数をもつ自然数の個数を N_2 個とする。言うまでもなく、 $N = N_1 + N_2$ でなければならない。ここで、上の不等式の各項の小数部を切り捨てると、その不等式は

$$\left\lfloor \frac{N}{p_{n+1}} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{p_{n+2}} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{p_{n+3}} \right\rfloor + \cdots < \frac{N}{2},$$

なる形に書き換えられる。小数部を切り捨てることによって、左辺はより小さな値になるので、不等式としては成立したままである。ところで、 $\lfloor N/p_{n+1} \rfloor$ は、1 から N までの自然数のうち、 p_{n+1} を約数とする自然数の個数である。そう考えると、この不等式は、

$$N_2 \leq \left\lfloor \frac{N}{p_{n+1}} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{p_{n+2}} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{p_{n+3}} \right\rfloor + \cdots < \frac{N}{2},$$

と書けるはずである。すなわち、 $N_2 < N/2$ である。一方、 p_n 以下の素数のみで因数分解できる自然数 ν は、

$$\nu = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_n^{e_n} \cdot m^2,$$

のように書くことができる。ただし、指数 e_1, e_2, \dots, e_n は0または1であり、 m はやはり p_n 以下の素数のみで因数分解できる自然数である。この式は、自然数 ν を因数分解したとき、素数の偶数乗となっている因子をすべて m^2 に放り

込み, 残りの因子を $p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_n^{e_n}$ として並べたと思えばよい。例えば, 11 以下の素数のみで因数分解できる自然数 2683296 は,

$$2683296 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11^3 = 2^1 \cdot 3^0 \cdot 5^0 \cdot 7^1 \cdot 11^1 \cdot (2^2 \cdot 3^1 \cdot 11^1)^2,$$

となるので, この場合, $[e_1, e_2, e_3, e_4, e_5] = [1, 0, 0, 1, 1]$, $m = 132$ である。さて, p_n 以下の素数で因数分解した場合, 指数 $[e_1, e_2, \dots, e_n]$ の組み合わせは 2^n 通り存在し, m の選び方はたかだか \sqrt{N} 通りである。よって, p_n 以下の素数のみで分解できる自然数の個数 N_1 は, $N_1 \leq 2^n \sqrt{N}$ となる。ここで, $N > 2^{2(n+1)}$ となるように N を選べば, $N_1 < N/2$ となる。つまり, $N_1 + N_2 < N$ となり, 自然数の個数に矛盾が生じる。この矛盾が生じた理由は, N 以下の自然数のうち p_{n+1} 以上の素数を約数とする自然数の個数を $N_2 < N/2$ のように限定してしまったことである。これにより, 不等式:

$$\frac{1}{p_{n+1}} + \frac{1}{p_{n+2}} + \frac{1}{p_{n+3}} + \cdots < \frac{1}{2},$$

を満足する n は存在しないことになる。したがって, 素数の逆数による級数は発散する。◻

4.1.3 交代調和級数

自然数の逆数を順次加算した級数, いわゆる調和級数が発散することは既に述べた。調和級数に加算する第 n 項は $1/n$ であるので, 加算する項の増加とともに加算する項はゼロに近づいていく。それにも関わらず調和級数は発散するのである。しかし, 加算する項の符号を交互に入れ替え,

$$\hat{H}_n \equiv \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n},$$

のように計算される級数は収束する。このように自然数の逆数を符号を交互に入れ替えながら加算した結果を交代調和級数と呼ぶ。交代調和級数の偶数番目の値 \hat{H}_{2n} に注目したとき, $\hat{H}_{2n} = \hat{H}_{2n-1} + 1/2n$ である。また, $2n+1$ 番目の値が,

$$\hat{H}_{2n+1} = \hat{H}_{2n} - \frac{1}{2n+1} = \hat{H}_{2n-1} + \frac{1}{2n(2n+1)},$$

であるので, 交代調和級数は,

$$\hat{H}_{2n-1} < \hat{H}_{2n+1} < \hat{H}_{2n},$$

なる関係を満たす。第 $2n + 1$ 番目の値をはさむ 2 つの値の差は $1/2n$ である。この差は n が上昇するとゼロに近づいていくため、交代調和級数の極限值は特定の値に追い詰められ、収束するのである。交代調和級数が収束する先の数値は、本書で既に述べているように、

$$\hat{H}_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \log 2,$$

である。この関係式は、対数関数のマクローリン級数 $\log(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + \cdots$ に $x = 1$ を代入して得られる。

交代調和級数の収束は、収束の中でも条件収束に分類される。条件収束を簡単に説明しよう。一般的に議論するため、数列 a_n を考えよう。この数列による級数:

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_n,$$

が収束するとき、数列 a_n の絶対値による級数 $\sum |a_n|$ も収束できる場合がある。そのとき、級数 S_n は絶対収束するという。それに対して、絶対値による級数が収束せず、 S_n が収束する場合、 S_n は条件収束するという。交代調和級数の場合に置き換えると、絶対値による級数が調和級数である。既に見てきたように調和級数は発散し、交代調和級数が収束する。したがって、交代調和級数は収束の中でも、条件収束するということである。

交代調和級数のように条件収束する級数には不可思議な性質がある。条件収束する級数は、総和の順序を入れ替えると結果が変化する場合があるのだ。交代調和級数を次のように順序を入れ替えてみよう。

$$\begin{aligned} \hat{H}_\infty &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots \\ &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots \end{aligned}$$

この数式は、単に加算する項の順序を入れ替えただけであるが、さらに計算を進めると、

$$\begin{aligned} \hat{H}_\infty &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{12} + \cdots \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots\right) \\ &= \frac{\log 2}{2}, \end{aligned}$$

が得られる。もともと $\hat{H}_\infty = \log 2$ のはずだったのに、加算の順序を入れ替えるとその半分の値になってしまった。加算の順序を入れ替えて総和が変化することは、条件収束であることを利用したからくりがある。

加算順序を入れ替えて総和が変化するからくりは、奇数分母の項と偶数分母の項の比率が $1:1$ でなくなっていることである。上の例では、第 0 目から数えたとき、奇数分母は 3

の倍数で、偶数分母はそれ以外で現れる。例えば、奇数分母の項を 100 万項だけ加算した場合、偶数分母の項が 200 万項も減算されているのである。これを数式で書くならば、

$$\begin{aligned}
 \hat{H}_N^{(3)} &= \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{4k+2} - \frac{1}{4k+4} \right) \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2k+1} - \sum_{k=0}^{2N-1} \frac{1}{2k+2} \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2k+1} - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2k+2} - \sum_{k=N}^{2N-1} \frac{1}{2k+2} \\
 &= \sum_{k=0}^{2N-1} \frac{(-1)^k}{k+1} - \frac{1}{2} \sum_{k=N}^{2N-1} \frac{1}{k+1},
 \end{aligned}$$

のようになるだろう。加算順序の入れ替えで値が変化することが明らかになったので、左辺を \hat{H}_N でなく、新たな記号で $H_N^{(3)}$ と書くことにした。この式の N を 100 万とするならば、右辺第 1 項は奇数分母と偶数分母を 100 万項ずつ用いた級数であり、第 2 項は余った偶数分母の項が減算されているのを表している。この右辺第 2 項が、順序入れ替えによって値が変わる要因である。級数の収束条件に関するコーシーの判定法によると、級数 S_n が収束する条件は、

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \text{ such that } N \leq m < n \Rightarrow |S_n - S_m| < \varepsilon,$$

と書かれる。この数式は、十分に大きな N を選んだときに、第 n 項まで加算した級数 S_n と第 m 項まで加算した級数 S_m の差がゼロに収束することを表現している。ここで、(4.5) を

$$\hat{H}_N^{(3)} = \hat{H}_{2N} - \frac{H_{2N} - H_N}{2},$$

と書けばコーシーの判定条件と結びつきやすい。この式の右辺第 2 項は調和級数の差が現れている。第 1 項は交代調和級数であり、 $N \rightarrow \infty$ とすれば $\log 2$ に収束する。しかし、調和級数が収束しないことから、コーシーの判定法を逆に利用すると第 2 項が $N \rightarrow \infty$ としてもゼロに収束しないことが言える。したがって、順序を入れ替えた交代調和級数の値が変化することが示されるのである。この議論は他の数列についても同様である。条件収束をする数列であれば、同様に N をどんなに大きくとっても右辺第 2 項をゼロにできないので、加算の順序を変えると、級数の値が変化するのである。一方、絶対収束する数列ならば、コーシーの判定法によって、 N を十分に大きくとれば右辺第 2 項がゼロに収束するので、加算の順序を入れ替えても級数の値は変化しない。

条件収束する数列は、加算の順序を入れ替えることによって、任意の値に級数を収束させることができる。交代調和級数の場合、級数が目標の値より小さければ順次、奇数分母

の項を加算し、級数が目標の値を超えれば偶数分母の値を減算すればよい。例えば、級数:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{4} + \frac{1}{15} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} - \frac{1}{6} \\ + \frac{1}{23} + \frac{1}{25} + \frac{1}{27} + \frac{1}{29} - \frac{1}{8} + \frac{1}{31} + \frac{1}{33} + \frac{1}{35} + \frac{1}{37} - \frac{1}{10} + \dots,$$

は $\sqrt{2}$ に収束する。同様に、加算順序を入れ替えることによって、奇数分母の項と偶数分の項の混在比を操作すれば、級数を 100 のような大きな値や、 -10 のような負の値に収束させることも可能である。

4.2 バーゼル問題

調和級数だけでなく、素数の逆数による級数までもが発散することがわかった。次に、自然数の自乗の逆数による級数を調べよう。自然数の逆数による級数と書いたが、自然数のうち自乗数となる数値の逆数による級数と解釈してもよい。つまり、加算される項は、調和級数よりもずいぶんまばらになっているはずだ。問題とする級数を形式的に書くと、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots,$$

となる。この無限級数は、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 1 + \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = 2,$$

であることから、ある特定の値に収束することが容易に予想される。この予想はある驚くべき事実を意味している。それは、自然数の部分集合としての素数の列 $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots$ よりも、自乗数 $1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \dots$ の方が少ないということである。

自乗数の逆数和の極限值を特定する問題はバーゼル問題と呼ばれる。バーゼル問題は 1644 年に、モンゴリによって提起され、ヨハン・ベルヌーイもその問題に取り組んだが解決できなかった。ところが、1735 年、ヨハン・ベルヌーイの弟子であったオイラーが、自乗数の逆数和が $\pi^2/6$ であることを特定したのである。本節では、オイラーによるバーゼル問題の解法と、フーリエ級数を利用した解法について述べる。

オイラーによる解法 オイラーが与えたバーゼル問題の解法には、無限乗積による正弦関数の表現が必要である。正弦関数とゼロを等号で結んだ方程式 $\sin x = 0$ は、 $x = \pi n$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) を解とする。複素関数において、方程式 $f(z) = 0$ が z_1, z_2, \dots, z_n を解とするならば、関数 $f(z)$ は $f(z) = c(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$ なる形で表現できる。ただし、 c は z に依存しない任意の複素定数である。正弦関数についても同様に考えると、

$$\sin x = cx(x + \pi)(x - \pi)(x + 2\pi)(x - 2\pi) \cdots = cx \prod_{n=1}^{\infty} (x^2 - \pi^2 n^2),$$

なる形*で書くことができる。見てわかるとおり、この数式は代数学の基本定理を利用した表現である。むしろ、後の展開を考えると、乗積の各要素に $-1/\pi^2 n^2$ を乗じ、

$$\sin x = Cx \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right),$$

と書いておいたほうがよいかもしいない。ここで、 c も C も任意の定数であるとする。ここで、 $x \rightarrow 0$ としたとき $\sin x/x \rightarrow 1$ であることを利用して定数 C を求めると、 $C = 1$ となるはずである。よって、正弦関数は無限乗積:

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right),$$

によって表現することができる。これがオイラーが導出した正弦関数の無限乗積による表現である。この無限乗積による表現は、余接関数 $\cot x$ の部分分数展開を積分することによっても導出できる。(むしろ、そのほうが数学的に厳密である。) この乗積表現で正弦関数を近似できることを図 4.3 に示す。乗じる項の数が少ないとすぐに発散するが、多くの項を乗じると正弦関数に近づくことがこの図からもわかるだろう。ところで、無限乗積を

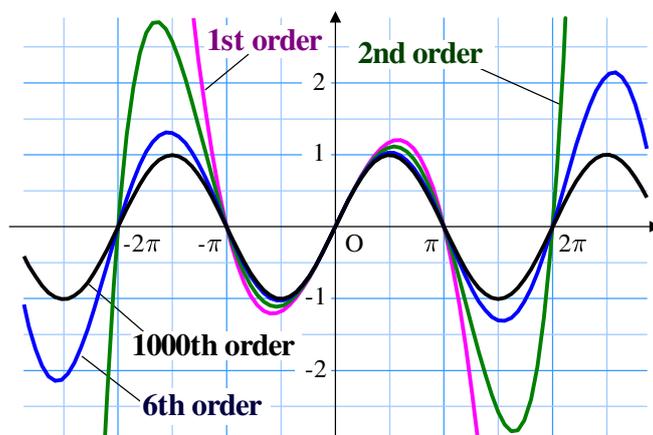


図 4.3: オイラーの乗積による正弦関数の近似

べき級数として3次の項まで展開すると、

$$\sin x = x - x^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 n^2} + \dots,$$

となる。一方、正弦関数はテイラー級数展開によって、 $\sin x = x - x^3/3! + \dots$ と記述することもできる。テイラー級数は一意的であるので、無限乗積を展開した式はテイラー級数

*ゼロ点が $n\pi$ というだけで、このような無限乗積を決定するのはかなり強引である。なぜなら、ゼロ点が $n\pi$ である関数はのこぎり波や三角波のように他にもいくらかでも仮定できるからである。後に述べるように、正弦波の無限乗積を導出するには、余接関数の部分分数展開を利用するのが定石である。

展開と一致しなければならない。その要請のもと、互いの3次の係数を等号で結ぶと、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

が得られる。つまり、自然数の自乗の逆数による級数は $\pi^2/6$ に収束するという事実が導き出された。オイラーはこのようにしてバーゼル問題を解答したのだ。

フーリエ変換による解法 バーゼル問題を解決する方法はオイラーが示した証明法だけではない。別の証明法として、フーリエ変換を利用した方法を紹介しよう。この証明のため、図 4.4 に示す周期 2π で振幅 $\pi/2$ の三角波を考えよう。この三角波 $f(x)$ は、

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + x & \left(-\frac{\pi}{2} \leq x < 0\right), \\ \frac{\pi}{2} - x & \left(0 \leq x < \frac{\pi}{2}\right), \end{cases}$$

によって定義され、それ以外の x では周期性 $f(x+2\pi) = f(x)$ によって関数の値が決められる。このような周期性をもつ関数は、フーリエ級数展開できる。フーリエ級数展開とは、

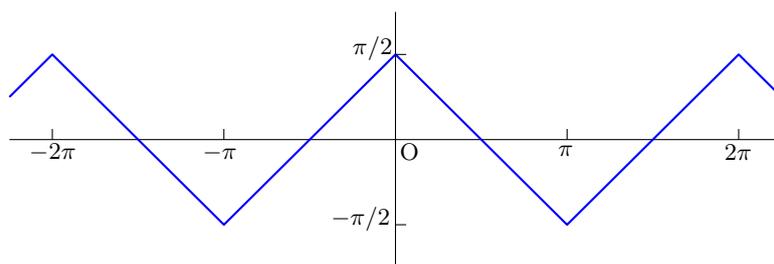


図 4.4: 周期 2π で振幅 $\pi/2$ の三角波

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx),$$

のように整数倍波成分の三角関数の重ね合わせによって関数を表現する方法である。フーリエ級数展開に現れる展開係数 A_0, A_n, B_n は、

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx,$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx,$$

によって計算できる。この計算に関するヒントとして、 $f(x)$ が奇関数であれば $A_n = 0$ 、偶関数であれば $B_n = 0$ である。関数 $f(x)$ として想定している三角波は偶関数であるので $B_n = 0$ である。具体的に展開係数 A_n を定めると、

$$f(x) = 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{\pi(2k+1)^2},$$

が得られる。この三角波が $f(0) = \pi/2$ を満たすことに注意すると、上のフーリエ変換に $x = 0$ を代入すると、

$$\frac{\pi}{2} = 4 \left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{3^2\pi} + \frac{1}{5^2\pi} + \cdots \right),$$

なる関係式が得られる。両辺に $\pi/4$ を乗じると、この関係式は、

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots,$$

のように書くことができる。この式をさらに変形すると、

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2}{8} &= \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots \right) - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \end{aligned}$$

となるので、ただちに

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

が得られる。すなわち、バーゼル問題が解けたことになる。

バーゼル問題の解は神秘的な事実を教えてくれる。つまり、自然数の自乗の逆数和が超越数、しかも、円周率に関係する値に収束するという事実である。ただし、自然数の自乗の逆数和の収束が遅いため、このバーゼル問題の解は円周率を求めるためには利用できない。しかしながら、さらに一般化して、自然数の s 乗の逆数和がどのような数値に収束するのかという興味がわいてくる。しかも、本章の後で示すように、それらの一部はベルヌーイ数を用いて記述できるのである。

4.3 ゼータ関数

前節までに、自然数の逆数による級数が発散し、自乗の逆数による級数が $\pi^2/6$ に収束することを示した。当然の流れとして、それを一般化し、自然数の s 乗の逆数による級数に関する興味がわいてくるだろう。その級数の極限值を s の依存性について定義した関数:

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots, \quad (4.5)$$

は**ゼータ関数**と呼ばれる。本節では、ゼータ関数について、そして、その一部がベルヌーイ数も用いて記述できることを説明する。

4.3.1 ゼータ関数の収束

自然数の s 乗の逆数による級数の極限值として定義されるゼータ関数 $\zeta(s)$ は、 $s = 1$ では発散することがわかっている。一方、 $s = 2$ の場合はバーゼル問題の解であるので、 $\zeta(2) = \pi^2/6$ である。ここでは、ゼータ関数が収束するための変数 s の条件を調べてみよう。

自然数の s 乗の逆数による級数を、

$$H_n^{(s)} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots + \frac{1}{n^s},$$

のように定義してみる。オレームの証明に倣って数式変形すると、

$$\begin{aligned} H_{2^{n-1}}^{(s)} &< 1 + \left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^s}\right) + \left(\frac{1}{4^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{4^s}\right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{2^{s(n-1)}} + \frac{1}{2^{s(n-1)}} + \cdots + \frac{1}{2^{s(n-1)}}\right) \\ &= 1 + \frac{2}{2^s} + \frac{4}{4^s} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{2^{s(n-1)}} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} 2^{k(1-s)} = \frac{1 - 2^{n(1-s)}}{1 - 2^{1-s}}, \end{aligned}$$

となる。数列 $H_n^{(s)}$ は、 $n \rightarrow \infty$ の極限で、 $s > 1$ のとき、

$$H_\infty^{(s)} < \frac{1}{1 - 2^{1-s}},$$

なる不等式を満足する。数列 $H_n^{(s)}$ が n の増加に対して単調増加であることを考えると、 $H_n^{(s)}$ は $s > 1$ のときに特定の値に収束する。したがって、ゼータ関数 $\zeta(s)$ は、 $s > 1$ である任意の実数に対して定義できることが示された。

4.3.2 素数による表現

ゼータ関数は素数を用いた表現もできる。オイラーはゼータ関数を素数によって表現し、その結果から素数が無限に存在することを証明した。

既に表示したように、ゼータ関数 $\zeta(s)$ は、

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

のように定義されている。ところで、すべての自然数は素因数分解によって一意的に表現することができる事実を用いて、この定義式を別の形式で書き換えることができるか考え

てみよう。素数を小さい順に並べ、 p_0, p_1, p_2, \dots のように番号付けをしたと仮定する。具体的に書くと、

$$p_0 = 2, \quad p_1 = 3, \quad p_2 = 5, \quad p_3 = 7, \quad p_4 = 11, \quad \dots$$

となるわけであるが、これらの素数を用いるとあらゆる自然数は、

$$\text{任意の自然数} = p_0^{e_0} p_1^{e_1} p_2^{e_2} p_3^{e_3} p_4^{e_4} \cdots = \prod_{k=0}^{N-1} p_k^{e_k},$$

のように表現できる。ここで、 N はあらゆる自然数に含まれる素数の総数である。後にこの総数が無限大であることが示されるのだが、ここでは N ということにしておこう。素因数分解の一意性より、すべての自然数は、各素数に与えられた指数 e_0, e_1, e_2, \dots の組み合わせで特定できる。ただし、これらの指数は 0 以上の整数である。したがって、ゼータ関数は

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{e_0, e_1, e_2, \dots} \prod_{k=0}^{N-1} \frac{1}{p_k^{s e_k}} \\ &= \prod_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{e_k=0}^{\infty} \frac{1}{p_k^{s e_k}} \right) = \prod_{k=0}^{N-1} \frac{1}{1 - p_k^{-s}}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

のように変形される。ところで、オレームの証明により $\zeta(1)$ が発散する事実があるのだが、(4.6) によると、素数の数 N が有限であれば $\zeta(1)$ が有限の値となるので事実と矛盾してしまう。よって、素数が無限に存在することがゼータ関数からも導き出された。素数が無限に存在することを (4.6) に反映させると、ゼータ関数は、

$$\zeta(s) = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1 - p_k^{-s}}, \quad (4.7)$$

のように書かれる。素数による無限乗積によってゼータ関数を表現する方法は神秘的である。例として、 $\zeta(2)$ の無限乗積表現を表 4.3 によって検証してみよう。その表には、与えられた上限値 (upper limit) を超えない素数の数 n と、無限乗積を n 段で打ち切ったときの積 P_n を記載している。この積 P_n が、上限数 (または、打ち切り段数 n) の増加とともに真値 $\pi^2/6 (= 1.64493407)$ に近づいていることが表 4.3 から確認できる。

素数によるゼータ関数の表現に関して、 $\zeta(1)$ の対数を評価することによって素数の逆数による級数が発散することが示される。ゼータ関数の表現式 (4.7) の対数を計算すると、

$$\begin{aligned} \log \zeta(1) &= - \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p_n} + \frac{1}{2p_n^2} + \frac{1}{3p_n^3} + \cdots \right) \\ &< \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p_n} + \frac{1}{p_n^2} + \frac{1}{p_n^3} + \cdots \right), \end{aligned} \quad (4.8)$$

なる関係が得られる。ところで、素数のべき乗の逆数数の級数が、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p_n^s} = \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \cdots < \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

表 4.3: 素数表現による $\zeta(2)$ の検証

Upper limit	n	P_n
10	4	1.59505208
100	25	1.64194520
1 000	168	1.64472519
10 000	1 229	1.64491792
100 000	9 592	1.64493275
1 000 000	78 498	1.64493396
10 000 000	664 579	1.64493406

であることに注意すると, (4.8) の右辺は

$$\text{RHS of (4.8)} < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p_n} + \sum_{s=2}^{\infty} \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^s} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p_n} + \sum_{s=2}^{\infty} (\zeta(s) - 1), \quad (4.9)$$

のように書き換えられる。前節でオレームの証明に倣って導いた関係式より,

$$\zeta(s) - 1 < \frac{1}{1 - 2^{1-s}} - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k(s-1)}} = \frac{1}{2^{s-1} - 1},$$

なる不等式が成立するのだが, ここで $s \geq 2$ であることに注意すると,

$$\zeta(s) - 1 < \frac{1}{2^{s-1} - 1} < \frac{1}{2^{s-1} - 2^{s-2}} = \frac{1}{2^{s-2}},$$

のように不等式を変形することができる。この不等式を適用すると (4.9) の右辺は,

$$\begin{aligned} \text{RHS of (4.9)} &< \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p_n} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^{s-2}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p_n} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^s} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p_n} + 2, \end{aligned}$$

のようになる。この結果をまとめると, $\zeta(1)$ の対数は,

$$\log \zeta(1) < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p_n} + 2, \quad (4.10)$$

なる不等式を満足する。しかしながら, オレームの証明したように $\zeta(1)$ が発散するので, それに矛盾しないためには右辺の第 1 項, すなわち, 素数の逆数による級数が発散しなければならぬ。したがって, 素数の逆数による級数が発散するという事実が証明された。

ここで, 表 4.4 を用いて不等式 (4.10) を検証しておこう。その表には, 与えられた上限数 (upper limit N) を超えない素数の数 n , そのような素数の最大値 p_{n-1} , 素数逆数の級数 S_n と, 調和級数の対数 $\log H_N$ を記載している。不等式 (4.10) の導出には, かなり粗い評価をしているため S_n と H_N の差は 2 よりもかなり小さな値ではあるが, 確かに不等式が成り立っていることが確認できる。

表 4.4: 素数逆数の級数と調和級数の対数

Upper limit N	n	p_{n-1}	S_n	$\log H_N$
10	4	7	1.1761905	1.07465021
100	25	97	1.8028172	1.64622789
1 000	168	997	2.1980801	2.01296392
10 000	1 229	9 973	2.4830600	2.28111689
100 000	9 592	99 991	2.7052722	2.49239075
1 000 000	78 498	999 983	2.8873281	2.66672299
10 000 000	664 579	9 999 991	3.0414494	2.81512792

4.3.3 偶数ゼータ関数

ゼータ関数の変数が偶数である場合の値、いわゆる偶数ゼータ関数はベルヌーイ数と関係があることが知られている。既にバーゼル問題を紹介し、 $\zeta(2) = \pi^2/6$ であることを示した。ゼータ関数の変数 s が 4 以上の偶数の場合、 $\zeta(s)$ はベルヌーイ数を用いて厳密な値で記述することができる。

ゼータ関数とベルヌーイ数の関係を示すため、まず、余接関数 $\cot z$ の部分分数展開からはじめよう。余接関数は既に原点中心のローラン展開を示したように、 $z = 0$ を 1 位の極とし、その留数は 1 である。また、その周期性を考えると、余接関数は $z = \pi n$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) を 1 位の極とし、その留数もやはり 1 である。ただ、付録に記載した方法で部分分数展開するには、 $z = 0$ が極であることが邪魔である。その代わりに、 $\cot z - 1/z$ を考えよう。このような関数は原点で正則であり、 $z_n = \pi n$ ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$) を 1 位の極にもつ有理型関数であるので、付録に記載する部分分数展開を利用できる。

極 $z_{\pm 1}$ から $z_{\pm n}$ を囲む閉曲線 C_n として、 $R = \pi(n + 1/2)$ を用いて、複素平面状の 4 点: $R + iR$, $-R + iR$, $-R - iR$, $R - iR$ を頂点とする正方形を考える。設定した閉曲線 C_n の上での $|f(z)|$ を評価しよう。ただし、

$$|f(z)| = \left| \cot z - \frac{1}{z} \right| \leq \left| \cot z \right| + \left| \frac{1}{z} \right|,$$

なる関係に注意し、 $R \rightarrow \infty$ とすることを考えると、閉曲線 C_n の上では $|f(z)| \simeq |\cot z|$ とみなすことができる。さて、ここで z を実部と虚部に分け $z \equiv x + iy$ とすると、

$$\cot z = \frac{\cos x \cosh y - i \sin x \sinh y}{\sin x \cosh y + i \cos x \sinh y},$$

となる。閉曲線 C_n のうち、実軸に平行な経路 $z = x + iR$ では、

$$|\cot z| \leq \frac{(\cos x - i \sin x) \coth R}{(\sin x + i \cos x) \sinh R}, = \coth R = 1 \quad (\text{as } R \rightarrow \infty)$$

となる。一方、虚軸に平行な経路 $z = R + iy$ では、 $\cos R = \cos \pi(n + 1/2) = 0$ であることに注意すると、

$$|\cot z| \leq \tanh y \leq 1,$$

となる。よって、閉曲線 C_n の上で $|f(z)| = O(1) = o(R)$ である。付録に示した部分分数展開を適用すると、

$$\cot z - \frac{1}{z} = \sum'_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{z - \pi n} + \frac{1}{\pi n} \right),$$

となる。ここで、 Σ' は $n = 0$ を除外した総和を与える。この部分分数展開は、添え字 n が正と負である対をまとめて、

$$\cot z = \frac{1}{z} + 2z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - \pi^2 n^2}, \quad (4.11)$$

のように書くこともできる。これが余接関数の部分分数展開である。この部分分数項をさらに展開すると、

$$\begin{aligned} \cot z &= \frac{1}{z} - 2z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \pi^2} \frac{1}{1 - z^2/\pi^2 n^2} \\ &= \frac{1}{z} - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi^{2k} n^{2k}} z^{2k-1}, \end{aligned}$$

となる。既に導出したように、余接関数が、

$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k} B_{2k}}{(2k)!} z^{2k-1},$$

であることを思い出し、互いの z^{2k-1} の係数を等号で結ぶと、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{(-1)^{k-1} 2^{2k-1} \pi^{2k} B_{2k}}{(2k)!}, \quad (4.12)$$

なる関係を得る。つまり、この関係式は、

$$\zeta(2s) = \frac{(-1)^{s-1} 2^{2s-1} \pi^{2s} B_{2s}}{(2s)!}, \quad (4.13)$$

と書くこともできる。ただし、 s は任意の自然数である。変数 s が偶数となるゼータ関数の例をいくつか、得られた公式によって計算すると、

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}, \quad \zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450}, \quad \dots$$

となる。確かに、 $\zeta(2)$ は、オイラーが発見したバーゼル問題の解と同一であることがわかる。

オイラー数に対しても同様の考察をしてみよう。そのために正割関数の部分分数展開の公式:

$$\sec x = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)\pi}{x^2 - (2n+1)^2 \pi^2 / 4}, \quad (4.14)$$

に注目する。なお、この公式の証明も省略する。二項定理を用いて部分分数項を展開すると、この公式は

$$\sec x = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^{k+1} x^{2k}}{\pi^{2k+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2k+1}}, \quad (4.15)$$

なる形に書き換えることができる。この結果に対して、オイラー数の定義式と比較すると、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2n+1)^{2k+1}} = \frac{(-1)^k \pi^{2k+1} E_{2k}}{2^{2k+2} (2k)!}, \quad (4.16)$$

なる関係式が得られる。ここで、(4.16) に対する (4.12) の比を計算すると、

$$\pi \simeq 2(2^{2n} - 4^{2n}) \frac{B_{2n}}{E_{2n}}, \quad (4.17)$$

なる近似式を得る。ただし、この近似式を得るにあたって、

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1)^{-(2k+1)}}{\sum_{n=0}^{\infty} n^{-2k}} \simeq 1 - \frac{1}{2^{2n}},$$

なる近似を適用した。近似式 (4.17) はベルヌーイ数の代わりにタンジェント数を用いると、

$$\pi \simeq \frac{(-1)^n 4n T_{2n-1}}{E_{2n}}, \quad (4.18)$$

のように簡単な式に変形できる。この式の右辺を π_n なる記号で書き、この近似式を検証すると下の表のようになる。収束はそれほど速くないが、確かに π_n が円周率 π に収束していることが確認できる。

Break: 電卓で円周率を計算しよう

偶数ゼータ関数を利用すると、電卓で円周率を計算することができる。計算に使う電卓は、四則演算と平方根が計算できる電卓で十分である。電卓で計算できる公式として、 $\zeta(8) = \pi^8/9450$ を利用しよう。また、ゼータ関数の値として $\zeta(8) \simeq 1 + 1/2^8$ のような大胆な近似を適用する。すると、

$$\frac{257}{256} \simeq \frac{\pi^8}{9450}$$

なる近似式が成立する。この近似式を π について解くように電卓を操作するなら、

$$\boxed{2} \boxed{5} \boxed{7} \boxed{\div} \boxed{2} \boxed{5} \boxed{6} \boxed{\times} \boxed{9} \boxed{4} \boxed{5} \boxed{0} \boxed{=} \boxed{\sqrt{\quad}} \boxed{\sqrt{\quad}} \boxed{\sqrt{\quad}}$$

のようにキー入力すればよい。この結果、3.1415256 なる結果が表示される。この演算結果は小数点第4位まで正しい。

表 4.5: タンジェント数とオイラー数の関係

n	T_{2n-1}	E_{2n}	π_n
1	1	-1	4.00000000
2	2	5	3.20000000
3	16	-61	3.14754098
4	272	1 385	3.14223867
5	7 936	-50 521	3.14166386
6	353 792	2 702 765	3.14160054
7	22 368 256	-199 360 981	3.14159353
8	1 903 757 312	19 391 521 145	3.14159129
9	209 865 342 976	-2 404 879 675 441	3.14159266

4.3.4 奇数ゼータ関数

既に示したように、偶数ゼータ関数 $\zeta(2k)$ はベルヌーイ数と円周率のべき乗によって厳密な値が求められる。それに対して、奇数ゼータ関数 $\zeta(2k+1)$ は、現在でも性質がほとんどわかっていない。唯一、 $\zeta(3)$ だけが 1978 年になってアペリーによって無理数であることが示された。それより以前から $\zeta(3) = 1.20205690\dots$ となることは知られてはいたが、この極限值はアペリー定数と呼ばれている。アペリー定数を含め、奇数ゼータ関数の値をいくつか書くと、

$$\begin{aligned} \zeta(3) &= 1.20205\dots, \quad \zeta(5) = 1.03692\dots, \quad \zeta(7) = 1.00834\dots, \\ \zeta(9) &= 1.00200\dots, \quad \zeta(11) = 1.00049\dots, \quad \dots \end{aligned}$$

となる。当然であるが、変数が大きくなるほどゼータ関数は 1 に近づく。その特性は偶数ゼータ関数と同様である。

厳密な正体がわからないとはいえ、奇数ゼータ関数の級数表現はさまざまな形が知られている。例えば、オイラーは $\zeta(3)$ を偶数ゼータ関数 $\zeta(2k)$ による級数で記述できることを発見していた。オイラーは、

$$\zeta(3) = \frac{2\pi^2}{7} \log 2 + \frac{16}{7} \int_0^{\pi/2} x \log(\sin x) dx, \quad (4.19)$$

なる関係式を見つけ、それを足掛かりに、

$$\zeta(3) = \frac{\pi^2}{7} \left[1 - 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(2k)}{(2k+1)(2k+2)2^{2k}} \right], \quad (4.20)$$

なる級数を示した。既に示したように、偶数ゼータ関数はベルヌーイ数と円周率のべき乗によって厳密に記述できるので、偶数ゼータ関数による級数での記述は単なる関係式でなく、具体的な値を計算するための公式である。

これらの関係式を導出するにあたり、 $\log(\sin x)$ が重要な役割を果たす。対数関数はテイラー級数で表現できるし、正弦関数もテイラー級数で表現できる。直接的にテイラー級数で表現するのは難しいだろう。関数 $\log(\sin x)$ は 2 種類の表現法:

$$\log(\sin x) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{k} - \log 2, \quad (4.21a)$$

$$\log(\sin x) = \log x - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(2k)}{\pi^{2k} k} x^{2k}, \quad (4.21b)$$

で記述できる。このうち、(4.21a) もオイラーの式と呼ばれるそうなので、オイラーの業績には驚かされる。正弦関数が $\sin x = e^{ix}(1 - e^{-2ix})/2i$ であることに注意して、正弦関数の対数を計算すると、

$$\begin{aligned} \log(\sin x) &= ix + \log(1 - e^{-2ix}) - \log 2 - \frac{i\pi}{2} \\ &= ix - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-2ikx}}{k} - \log 2 - \frac{i\pi}{2}, \end{aligned}$$

が得られる。第 2 行目の数式変形には対数関数のテイラー展開を利用した。対数関数のテイラー級数は、収束半径が 1 であるので、この級数は非常にきわどい条件の級数展開である。一方、 $\sin x = -e^{-ix}(1 - e^{2ix})/2i$ と書けることに注意すると、

$$\log(\sin x) = -ix - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-2ikx}}{k} - \log 2 + \frac{i\pi}{2},$$

が成立するはずだ。得られた二つの $\log(\sin x)$ の表現式の算術平均をとると (4.21a) が導出されるのだ。実は、もう少し簡単に (4.21a) が得られる。変数 x が実数であれば $\log(\sin x)$ も実数になるので、 x を実数と仮定して、中間的に得られた数式の実部を取り出せば (4.21a) が得られるはずだ。

続いて、 $\log(\sin x)$ のもう一つの表現である (4.21b) を導出しよう。この公式を得るには、オイラーが導出した正弦関数の無限乗積による表現:

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right),$$

に注目する。この無限乗積の表現のため、正弦関数の対数は、

$$\begin{aligned} \log(\sin x) &= \log x + \sum_{n=1}^{\infty} \log \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right) \\ &= \log x - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{\pi^{2k} n^{2k} k} = \log x - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(2k)}{\pi^{2k} k} x^{2k}, \end{aligned} \quad (4.22)$$

のようになる。すなわち、(4.21b) が導出できたわけだ。第 2 行目への数式変形には、対数関数のテイラー級数を利用した。

公式 (4.19) を得るための準備が整った。関係式 (4.21a) に x を乗じて、区間 $[0, \pi/2]$ で積分すると、 $\zeta(3)$ を含む数式が得られる。積分を実行すると、

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} x \log(\sin x) dx &= - \int_0^{\pi/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x \cos 2kx}{k} - x \log 2 \right) dx \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{x \sin 2kx}{2k^2} + \frac{\cos 2kx}{4k^2} - \frac{x^2}{2} \log 2 \right]_0^{\pi/2} \\ &= -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \cdots \right) - \frac{\pi^2}{8} \log 2 = -\frac{7}{16} \zeta(3) - \frac{\pi^2}{8} \log 2, \end{aligned}$$

が得られる。第 2 行目への数式変形について、 $x \cos 2kx$ は部分積分によって積分を実行できる。得られた結果を見ると、 $\zeta(3)$ が含まれている。この数式を $\zeta(3)$ について解くと、(4.19) が得られる。ゼータ関数 $\zeta(3)$ が、 $x \log(\sin x)$ の積分を含むことが予想外かもしれない。しかも、この数式から $\zeta(3)$ が計算できると思いきいかもしいが、(4.21b) を利用すればよい。計算を実行すると、

$$\begin{aligned} \zeta(3) &= \frac{2\pi^2}{7} \log 2 + \frac{16}{7} \int_0^{\pi/2} \left(x \log x - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(2k)}{\pi^{2k} k} x^{2k+1} \right) dx \\ &= \frac{2\pi^2}{7} + \frac{16}{7} \left[\frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(2k)}{\pi^{2k} k (2k+2)} x^{2k+2} \right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{2\pi^2}{7} \left(\log \pi - \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(2k)}{k(k+1) 2^{2k}} \right), \end{aligned} \quad (4.23)$$

のように、偶数ゼータ関数の級数が導出される。最終的な級数 (4.20) に似ているが、(4.23) は $\log \pi$ が余分である。オイラーは、中間地点として (4.23) も導出していたのだろう。

改めて (4.21b) に注目すると、右辺が $\cos 2kx/k$ の無限和になっている。つまり、(4.21b) を 2 回だけ積分すれば $\zeta(3)$ が現れるのではないか。そのような動機づけのもと、(4.21b) の両辺を区間 $(0, x]$ で定積分を 2 回実行してみる。形式的に書くと、

$$\int_0^x \int_0^x \log(\sin x) dx^2 = - \int_0^x \int_0^x \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{k} + \log 2 \right) dx^2, \quad (4.24)$$

が成り立つはずである。それでは、左辺と右辺を個別に計算してみよう。まず、(4.21b) の関係に注目すれば、左辺の積分は、

$$\begin{aligned} \text{LHS of (4.24)} &= \int_0^x \int_0^x \left(\log x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(2k)}{\pi^{2k} k} x^{2k} \right) dx^2 \\ &= \int_0^x \left(x (\log x - 1) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(2k)}{\pi^{2k} k (2k+1)} x^{2k+1} \right) dx \\ &= \frac{x^2}{2} \log x - \frac{3}{4} x^2 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(2k)}{\pi^{2k} k (2k+1)(2k+2)} x^{2k+2}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

のように実行できる。一方, 右辺の積分は,

$$\begin{aligned}
 \text{RHS of (4.24)} &= \int_0^x \int_0^x \left(-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{k} - \log 2 \right) dx^2 \\
 &= \int_0^x \left(-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2kx}{2k^2} - x \log 2 \right) dx \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx - 1}{4k^3} - \frac{x^2}{2} \log 2, \tag{4.26}
 \end{aligned}$$

のように計算される。当然, これらの積分は等しいはずなので等号で結ぶと,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx - 1}{4k^3} = \frac{x^2}{2} \log 2x - \frac{3}{4}x^2 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(2k)}{\pi^{2k} k (2k+1)(2k+2)} x^{2k+2}, \tag{4.27}$$

なる関係が得られる。面白いことに, (4.27) の左辺に $x = \pi/2$ を代入すると, $\zeta(3)$ が現れる。具体的に計算してみると,

$$\text{LHS of (4.27)} = -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \dots \right) = -\frac{7}{16} \zeta(3),$$

となる。この $x = \pi/2$ を (4.27) の右辺にも代入すると,

$$\zeta(3) = \frac{2\pi^2}{7} \left(-\log \pi + \frac{3}{2} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(2k)}{2k(2k+1)(2k+2)2^{2k}} \right), \tag{4.28}$$

が得られる。得られた数式は, 冪数ゼータ関数による級数であるが, (4.23) とは異なる数式である。異なるとはいえ, (4.28) は (4.23) と類似している。これら二つの公式の算術平均を計算すると, $\log \pi$ が消去できて, (4.20) が得られるのだ。

本章で既に説明したように, 偶数ゼータ関数はベルヌーイ数を用いた厳密な関係式がわかっているのだから, 導出した級数を適用すれば $\zeta(3)$ を計算することができる。導出過程で得られた中間的な結果 (4.28) と最終的にオイラーが導出した級数 (4.20) は, 表 4.6 に示すように $\zeta(3)$ に収束する。この表では, 誤りのある桁を単色文字で表示している。表によると, 中間的な結果 (4.28) の方が収束が速そうに見える。級数 (4.20) がシンプルに記述されているので, 多少, 収束速度が犠牲になっているのだ。正確には, 総和記号の中の分母が, (4.20) で k の 2 次式であることに對し, (4.28) では 3 次式になっていることが理由である。しかし, k が大きくなるとその効果は弱まり, 2^{2k} による効果が顕著になる。したがって, k の増加に対する有効桁の伸び率は, これら二つの級数の間に違いはほとんどない。結局, 導出した $\zeta(3)$ は偶数ゼータ関数のような厳密値でなく, 級数表現であるが, 表 4.6 が実証するように, ゼータ関数の定義式通りに淡々と計算するよりも収束が速いので, 得られた級数表現の価値は大きい。

表 4.6: アペリー一定数 $\zeta(3)$ への級数の収束

Order k	Formula (4.28)	Formula (4.20)
0	1.001821566341794	1.409943485869908
2	1.201451966499043	1.203954691575257
4	1.202047041025842	1.202108023015359
6	1.202056655367215	1.202058690102658
8	1.202056895429472	1.202056974512678
10	1.202056902884328	1.202056906254791
12	1.202056903148872	1.202056903301708
14	1.202056903159149	1.202056903166395
16	1.202056903159575	1.202056903159930
18	1.202056903159593	1.202056903159612

級数 (4.20) の導出で, (4.23) と (4.28) の算術平均を使ったのとは逆に, これら二つの級数の差をとると $\zeta(3)$ が消去される。その副産物として,

$$\log \pi = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(2k)}{2k(2k+1)2^{2k}},$$

なる級数が得られる。つまり, 円周率の対数は偶数ゼータ関数の級数で表現できるのだ。

面白いことに, $\log(\sin x)$ の級数表現 (4.27) は, すべての奇数ゼータ関数の級数表現を得るための源流である。例えば, (4.27) をさらに 2 回積分し, $x = \pi/2$ を代入すれば $\zeta(5)$ が現れる。結果だけを書くと,

$$\zeta(5) = \frac{2}{31} \left[\frac{\pi^4}{3} \left(\log \pi - \frac{25}{12} \right) + 4\pi^2 \zeta(3) - 16 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi^4 \zeta(2k)}{2k(2k+1)(2k+2)(2k+3)(2k+4)2^{2k}} \right],$$

となる。このように, (4.21b) を 2 回積分するたびに, 順次, 奇数ゼータ関数の級数表現が得られるのだ。

4.3.5 奇数ゼータ類似の級数

偶数ゼータ関数 $\zeta(2k)$ が, 必ず, π^{2k} の有理数倍となることがわかっている一方で, 奇数ゼータ関数は性質がほとんどわかっていない。しかし, 奇数ゼータ関数 $\zeta(2k+1)$ に類似した級数が π^{2k+1} の有理数倍になる例がいくつかある。例えば,

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}, \quad (4.29a)$$

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \cdots = \frac{\pi^3}{32}, \quad (4.29b)$$

$$1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \cdots = \frac{5\pi^5}{1536}, \quad (4.29c)$$

が成立するのである。これらの級数は、ゼータ関数でなく、奇数ゼータ関数の値を与えることもないのだが、興味深いので導出を試みよう。

第1の例(4.29a)はライプニッツ級数と呼ばれる級数であり、逆正接関数(arctangent)のマクローリン級数から、この関係式を得ることができる。しかし、本節では他の二つの例への説明のため、フーリエ級数を用いて関係式を導出しよう。フーリエ級数:

$$f_1(x) = -\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}, \quad (4.30)$$

を考えよう。この関数 $f_1(x)$ は周期 2π の関数である。この関数は、

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & (-\pi \leq x < 0), \\ -1 & (0 \leq x < \pi), \end{cases} \quad (4.31)$$

なる矩形波に収束する。なお、この関数は周期性をもつため、 $f(x+2\pi) = f(x)$ なる関係を満たす。これらの数式表現に対し、 $x = \pi/2$ を代入すると、

$$\text{Eq. (4.30): } f_1(\pi/2) = -\frac{4}{\pi} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots \right),$$

$$\text{Eq. (4.31): } f_1(\pi/2) = -1,$$

が得られる。これらの2つの式は同一関数であるので、等号で結ぶことができる。その結果、(4.29a)が導出される。■

第2の例を考察するには、(4.30)と(4.31)を積分すればよい。まず、1回だけ積分すると、

$$f_2(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}, \quad (4.32a)$$

$$f_2(x) = \begin{cases} x + \frac{\pi}{2} & (-\pi \leq x < 0), \\ -x + \frac{\pi}{2} & (0 \leq x < \pi), \end{cases} \quad (4.32b)$$

となる。なお、積分定数は互いの数式が等しくなるように選んでいる。この積分結果はバーゼル問題の解法として、図4.4に示した三角波である。この関数に $x = 0$ を代入するとバーゼル問題のヒントとなる関係式: $1 + 1/3^2 + 1/5^2 + \cdots = \pi^2/8$ が得られる。数式(4.32a)と(4.32b)をもう一度積分すると、

$$f_3(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^3}, \quad (4.33a)$$

$$f_3(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + \frac{\pi}{2}x & (-\pi \leq x < 0), \\ -\frac{x^2}{2} + \frac{\pi}{2}x & (0 \leq x < \pi), \end{cases} \quad (4.33b)$$

が得られる。ここでも、互いの積分結果が等しくなるように積分定数を選んでいる。これらの積分結果に、 $x = \pi/2$ を代入すると、

$$\text{Eq. (4.33a): } f_3(\pi/2) = \frac{4}{\pi} \left(1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \cdots \right),$$

$$\text{Eq. (4.33b): } f_3(\pi/2) = -\frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{8},$$

が得られる。これらの結果を等号で結ぶと (4.29b) が導出される。◻

第3の関係式を導出するには、同様に、(4.33a) と (4.33b) を積分すればよい。その積分の結果を書くと、

$$f_4(x) = -\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^4}, \quad (4.34a)$$

$$f_4(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{6} + \frac{\pi}{4}x^2 + \frac{\pi^3}{24} & (-\pi \leq x < 0), \\ -\frac{x^3}{6} + \frac{\pi}{4}x^2 + \frac{\pi^3}{24} & (0 \leq x < \pi), \end{cases} \quad (4.34b)$$

が得られる。ここでも、互いの積分結果が等しくなるように積分定数[†]を選んでいる。さらに、(4.35a) と (4.35b) を積分すると、

$$f_5(x) = -\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^5}, \quad (4.35a)$$

$$f_5(x) = \begin{cases} \frac{x^4}{24} + \frac{\pi}{12}x^3 + \frac{\pi^3}{24}x & (-\pi \leq x < 0), \\ -\frac{x^4}{24} + \frac{\pi}{12}x^3 + \frac{\pi^3}{24}x & (0 \leq x < \pi), \end{cases} \quad (4.35b)$$

が得られる。やはり、積分定数は互いの積分結果が等しくなるように選んでいる。これらの積分結果に $x = \pi/2$ を代入すると、

$$\text{Eq. (4.35a): } f_5(\pi/2) = -\frac{4}{\pi} \left(1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \cdots \right),$$

$$\text{Eq. (4.35b): } f_5(\pi/2) = -\frac{\pi^4}{24 \cdot 16} + \frac{\pi^4}{12 \cdot 8} - \frac{\pi^4}{24 \cdot 2} = -\frac{5\pi^5}{384},$$

が得られる。これらの結果を等号で結べば (4.29c) が導出される。◻

[†]この積分定数を得るには、 $\zeta(4) = \pi^4/90$ であることを利用する。

本項で取り扱った級数を一般化すると、 $2k + 1$ 次の調和級数の奇数項からつくった交代級数となる。その交代級数は、

$$1 - \frac{1}{3^{2k+1}} + \frac{1}{5^{2k+1}} - \frac{1}{7^{2k+1}} + \cdots = \frac{(-1)^k \pi^{2k+1}}{2^{2k+2} (2k)!} E_{2k}, \quad (4.36)$$

なる形で記述することができる。ここで、 E_{2k} はオイラー数である。既に、本項で5次までの交代級数についての公式を導出した。その手法を応用すれば $2k + 1$ 次の交代級数についての公式を導出できる。しかし、導出過程は第5章で取り扱う周期オイラー多項式を利用するのが便利である。したがって、公式 (4.36) は第5章で導出する。

4.4 母関数

整数変数によるゼータ関数、いわゆる整数ゼータ関数 $\zeta(k)$ を数列と考えると、ゼータ関数の母関数を定義することができる。母関数を導くことによって、ゼータ関数の様々な性質が見えてくる。特に、ゼータ関数とオイラーの定数 γ との様々な関係式が導かれる。

4.4.1 ベルヌーイ数との関係

既に明らかにしたように、偶数ゼータ関数はベルヌーイ数と簡単な関係で結ばれる。ベルヌーイ数の母関数は既に明らかになっているので、そこから始めると偶数ゼータ関数を展開係数とする級数を導出することができる。

偶数ゼータ関数の母関数を得るには、ベルヌーイ数の指数型母関数よりも、双曲線余接関数 ($\coth x$) のローラン展開から開始するのがよい。そのローラン展開は、

$$\coth x - \frac{1}{x} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k} B_{2k}}{(2k)!} x^{2k-1},$$

なる形で表現できる。既に示したように、偶数ゼータ関数とベルヌーイ数が、

$$\zeta(2k) = \frac{(-1)^{k-1} 2^{2k-1} \pi^{2k} B_{2k}}{(2k)!},$$

なる関係を満たすので、余接関数のローラン展開は、

$$x \coth x - 1 = 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \zeta(2k) \left(\frac{x}{\pi}\right)^{2k},$$

なる形に書き換えられる。ここで、 $x \mapsto \pi x$ のように置き換え、両辺を $1/2$ 倍すると、

$$\frac{\pi x}{2} \coth \pi x - \frac{1}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \zeta(2k) x^{2k}, \quad (4.37)$$

が得られる。これが偶数ゼータ関数の母関数である。この数式に対して、さらに $x \mapsto ix$ なる置き換えを適用すると、

$$\frac{1}{2} - \frac{\pi x}{2} \cot \pi x = \sum_{k=1}^{\infty} \zeta(2k) x^{2k}, \quad (4.38)$$

なる数式が得られる。むしろ、母関数としては (4.38) の方が簡潔な形で表現できている。双曲線余接関数、もしくは、余接関数を計算するには、ベルヌーイ数を用いた表記で十分であるが、数式としてゼータ関数を用いると簡潔に表現できていることが興味深い。

4.4.2 整数ゼータ関数の母関数

本項では、奇数ゼータを含めて展開係数とした母関数を探ってみよう。先ほどの例ではベルヌーイ数を手掛かりとしたが、ここでは異なるアプローチをとる。

関数 $1/(k-x)$ を考えてみよう。この単純な関数がゼータ関数の母関数につながるのだ。この関数は数式変形すると、

$$\frac{1}{k-x} = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{1-x/k} = \frac{1}{k} + \frac{x}{k^2} + \frac{x^2}{k^3} + \frac{x^3}{k^4} + \dots$$

のように書き換えられる。この数式変形では二項定理を利用した。両辺から $1/x$ を減じた後、両辺に x を乗じると、

$$\frac{x^2}{k(k-x)} = \frac{x^2}{k^2} + \frac{x^3}{k^3} + \frac{x^4}{k^4} \dots$$

が得られる。この数式の k について無限和をとると、

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^2}{k(k-x)} = \zeta(2) x^2 + \zeta(3) x^3 + \zeta(4) x^4 + \dots = \sum_{k=2}^{\infty} \zeta(k) x^k, \quad (4.39)$$

なる級数が得られる。この関数が整数ゼータ関数の母関数だ。いうまでもないが、 $\zeta(1)$ を展開係数に含めていないのは、 $\zeta(1)$ が有限の数値ではないからだ。得られた母関数から、ただちに、

$$\log 2 = \frac{\zeta(2)}{2^2} + \frac{\zeta(3)}{2^3} + \frac{\zeta(4)}{2^4} \dots = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\zeta(k)}{2^k}, \quad (4.40a)$$

$$1 - \log 2 = \frac{\zeta(2)}{2^2} - \frac{\zeta(3)}{2^3} + \frac{\zeta(4)}{2^4} - \dots = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k \zeta(k)}{2^k}, \quad (4.40b)$$

なる関係式が得られる。第1の関係式は (4.39) に $x = 1/2$ を代入すれば導出できる。第2の関係式は $x = -1/2$ を代入すれば導出できる。数値計算に有用というわけではないが、これらの級数は少なくとも、メルカトル級数よりも速く $\log 2$ に収束する。

級数 (4.41) と $x^2/(1-x)$ の差をとると、興味深い級数が得られる。差をとるにあたって、 $1/(z-x) = 1 + x + x^2 + \dots$ であることに注意すると、

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^2}{k(k-x)} - \frac{x^2}{1-x} = (\zeta(2) - 1)x^2 + (\zeta(3) - 1)x^3 + (\zeta(4) - 1)x^4 + \dots = \sum_{k=2}^{\infty} (\zeta(k) - 1)x^k, \quad (4.41)$$

なる級数が得られる。この級数は (4.39) と違い、高次の係数になるほどゼロに近づくため興味深い。この級数から、ただちに、

$$(\zeta(2) - 1) + (\zeta(3) - 1) + (\zeta(4) - 1) + \dots = \sum_{k=2}^{\infty} (\zeta(k) - 1) = 1, \quad (4.42a)$$

$$\frac{\zeta(2) - 1}{2^2} + \frac{\zeta(3) - 1}{2^3} + \frac{\zeta(4) - 1}{2^4} + \dots = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\zeta(k)}{2^k} = \log 2 - \frac{1}{2}, \quad (4.42b)$$

$$\frac{\zeta(2) - 1}{2^2} - \frac{\zeta(3) - 1}{2^3} + \frac{\zeta(4) - 1}{2^4} - \dots = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\zeta(k)}{2^k} = \frac{5}{6} - \log 2, \quad (4.42c)$$

が得られる。第1の関係式は (4.41) に $x = 1$ を代入すれば得られるのだが、そのとき、(4.41) の左辺に直接 $x = 1$ を代入すると発散するので、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x}{k-x} - \frac{x}{k} \right) - \frac{x^2}{1-x} &= \frac{x-x^2}{1-x} - x + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{x}{k-x} - \frac{x}{k} \right) \\ &= x - x + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{x}{k-x} - \frac{x}{k} \right) = \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{x}{k-x} - \frac{x}{k} \right), \end{aligned}$$

のように変形した後に $x = 1$ を代入する。第2の関係式と第3の関係式は (4.41) に、それぞれ、 $x = 1/2$ と $x = -1/2$ を代入すれば得られる。ここで得られた級数も実用的な価値は小さいが、 $\log 2$ への収束速度が改善された級数である。

4.4.3 オイラー定数との関係

前項で取り扱った級数は、ゼータ関数と $\log 2$ の関係を示していた。ゼータ関数を使えばメルカトル級数よりも速く $\log 2$ に収束する級数を表現できるといったところである。本節では、ゼータ関数とオイラー定数 γ の関係を導出する。

ゼータ関数とオイラーの定数の関係を導出するには、ガンマ関数 $\Gamma(x)$ を取り扱う。第4.5節で取り扱う内容を前借すると、ガンマ関数は整数変数に対して $\Gamma(1+k) = k!$ が成立する性質をもっている。ガンマ関数を表現方法は複数存在し、その中で、ワイエルシュトラスの無限乗積:

$$\frac{1}{\Gamma(1+x)} = e^{\gamma x} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{k} \right) e^{-x/k},$$

なる表現に注目しよう。この表現式の対数をとると、

$$\begin{aligned}\log \Gamma(1+x) &= -\gamma x - \sum_{k=1}^{\infty} \left[\log \left(1 + \frac{x}{k} \right) - \frac{x}{k} \right] \\ &= -\gamma x - \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{x^2}{2k^2} + \frac{x^3}{3k^3} - \frac{x^4}{4k^4} + \dots \right) \\ &= -\gamma x + \frac{\zeta(2)}{2} x^2 - \frac{\zeta(3)}{3} x^3 + \frac{\zeta(4)}{4} x^4 - \dots\end{aligned}$$

なる関係が得られる。この数式に $x = 1$ を代入すると、左辺は $\log \Gamma(1) = \log 1 = 0$ となるので、

$$\gamma = \frac{\zeta(2)}{2} - \frac{\zeta(3)}{3} + \frac{\zeta(4)}{4} - \dots$$

が導かれる。この公式は、第 4.1.1 項で導出した数式と同一である。ガンマ関数 $\Gamma(x)$ が整数だけでなく、変数が半奇整数のときの振る舞いもわかっている。例えば、 $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ 、 $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$ である。これらの性質に注意すると、オイラー定数 γ は、

$$\begin{aligned}\gamma &= \log \frac{4}{\pi} + 2 \left(\frac{\zeta(2)}{2 \cdot 2^2} - \frac{\zeta(3)}{3 \cdot 2^3} + \frac{\zeta(4)}{4 \cdot 2^4} - \dots \right), \\ \gamma &= \log \pi - 2 \left(\frac{\zeta(2)}{2 \cdot 2^2} + \frac{\zeta(3)}{3 \cdot 2^3} + \frac{\zeta(4)}{4 \cdot 2^4} + \dots \right),\end{aligned}$$

のように 2 種類の新たな級数でも表現できることが導かれる。これらの数式の算術平均をとると、

$$\gamma = \log 2 - 2 \left(\frac{\zeta(3)}{3 \cdot 2^3} + \frac{\zeta(5)}{5 \cdot 2^5} + \frac{\zeta(7)}{7 \cdot 2^7} + \dots \right) = \log 2 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(2k+1)}{(2k+1)2^{2k}}, \quad (4.43)$$

が得られる。第 4.1.1 項で導出した (4.4) と、本項で導出した (4.43) によるオイラー定数の計算を比較しよう。収束の速さは表 4.7 に示すように、(4.43) の方が速い。この表では、誤った桁を淡色表示している。数式 (4.4) は k が大きくなると、 k が 1 だけ増加するたびに分子が約 2 分の 1 倍されるに対し、分母はほとんど変化がなくなる。一方、(4.43) は k が 1 だけ増加するたびに、分子はほとんど変化がないが、分母が約 4 倍される。その違いが収束速度が違う要因である。

4.5 定義域の拡張

これまでの議論では、ゼータ関数 $\zeta(s)$ は $s > 1$ に対して定義された関数である。本節では、ゼータ関数の定義域を複素数全体に拡張し、その関数の性質を調べる。関数の定義域を拡張するには、関数論における解析接続という手法を用いる。まず、解析接続を説明し、ゼータ関数を解析接続するための準備した後に、ゼータ関数を解析接続する。

表 4.7: オイラー定数への近似

k	Approx by (4.4)	Approx by (4.43)
0	1.0000000000000000	0.693147180559945
2	0.610180665522689	0.580014175024020
4	0.582214306066230	0.577328495910954
6	0.578131041823785	0.577220891275946
8	0.577398217540589	0.577215924558383
10	0.577253833791069	0.577215678371375
12	0.577223887090018	0.577215665621163
14	0.577217473007474	0.577215664940810
16	0.577216068619341	0.577215664903712
18	0.577215756115245	0.577215664901655
20	0.577215685706049	0.577215664901540

4.5.1 解析接続

本節では解析接続について簡単に説明する。解析接続の知識がある読者は本節を飛ばして次節に進んでもよい。解析接続は、関数の定義域をより広い範囲に拡張するための数学的技法である。

複素数 z の関数 $f_0(z) \equiv 1 + z + z^2 + z^3 + \dots$ について考えよう。この関数は、 $|z| < 1$ の条件を満たさなければ収束しない。言い換えると、 $|z| \geq 1$ では $f_0(z)$ は発散するため、定義することができない。つまり、 $f_0(z)$ の定義域は $|z| < 1$ ということである。

次に別のべき級数 $f_{-1}(z)$ を考えよう。その第2のべき級数は、

$$f_{-1}(z) \equiv \frac{1}{2} + \frac{z+1}{4} + \frac{(z+1)^2}{8} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z+1)^k}{2^{k+1}},$$

のように定義されている。このべき級数の収束条件は $|z+1| < 2$ である。図 4.5 (a) に示すように、 $f_0(z)$ よりも第2のべき級数 $f_{-1}(z)$ のほうが収束半径が大きく、しかも、 $f_0(z)$ の収束域を包含した形になっている。これらの2つの関係を調べるため、 $f_{-1}(z)$ を数式変形すると、

$$\begin{aligned} f_{-1}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \binom{n}{k} z^k, \end{aligned}$$

が得られる。この式からではわかりにくいだが、 $f_0(z) = f_{-1}(z)$ が成立すると推測しよう。その推測が正しくなるには、

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{n^k}{2^{n+1}} = k! \tag{4.44}$$

であることが条件である。つまり、この関係式が証明できれば、推測した等式 $f_0(z) = f_{-1}(z)$ が成立するのである。なお、 n^k は n の下降階乗であり、 $n^k \equiv n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$ のように定義される。まず、 $k=0$ の場合を考えると、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = 1,$$

となり、(4.44) が成立していることがわかる。次に、任意の k で成立することを仮定したとき、 $k+1$ でも成立するかどうかを調べよう。実際に計算すると、

$$\begin{aligned} \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{n^{k+1}}{2^{n+1}} &= \sum_{n=k+1}^{\infty} \left[\frac{(n+1)n^k}{2^{n+1}} - \frac{(k+1)n^k}{2^{n+1}} \right] \\ &= 2 \sum_{n=k+2}^{\infty} \frac{n^{k+1}}{2^{n+1}} - (k+1) \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{n^k}{2^{n+1}} \\ &= 2 \left(\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{n^{k+1}}{2^{n+1}} - \frac{(k+1)!}{2^{k+2}} \right) - (k+1) \left(k! - \frac{k!}{2^{k+1}} \right) \\ &= 2 \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{n^{k+1}}{2^{n+1}} - (k+1)! \end{aligned}$$

となるので、この計算結果からただちに、

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{n^{k+1}}{2^{n+1}} = (n+1)!$$

が示される。既に、 $k=0$ で (4.44) が成立することがわかっている。さらに、ある k で成立すれば、同様に $k+1$ でも成立するので、(4.44) は $k \geq 0$ なる任意の k で成立することが帰納的に証明できた。それと同時に、 $f_0(z) = f_{-1}(z)$ が成立することも証明できたのである。しかし、ここで疑問が沸く。級数 $f_{-1}(z)$ の収束域は $|z+1| < 2$ のはずだったのに、数式変形の結果、 $|z| < 1$ を収束域とする級数に化けてしまった。その疑問については、本節の最後で考察しよう。

上に挙げた2つのべき級数 $f_0(z)$ と $f_{-1}(z)$ を比較してみよう。変数 z を実数として与えたときの級数の値を図 4.5 (b) に描く。ただし、級数 $f_0(z)$ と $f_{-1}(z)$ の識別を助けるため、級数はあえて10次近似とした。これらの級数(の10次近似)は、 $f_0(z)$ の収束域である $0 < z < 1$ でほとんど重なり合っている。グラフによると、級数 $f_0(z)$ は $z < 1$ で急激に減少し、 $f_{-1}(z)$ は $z < -3$ で急激に減少する。これは10次近似のときの振る舞いであり、無限項まで計算すると、どちらの級数も収束域の外では発散し、関数値を定義することができない。級数 $f_0(z)$ と $f_{-1}(z)$ は、上で計算したとおり、同一の数式に帰着する。ただし、同一の数式に帰着するのは双方の級数が定義可能な収束域が重なる $-1 < z < 1$ の区間であ

[‡]無限級数として計算すれば、完全に一致する。

と考えたほうがよい。また、 $f_0(z)$ よりも $f_{-1}(z)$ が広い収束域をもっているので、 $f_{-1}(z)$ は $f_0(z)$ の収束域を拡張した結果の関数であると考えられる。そのようにして、収束域の重なり部分で関数値が同一になる関数を用いて、関数の定義域を拡張することを**解析接続**という。つまり、 $f_0(z)$ と $f_{-1}(z)$ は解析接続された関数どうしなのである。

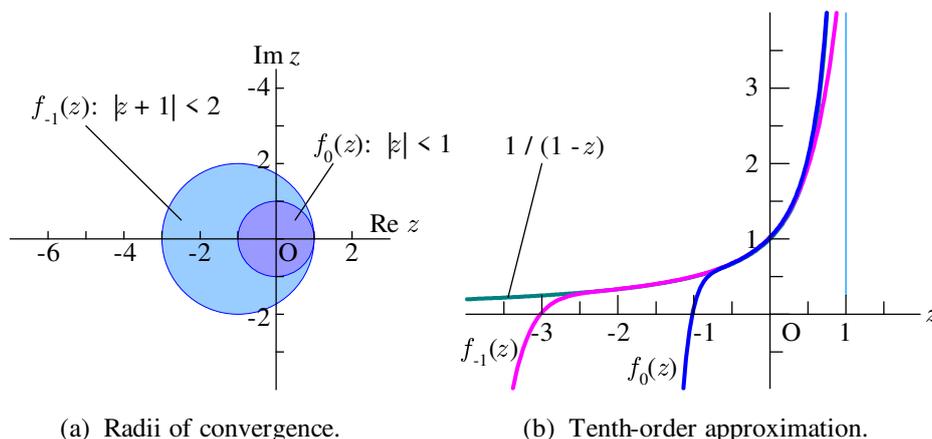


図 4.5: 解析接続された級数

関数 $f_0(z)$ の定義域は複素数全体まで拡張することができる。この例の場合、そのように拡張された関数は簡単な手順で導出できる。級数 $f_0(z)$ に z を乗じると、

$$z f_0(z) = z + z^2 + z^3 + z^4 + \cdots = f_0(z) - 1,$$

が得られる。この級数も $|z| < 1$ を収束域とするので、関数 $f_0(z)$ は $|z| < 1$ の条件において、 $f_0(z) = 1 + z f_0(z)$ の関係を満たす。この関係式を $f_0(z)$ について解くと、

$$f_0(z) = \frac{1}{1-z} \quad (|z| < 1),$$

が得られる。事実、 $1 + z + z^2 + z^3 + \cdots$ は $1/(1-z)$ のテイラー展開であり、その収束半径が $|z| < 1$ であることを考えると、この関係は当然の結果である。関数 $1/(1-z)$ は、 $z = 1$ を 1 位の極とする以外、複素平面全体で正則である。つまり、 $1/(1-z)$ は関数 $f_0(z)$ を複素数全体を定義域とするように解析接続した結果なのである。

級数 $f_{-1}(z)$ も同じ手順で複素数全体に解析接続できる。この例の場合、級数 $f_{-1}(z)$ に $z + 1$ を乗じるのだ。その結果、

$$(z + 1)f_{-1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z + 1)^{k+1}}{2^{k+1}} = 2f_{-1}(z) - 1,$$

が得られる。この方程式を $f_{-1}(z)$ について解くと、

$$f_{-1}(z) = \frac{1}{1-z} \quad (|z + 1| < 2),$$

が得られるのである。この結果は $f_0(z)$ を複素数全体に拡張した結果と同一である。二つの級数の解析接続の結果が一致するのは不思議に見えるかもしれないが、これは関数論における一致の定理が関係した性質なのである。関数論によれば、2つの関数とその正則域の一部の領域で一致することがわかっているならば、それらの関数は正則域全体で同一となることが知られている。その性質を一致の定理というのである。この場合、個別に解析接続した関数は、ともに $z \neq 1$ の複素数全体で正則であり、 $|z| < 1$ で互いに同一の値となることがわかっているので、一致の定理によって、 $z \neq 1$ の複素数全体で同一の関数となる。そのため、双方の解析接続の結果でも同一の関数 $1/(1-z)$ が得られたのである。なお、図 4.5 (b) に $1/(1-z)$ の曲線も示しておいた。級数 $f_0(z)$ と $f_{-1}(z)$ は、それぞれの定義域では、解析接続された関数とほぼ重なっている[§]。

4.5.2 ゼータ関数の積分表示

ゼータ関数を詳しく取り扱うには、ガンマ関数の知識があると便利である。ガンマ関数は $\Gamma(s)$ なる記号で書かれ、その変数が整数であるとき、 $\Gamma(n) = (n-1)!$ という性質を示す関数である。言い換えれば、整数しか対象にしなかった階乗という演算を実数全体、さらには、複素数全体に拡張した関数がガンマ関数である。ガンマ関数は、

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt, \quad (4.45)$$

のような積分によって与えられる。この積分を評価してみると、 $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ なる関係が導かれ、その結果、 $\Gamma(n) = (n-1)!$ なる性質が結論づけられる。実数変数に対するガンマ関数は図 4.6 のような振る舞いを示す。この関数はゼロ以下の整数を極とすることが特徴である。

ガンマ関数の積分表示 (4.45) は、ガンマ関数とゼータ関数の関係を見出す糸口になる。積分表示 (4.45) について、 $t = nx$ なる置き換えを適用すると、ガンマ関数の積分表示は、

$$\Gamma(s) = n^s \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-nx} dx,$$

なる数式に書き換えられる。この積分表示を、さらに、

$$\frac{1}{n^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-nx} dx,$$

のように書き換え、 n を整数と仮定し、1 から無限大まで総和をとると、

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} x^{s-1} e^{-nx} dx = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx, \quad (4.46)$$

[§]前にもコメントしたとおり、10 次近似でなく無限項まで計算していれば、定義域内では $1/(1-z)$ と完全に一致する。

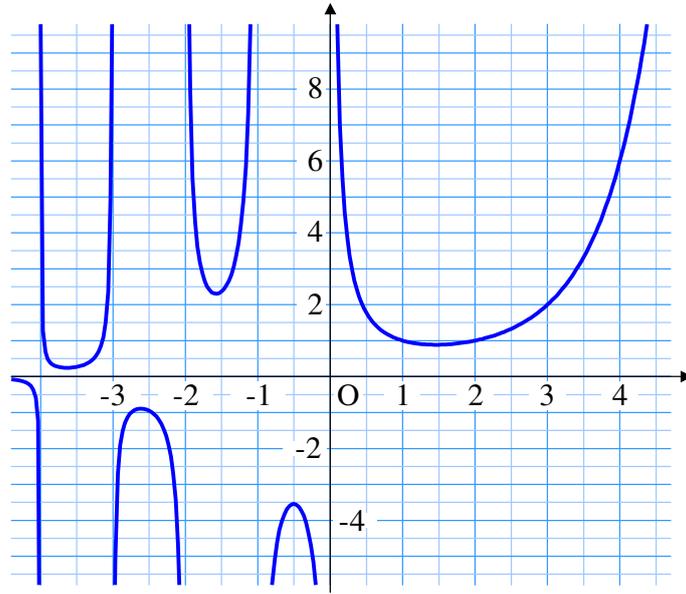


図 4.6: ガンマ関数

となる。右辺の被積分関数が $x^{s-2} \cdot x/(e^x - 1)$ のようにベルヌーイ数の指数型母関数を含むことから、ゼータ関数はベルヌーイ数と関係がありそうである。積分 (4.46) は、 $\operatorname{Re} s > 1$ の条件で収束する。その収束性を証明してみよう。その証明のために、 $g(s) \equiv \Gamma(s)\zeta(s)$ と定義する。正の実数 x と任意の複素数 s が与えられたとき、 $|x^s| = |x^{\operatorname{Re} s} e^{i \operatorname{Im} s \log x}| = x^{\operatorname{Re} s}$ であることに注意し、 $g(s)$ を評価するため、

$$g(s) = \int_0^1 \frac{u^{s-1}}{e^u - 1} du + \int_1^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx, \quad (4.47)$$

のように書いてみよう。この式の右辺の第2項はどのような s に対しても有限の値に収束する。なぜなら、 $x \geq 1$ のとき $e^x - 1 > e^x/2$ であることから、

$$\left| \int_1^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx \right| < 2 \int_1^\infty x^{\operatorname{Re} s - 1} e^{-x} dx,$$

が成立するからである。ここで、 $\operatorname{Re} s \leq 1$ であれば $x^{\operatorname{Re} s - 1} \leq 1$ であるので、

$$\left| \int_1^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx \right| < 2 \int_1^\infty e^{-x} dx = 2 \quad (\operatorname{Re} s \leq 1),$$

となる。一方、 $\operatorname{Re} s > 1$ であれば、

$$\begin{aligned} \left| \int_1^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx \right| &< 2 \int_0^\infty x^{\operatorname{Re} s - 1} e^{-x} dx \\ &\leq 2 \int_0^\infty x^{[\operatorname{Re} s] - 1} e^{-x} dx = ([\operatorname{Re} s] - 1)! \quad (\operatorname{Re} s > 1) \end{aligned}$$

となる。ここで、 $[x]$ は x 以上の整数の最小値である。よって、 s とは無関係に (4.47) の右辺の第 2 項が有限の値であることが示された。

第 1 項については、 $x \leq e^x - 1 \leq (e - 1)x$ であることに注意すると、

$$\frac{1}{e-1} \int_0^1 x^{\operatorname{Re} s - 2} dx < \int_0^1 \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx < \int_0^1 x^{\operatorname{Re} s - 2} dx,$$

なる関係が導かれる。左辺と右辺の積分を実行すると、この関係は

$$\frac{1}{(e-1)(\operatorname{Re} s - 1)} < \int_0^1 \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx < \frac{1}{\operatorname{Re} s - 1}$$

のように計算される。これより、(4.47) の第 1 項は $\operatorname{Re} s > 1$ のとき有限の値に収束することが示される。したがって、積分 $g(s)$ も $\operatorname{Re} s > 1$ のとき有限の値に収束する。

4.5.3 部分積分による解析接続

前項で示したように、ゼータ関数 $\zeta(s)$ の積分表示は $\operatorname{Re} s > 1$ のときに収束する。この収束域を広げ、ゼータ関数の定義域を拡大するために解析接続を適用しよう。タイトルに示すように、本項では部分積分を適用しながらゼータ関数を解析接続を進めていく。関数論のテキストには、この議論が非常に簡単に書かれているのだが、解析接続の準備段階としてベルヌーイ数の指数型母関数 $f(x) = x/(e^x - 1)$ の高階導関数と x べき乗の積、すなわち、 $x^s f^{(n)}(x)$ の積分の収束性を調べる必要がある。その結果を利用して、ゼータ関数の積分表示に部分積分を適用しながら解析接続を進めるのである。

準備段階 上に書いたように、解析接続の準備段階として、 $x^s f^{(n)}(x)$ を積分した場合の収束性を調べる。積分範囲は $[0, \infty)$ とするのだが、

$$\int_0^\infty x^s f^{(n)}(x) dx = \int_0^1 x^s f^{(n)}(x) dx + \int_1^\infty x^s f^{(n)}(x) dx, \quad (4.48)$$

のように、2 項に分けて書いておく。この積分が、 $n = 0$ の場合に $\operatorname{Re} s > 1$ の条件で収束することは前項で示されている。指数型母関数 $f(x)$ を x について微分した結果:

$$f'(x) = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2},$$

を用いて、 $n = 1$ における積分 (4.48) の第 2 項を評価してみよう。前項でも利用した $x \geq 1$ における不等式 $1/(e^x - 1) < 2e^{-x}$ に注意すると、

$$|f'(x)| < 4(e^{-x} + e^{-2x} + xe^{-x}), \quad (x \geq 1)$$

が成立する。これを (4.48) の第 2 項に代入すると,

$$\left| \int_1^\infty x^s f'(x) dx \right| < 4 \left(\left| \int_1^\infty x^s e^{-x} dx \right| + \left| \int_1^\infty x^s e^{-2x} dx \right| + \left| \int_1^\infty x^{s+1} e^{-x} dx \right| \right),$$

となる。前項での収束性の評価によると, この式の右辺の第 1 項から第 3 項はすべて, 任意の複素数 s に対して収束するので, この積分自体も任意の複素数 s に対して収束する。もう一方, (4.48) の第 1 項を評価するにはベルヌーイ数の指数型母関数のテイラー展開:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^k,$$

を利用するのが便利である。このテイラー展開を x について微分すると, 導関数:

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_{k+1}}{k!} x^k,$$

が得られる。ここで, ベルヌーイ数の漸近形:

$$B_{2m} = \frac{2(2m)!}{(2\pi)^{2m}}, \quad (m \rightarrow \infty),$$

に注意すると, $f(x)$ と $f'(x)$ はともに $|x| < 2\pi$ において収束することがわかる。すなわち, $0 \leq x \leq 1$ の範囲において $f'(x)$ を上記のテイラー展開で代用してもよい。よって, 積分の第 1 項は

$$\int_0^1 x^s f'(x) dx = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_{k+1}}{k!} x^{k+z} dx = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+z+1} \frac{B_{k+1}}{k!} x^{k+z+1} \right]_0^1,$$

のように書くことができる。この右辺が収束する条件は, $\operatorname{Re} z > -1$ であるので, 結局, $n = 1$ の場合に積分が収束するのは $\operatorname{Re} z > -1$ が条件である。

続いて, $n = 2, 3, \dots$ に対して (4.48) の収束性を評価したいのであるが, これ以降, 具体的に $f^{(n)}(x)$ を書き下していっても収束性の評価は困難である。その代わりに, $f(x)$ の導関数に対して成立する漸化式:

$$e^x \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) - f^{(n)}(x) = 0, \quad (n = 2, 3, \dots), \quad (4.49)$$

を利用するとよい。この漸化式は, $(e^x - 1)f(x) = x$ を微分していくことによって証明できる。まず, 第 1 回目の微分で

$$e^x (f(x) + f'(x)) - f'(x) = 1,$$

が得られ, 第 2 回目の微分で

$$e^x (f(x) + 2f'(x) + f''(x)) - f''(x) = 0,$$

が得られる。この関係式は、漸化式 (4.49) を満足する。そこで、任意の k に対して (4.49) が成立すると仮定し、その漸化式 (4.49) を微分してみる。すると、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(e^x \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) - f^{(n)}(x) \right) &= e^x \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(f^{(k)}(x) + f^{(k+1)}(x) \right) - f^{(n+1)}(x) \\ &= e^x f(x) + e^x \sum_{k=1}^n \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] f^{(k)}(x) + e^x f^{(n+1)}(x) - f^{(n+1)}(x) \\ &= e^x f(x) + e^x \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} f^{(k)}(x) + e^x f^{(n+1)}(x) - f^{(n+1)}(x) \\ &= e^x \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} f^{(k)}(x) - f^{(n+1)}(x), \end{aligned}$$

となり、 $k+1$ に対しても漸化式 (4.49) が成立する。したがって、漸化式 (4.49) の正当性が帰納的に証明された。よって、 n 階の導関数は、

$$f^{(n)}(x) = \frac{e^x}{e^x - 1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} f^{(k)}(x),$$

のように書くことができる。この結果に対して、積分 (4.48) の第 2 項を書くと、

$$\begin{aligned} \left| \int_1^\infty x^s f^{(n)}(x) dx \right| &\leq \frac{e^x}{e^x - 1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \left| \int_1^\infty x^s f^{(k)}(x) dx \right| \\ &< 2 \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \left| \int_1^\infty x^s f^{(k)}(x) dx \right|, \end{aligned}$$

のような不等式で表現できる。例えば、 $n=2$ の場合にこの不等式を展開すると、

$$\left| \int_1^\infty x^s f''(x) dx \right| < 2 \left(\left| \int_1^\infty x^s f(x) dx \right| + \left| \int_1^\infty x^s f'(x) dx \right| \right),$$

のように書かれる。既に示したように $n=0, 1$ のとき、任意の複素数 s に対して積分 (4.48) が収束することがわかっているので、その事実をこの不等号に適用すると、 $n=2$ に対しても積分 (4.48) は任意の z に対して収束することになる。この操作を繰り返していくと、任意の自然数 n について、積分 (4.48) の第 2 項は任意複素数の s に対して収束することが結論できる。

積分 (4.48) の第 1 項については、先ほどと同様にテイラー展開を使ってみよう。その場合、(4.48) の第 1 項は

$$\int_0^1 x^s f^{(n)}(x) dx = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_{k+n}}{k!} x^{k+s} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{k+s+1} \frac{B_{k+n}}{k!} x^{k+s+1} \right]_0^1,$$

のようになる。念のため、この級数の収束半径を調べてみよう。級数の収束半径は、各項の大きさの変化を調べてみればよい。各項に含まれているベルヌーイ数は第 2 項以降の奇

数項がすべてゼロであるので、 $k+n=2m$ (つまり、偶数) という条件のもとで、テイラー級数の第 k 項と第 $k+2$ 項を比べてみよう。

$$\begin{aligned} \text{第 } k \text{ 項} &= \frac{2(2m)!}{(k+s+1)(2\pi)^{2m} k!} x^{k+s+1}, \\ \text{第 } k+2 \text{ 項} &= \frac{2(2m+2)!}{(k+s+3)(2\pi)^{2m+2} (k+2)!} x^{k+s+3}. \end{aligned}$$

これらの項の比を計算すると、

$$\frac{\text{第 } k+2 \text{ 項}}{\text{第 } k \text{ 項}} = \frac{(k+s+3)(k+n+1)(k+n+2)}{(k+s+1)(k+1)(k+2)} \frac{x^2}{(2\pi)^2} \simeq \frac{x^2}{(2\pi)^2} \quad (k \gg n),$$

となるのだが、級数が収束する条件はこの比率が1より小さくなることなので、 $|x| < 2\pi$ がこの級数の収束半径である。積分 (4.48) の第1項の積分範囲 $[0, 1]$ は、この級数の収束半径の内側なので、級数展開による積分の評価が可能である。また、 $B_{2m+1} = 0$ ($m = 1, 2, \dots$) であることに注意すると、(4.48) の第1項が収束する条件は、

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} s &> -1 && (n = 0, 1, 2, 4, 6, \dots), \\ \operatorname{Re} s &> -2 && (n = 3, 5, 7, \dots), \end{aligned}$$

となる。既に評価したように (4.48) の第2項は s に関わらず収束するので、この条件は積分 (4.48) 全体が収束する条件である。

部分積分 準備が整ったのでゼータ関数の積分表示に部分積分を適用しながら解析接続をしていこう。前節で、ゼータ関数が

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx, \quad (4.50)$$

なる積分表示されることを学んだ。この積分表示に対して、ベルヌーイ数の指数型母関数を $f(x)$ と書き、 $g(s) \equiv \Gamma(s)\zeta(s)$ を評価してみよう。その積分 $g(z)$ は、

$$g(s) = \int_0^\infty x^{s-2} f(x) dx, \quad (4.51)$$

であるが、準備段階で得た知識により、 $g(s)$ は $\operatorname{Re} s > 1$ のときに収束する。この積分に部分積分を適用すると、

$$g(s) = \left[\frac{x^{s-1}}{s-1} f(x) \right]_0^\infty - \frac{1}{s-1} \int_0^\infty x^{s-1} f'(x) dx, \quad (4.52)$$

が得られる。ここで、 $x \rightarrow \infty$ の極限において $f(x) \simeq xe^{-x}$ であり、 $f(0) = B_0$ であることに注意すれば、この結果の第1項は $\operatorname{Re} z > 1$ のときにゼロとなり、 $\operatorname{Re} s \leq 1$ の条件で発散することがわかる。一方、第2項の積分は準備段階での知識により、 $\operatorname{Re} s > 0$ の条件で収

束する。つまり、積分 (4.51) の収束条件が $\operatorname{Re} s > 1$ であったのは、(4.52) の第 1 項があるためである。そこで、第 1 項を省略すれば $g(s)$ の収束条件を $\operatorname{Re} s > 0$ まで拡張することができる。第 1 項を省略したとしても、 $\operatorname{Re} s > 1$ の条件では、もともと、第 1 項がゼロであったので (4.52) は (4.51) と等しいはずである。言い換えると、(4.52) の第 1 項を省略することによって、 $\operatorname{Re} s > 1$ であった $g(s)$ の定義域が $\operatorname{Re} s > 0$ となるように解析接続されたことを意味する。ただし、第 2 項は分母に $s - 1$ が含まれるため、 $g(s)$ は $s = 1$ を 1 位の極とすることがわかる。そのときの留数は、

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{s=1} g(s) &= \lim_{s \rightarrow 1} (s - 1) g(s) \\ &= - \int_0^{\infty} f'(x) dx = f(0) = B_0, \end{aligned}$$

のように計算できる。被積分関数がベルヌーイ数の指数型母関数であるので、 $g(s)$ の留数にベルヌーイ数が姿を見せている。

続いて、(4.52) に部分積分を適用すると、さらに $g(s)$ の定義式が広がることが予想できるだろう。実際に適用してみると、

$$g(s) = - \left[\frac{x^{s-1}}{s(s-1)} f'(x) \right]_0^{\infty} + \frac{1}{s(s-1)} \int_0^{\infty} x^s f''(x) dx, \quad (4.53)$$

が得られる。この場合についても、 $x \rightarrow \infty$ の極限において $f'(x) \simeq -xe^{-x}$ であり、 $f'(0) = B_1$ であるので、(4.53) の第 1 項は $\operatorname{Re} z > 0$ の条件でゼロとなる。一方、(4.53) の第 2 項に含まれる積分は、準備段階での知識より、 $\operatorname{Re} s > -1$ の条件で収束する。前段落と同様に、(4.53) の第 1 項を省略した量を $\operatorname{Re} s > -1$ への解析接続としよう。すると、第 2 項の積分が $\operatorname{Re} s > -1$ で正則であるので、 $g(s)$ は $s = 1, 0$ を 1 位の極とする関数である。ここで、 $s = 0$ における留数を計算すると、

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{s=0} g(s) &= \lim_{s \rightarrow 0} s g(s) \\ &= - \int_0^{\infty} f''(x) dx = -f'(0) = -B_1, \end{aligned}$$

となる。準備段階で得た知識に注意して同様に部分積分を適用していくと、積分 $g(s)$ の定義域を拡大することができる。部分積分を n 回繰り返した結果を書くと、

$$g(s) = (-1)^n \prod_{k=1}^n \frac{1}{s+k-2} \int_0^{\infty} x^{s+n-2} f^{(n)}(x) dx \quad (\operatorname{Re} s > 1-n), \quad (4.54)$$

となる。この操作を無限に繰り返せば $g(s)$ の定義域を複素数全体に拡張することができる。その結果、 $g(s)$ は $s = 1, 0, -1, -2, \dots$ を 1 位の極とする関数になる。上と同様の方法で $s = -n$ における留数を計算すると、

$$\operatorname{Res}_{s=-n} g(s) = \frac{B_{n+1}}{(n+1)!},$$

となる。積分 $g(s)$ は、上に述べた 1 位の極以外の複素数全体で正則な関数となる。

ワイエルストラスの無限乗積の公式によると、 $1/\Gamma(s)$ は $s = 0, -1, -2, \dots$ を 1 位の零点とする関数であるので、 $\zeta(s) = g(s)/\Gamma(s)$ であるゼータ関数は、 $s = -1, -2, -3, \dots$ が除去可能な特異点である。したがって、ゼータ関数 $\zeta(s)$ は、 $z = 0$ を 1 位の極とし、それ以外の複素数全体で正則な関数であることが結論できる。それでは、それらの除去可能な特異点におけるゼータ関数の値を求めてみよう。そのためにはガンマ関数の留数を計算しておくとうい。ガンマ関数の留数の評価にはワイエルストラスの無限乗積の公式：

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = se^{\gamma s} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{k}\right) e^{-s/k},$$

を使用することもできるが、オイラーの無限城跡の公式：

$$\Gamma(s) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m^s m!}{s(s+1) \cdots (s+m)},$$

の方が取り扱いやすい。この公式を用いて $s = -n$ における $\Gamma(s)$ の留数を計算すると、

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{s=-n} \Gamma(s) &= \lim_{s \rightarrow -n} (s+n) \Gamma(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow -n} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(s+n) m^s m!}{s(s+1) \cdots (s+n-1)(s+n)(s+n+1) \cdots (s+m)} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n m^{-n} m!}{n! (m-n)!} \\ &= \frac{(-1)^n}{n!} \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right) \left(1 + \frac{2}{m}\right) \cdots \left(1 + \frac{n-1}{m}\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{n!}, \end{aligned}$$

が得られる。いや、実は $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ という性質に注目すれば、オイラーの無限乗積の公式を知らなくても留数を得ることができる。具体的に書くと、

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{s=-n} \Gamma(s) &= \lim_{s \rightarrow -n} (s+n) \Gamma(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow -n} (s+n) \Gamma(s+n+1-(n+1)) \\ &= \lim_{s \rightarrow 1} (s-1) \Gamma(s-(n+1)) \\ &= \lim_{s \rightarrow 1} \frac{(s-1) \Gamma(s)}{(s-1)(s-2) \cdots (s-n-1)} = \frac{(-1)^n}{n!}, \end{aligned}$$

となる。ところで、 $g(s)$ と $\Gamma(s)$ の双方について $s = -n$ が 1 位の極であるので、

$$\zeta(-n) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{g(s)}{\Gamma(s)} = \frac{\operatorname{Res}_{s=-n} g(s)}{\operatorname{Res}_{s=-n} \Gamma(s)} = \frac{(-1)^n B_{n+1}}{n+1} \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

が得られる。さらに、第3項以降のベルヌーイ数の奇数項がゼロであることに注意すると、

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}, \quad \zeta(-2m+1) = -\frac{B_{2m}}{2m}, \quad \zeta(-2m) = 0 \quad (m = 1, 2, 3, \dots),$$

と書くことができる。または、単純に、

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}, \quad \zeta(-n) = -\frac{B_{n+1}}{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

と書いてもよいだろう。この式に示すように、負の偶数のゼータ関数は、必ず、ゼロになる。そのため、負の偶数はゼータ関数の自明な零点と呼ばれる。一方、 $\Gamma(s)$ が $s = 1$ で正則なため、積分 $g(s)$ の1位の極だった $s = 1$ は $\zeta(s)$ の1位の極として引き継がれる。その極におけるゼータ関数の留数は、

$$\operatorname{Res}_{s=1} \zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(1)} \operatorname{Res}_{s=1} g(s) = 1,$$

となる。しかも、 $s = 1$ はゼータ関数の唯一の極である。

4.5.4 複素数での積分表示

ゼータ関数を複素数全体を定義域とするための積分表示を考察しよう。既に導出したように、ゼータ関数は、

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} dz,$$

のような積分表示ができる。しかし、この積分表示は $\operatorname{Re} s > 1$ の条件で収束するだけである。前節では、この積分表示に対して部分積分を繰り返すことによって定義域を拡張した。本節では積分表示を複素積分に拡張することによって解析接続を試みる。

積分路として図 4.7 に示す C を設定する。この積分路は、実軸上を $+\infty$ からゼロに向かう C_+ 、原点の周りを半径 r で1回転する C_r と、実軸上のゼロから $+\infty$ に向かう C_- によって構成されている。もう少し正確に言うと、積分路 C_+ は微小量の虚部を含み第I象限内を動き、積分路 C_- は微小量の虚部を含み第IV象限内を動く。まず、 $\operatorname{Re} s > 1$ の条件を仮定しよう。さらに、 $r \rightarrow 0$ とすると、経路 C_r にそった積分は、

$$\begin{aligned} \int_{C_r} \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} dz &= \lim_{r \rightarrow 0} ir^s \int_0^{2\pi} \frac{e^{is\theta}}{e^{re^{i\theta}} - 1} d\theta = \lim_{r \rightarrow 0} ir^{s-1} \int_0^{2\pi} e^{i(s-1)\theta} dz \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2ir^{s-1} e^{\pi i(s-1)} \sin \pi(s-1)}{s-1} = 0 \quad (\operatorname{Re} s > 1), \end{aligned}$$

となるので、ゼロになることがわかる。経路 C_+ に沿った積分は

$$\frac{1}{\Gamma(s)} \int_{C_+} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dz = -\zeta(s) \quad (\operatorname{Re} s > 1),$$

である。さらに、経路 C_- に沿った積分については、積分変数 z が原点の周りを角度 2π だけ回った後であることを考えると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(s)} \int_{C_-} \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} dz &= \int_0^\infty \frac{(ze^{2\pi i})^{s-1}}{e^z - 1} dz \\ &= e^{2\pi i(s-1)} \int_0^\infty \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} dz = e^{2\pi i(s-1)} \zeta(s) \quad (\operatorname{Re} s > 1), \end{aligned}$$

と書くことができる。したがって、 $\zeta(s)$ は、

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \frac{1}{\Gamma(s)} \frac{1}{e^{2\pi i(s-1)} - 1} \int_C \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} dz \\ &= \frac{e^{\pi i(s-1)}}{2i\Gamma(s) \sin \pi(s-1)} \int_C \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} dz \\ &= -\frac{1}{2i\Gamma(s) \sin \pi s} \int_C \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz = -\frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_C \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz, \end{aligned} \quad (4.55)$$

のように表現できる。この数式変形において、 $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \pi/\sin \pi s$ なる関係を利用した。この関係式は $\operatorname{Re} s > 1$ の条件のもとで計算したのだが、この関係が $\operatorname{Re} s \leq 1$ でも成立すると仮定しよう。その仮定がゼータ関数の解析接続となる。

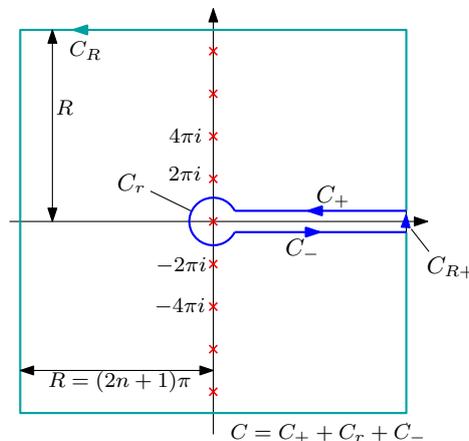


図 4.7: ゼータ関数を計算する積分路

積分表示 (4.55) が $\operatorname{Re} s \leq 1$ でも成立するとの仮定が解析接続になっていることを示そう。ゼータ関数の変数が負の整数 $z = -n$ であるなら、積分路を図 4.7 に示すような $C + C_{R+}$ に設定することができる。追加した積分路 C_{R+} は無限遠の正の実軸を第 IV 象限から第 I 象限にまたぐ微小経路である。この微小経路は長さが限りなくゼロに近いため、この微小経路に沿った積分はゼロとなる。そのため、

$$\zeta(s) = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_C \frac{(-z)^{-n-1}}{e^z - 1} dz = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_{C+C_{R+}} \frac{(-z)^{-n-1}}{e^z - 1} dz,$$

が成立するため、経路 $C + C_r$ に沿った周回積分によってゼータ関数を評価できる。補足しておくとして、この経路が周回経路として成り立つのはゼータ関数の変数が整数の場合に限られる。なぜなら、被積分関数の分子 $(-z)^{s-1}$ は、 z が原点の周りを1回転すると $(-z)^{s-1} e^{2\pi i(s-1)}$ となり、これが回転前と同一の値にならないければ経路 C_{R+} をひと続きの経路とはみなすことができないからである。その条件は s が整数の場合に限って満たされる。ここで考えているのは、 $s = -n$ であるので経路 $C + C_{R+}$ は周回経路として成立しているため、この経路の積分に留数定理を使用できる。被積分関数が、

$$\frac{(-z)^{-n-1}}{e^z - 1} = (-1)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^{k-n-2},$$

のようにベルヌーイ数を用いて展開でき、留数がローラン展開したときの -1 次の係数であることから、極 $z = 0$ における被積分関数の留数は、

$$\operatorname{Res}_{z=0} \frac{(-z)^{-n-1}}{e^z - 1} = \frac{(-1)^{n+1} B_{n+1}}{(n+1)!},$$

であることがわかる。さらに、 $\Gamma(1+n) = n!$ であることに注意し、経路 $C + C_{R+}$ の周回積分に留数定理を適用すると、

$$\zeta(-n) = \frac{(-1)^n B_{n+1}}{n+1},$$

が導かれる。ただし、 B_3 以降のベルヌーイ数の奇数項がゼロであることに注意すると、

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}, \quad \zeta(-2m+1) = -\frac{B_{2m}}{2m}, \quad \zeta(-2m) = 0 \quad (m = 1, 2, 3, \dots),$$

なる結果を得る。この結果に示すとおり、負の偶数のゼータ関数は、必ず、ゼロとなる。ゼータ関数の自明な零点に関するこのような結果は前節で解析接続した際にも得られた。

それでは、整数以外の $\operatorname{Re} s < 1$ の場合における経路 C での積分の評価について述べる。上で説明したように、 s が整数でなければ経路 $C + C_{R+}$ が周回経路とならないため、任意の s に対して、経路 $C + C_{R+}$ を積分経路とすることはできない。そこで、図 4.7 に示す左回りの積分路 C_R を考えよう。この積分路は、複素平面における4点: $R + iR$, $-R + iR$, $-R - iR$, $R - iR$ を頂点とする正方形であり、しかも、 $R = (2n+1)\pi$ であるとする。その積分路が与えられ、 $\operatorname{Re} s < 1$ の条件では、 $R \rightarrow \infty$ の極限で、 C_R に沿った積分はゼロとなる。それは次のようにして証明できる。

Proof まず、 $z = x \pm i(2n+1)\pi$ とし、 $0 < \alpha < 1$ を用いると、

$$\begin{aligned} \left| \int_{z=x \pm iR} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz \right| &< \int_{-R}^R \frac{z^{\operatorname{Re} s - 1}}{e^x + 1} dx < \int_{-R}^R z^{\operatorname{Re} s - 1} dx \\ &< \int_{-R}^R \frac{1}{R^{1-\operatorname{Re} s}} dz = \frac{2}{R^{-\operatorname{Re} s}}, \end{aligned}$$

となるので, $\operatorname{Re} s < 0$ のとき, この積分はゼロになる。つまり, 積分路 C_R のうち, 実軸と平行な積分路における積分は $\operatorname{Re} s < 0$ の条件でゼロになる。次に $z = R + iy$ とすると,

$$\left| \int_{z=R+iy} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz \right| < \int_{-R}^R \frac{(\sqrt{2}R)^{\operatorname{Re} s-1}}{e^R - 1} dy,$$

となる。この積分は, $R \rightarrow \infty$ の極限では s と無関係にゼロになるので, 複素平面の第 I 象限と第 IV 象限を通る虚軸に平行な積分路での積分は必ずゼロになる。もう一方, $z = -R + iy$ における積分は,

$$\left| \int_{z=-R-iy} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz \right| < \int_{-R}^R \frac{(\sqrt{2}R)^{\operatorname{Re} s-1}}{e^{-R}e^{iy} - 1} dy,$$

となるので, $R \rightarrow \infty$ の極限では, $\operatorname{Re} s < 1$ の場合にゼロとなる。したがって, 積分路 C_R における積分は, $\operatorname{Re} s < 1$ の場合にゼロとなる。◻

積分路 C_R での積分が $\operatorname{Re} s < 1$ の場合にゼロになる事実より, 積分路 C における積分は,

$$\int_C \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz = - \int_{C_R+C^{-1}} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz \quad (\operatorname{Re} s < 1),$$

と書くことができる。ここで, C^{-1} は経路 C を逆方向にたどる経路を意味する。ところで, 被積分関数は $z = 2\pi in$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) で 1 位の極をもつ。その極における留数を計算すると,

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=2\pi in} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} &= \lim_{z \rightarrow 2\pi in} \frac{(z - 2\pi in)(-z)^{s-1}}{e^z - 1} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z(-z - 2\pi in)^{s-1}}{e^z - 1} = (2\pi)^{s-1} n^{s-1} e^{-\pi i(s-1)/2}, \end{aligned}$$

となる。積分経路 $C_R + C^{-1}$ が $z = 0$ 以外の極をすべて取り囲んでいることに注目すれば, 留数定理によって,

$$\begin{aligned} \int_C \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} dz &= -2\pi i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (2\pi)^{s-1} n^{s-1} e^{-\pi i(s-1)/2} \\ &= -2\pi i \cdot (2\pi)^{s-1} \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1} e^{-\pi i(s-1)/2} (1 + e^{\pi i(s-1)}) \\ &= -2\pi i \cdot 2(2\pi)^{s-1} \cos \frac{\pi(s-1)}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1-s}} \\ &= -2\pi i \cdot 2(2\pi)^{s-1} \zeta(1-s) \sin \frac{\pi s}{2}, \end{aligned}$$

が得られる。この数式変形の第1行目に含まれる Σ' は $n = 0$ を取り除いた総和を意味する。得られた結果を複素平面におけるゼータ関数の積分表示に代入すれば、

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \Gamma(1-s) \zeta(1-s) \sin \frac{\pi s}{2} \quad (\operatorname{Re} s < 1), \quad (4.56)$$

なる関数等式が得られる。この関数等式は、経路 C_R における積分がゼロであること、すなわち、 $\operatorname{Re} s < 1$ の条件において導出された関係式であるので、(4.56) にはその条件を書いておいた。この条件を考慮すると、(4.56) は必ず正則であることがわかる。ここで、 $s = -2m$ ($m = 1, 2, \dots$) とおいて負の偶数のゼータ関数を求めるならば、 $\sin(-\pi m) = 0$ であり、 $\Gamma(1+2m)$ も $\zeta(1+2m)$ も正則であるので、 $\zeta(-2m) = 0$ であることが導かれる。これは、ゼータ関数の自明な零点を与える結果であり、前節、および、本節の負の整数に限定した場合の解析においても同一の性質が得られている。

次に、 $s = -2m+1$ とおいて負の奇数のゼータ関数を求めてみよう。その場合、 $\sin(-m + 1/2)\pi = (-1)^m$ 、 $\Gamma(2m) = (2m-1)!$ であり、さらに、

$$\zeta(2m) = \frac{(-1)^{m-1} 2^{2m-1} \pi^{2m} B_{2m}}{(2m)!},$$

であるので、 $\zeta(-2m+1) = -B_{2m}/2m$ が得られる。これも前節で導いた結果と同じである。つまり、図 4.7 に示す経路 C のように積分路を選び、積分 (4.55) によってゼータ関数を定義すれば、ゼータ関数の定義域を複素数全体に拡張することができる。また、積分路 C は必ずしも図 4.7 のように設定する必要はなく、無限遠の実軸上から開始し、正の実軸と積分路自身を交わることなく、また、極の上を通過することなく、 $z = 0$ を左回りに周回し、無限遠の正の実軸上に戻る経路であればどのような経路でもよい。

解析接続によって、ゼータ関数の定義域を複素数全体に拡張することができた。実数変数に対してゼータ関数を図 4.8 にグラフ表示しておこう。既に明らかにしたように、ゼータ関数 $\zeta(z)$ は $z = 1$ で発散し、負の偶数をゼロ点とする。変数が正の無限大に向かって増加すると、ゼータ関数は 1 に近づく。一方、変数が負の値になると、 x 軸の上下を振動する。このグラフでは、負の変数に対してゼータ関数はゼロに近い値となっているが、さらに変数が小さくなると、振幅が階乗の速さで増大しながら振動する。変数が負の無限大に向かって減少したときゼータ関数の振幅が増大することは、 $\zeta(-n) = -B_{n+1}/(n+1)$ から容易に理解できるだろう。

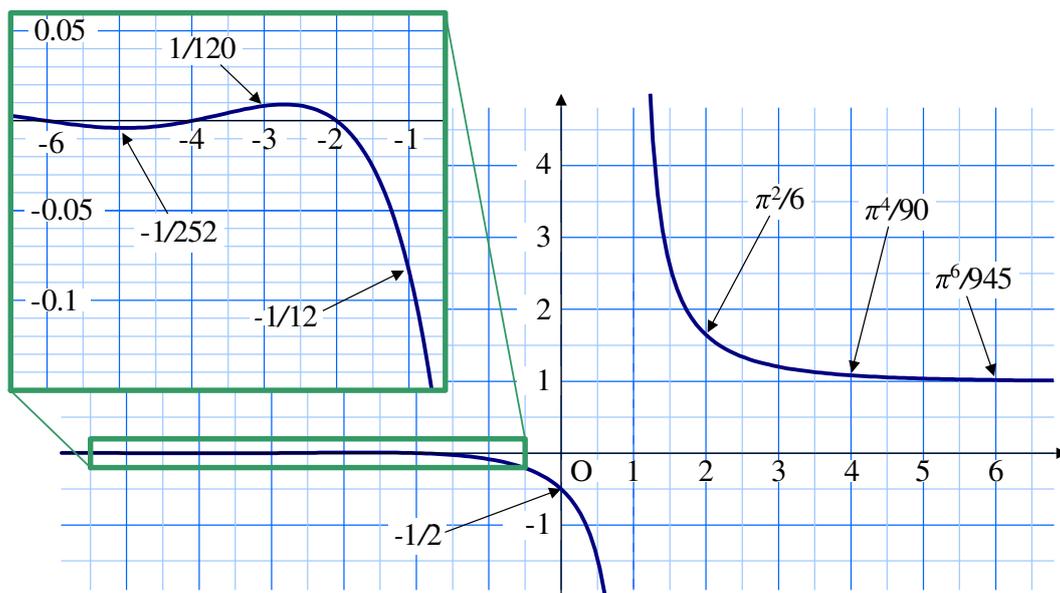


図 4.8: ゼータ関数

Break: 自然数の数は全部で $-1/2$ 個

このコラムに書いてある記事は、冗談と思って軽く流してほしい。本章で解析接続を使ってゼータ関数の定義域を複素平面全体に拡張した。その結果として、 $\zeta(0) = 1/2$, $\zeta(-1) = -1/12$, $\zeta(-2) = 0$, $\zeta(-3) = 1/120$ のような結果が得られる。もともとゼータ関数は、

$$\zeta(s) \equiv 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \dots$$

のように定義されていた。つまり、 $\zeta(0) = 1 + 1 + 1 + \dots$ である。この式は、

$$\zeta(0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N 1,$$

のように書いてよいだろう。この総和で得られる数値は、1 から N までの間に存在する自然数の数と考えることもできるだろう。ということは、 $N \rightarrow \infty$ とすれば、すべての自然数の数が得られるのではないか。つまり、 $\zeta(0)$ は自然数の数を与えると考えられるのである。先ほど述べたように、 $\zeta(0) = -1/2$ であるので、自然数の数は $-1/2$ 個ということになる。

これまで、ゼータ関数の性質を調べ、図 4.8 にゼータ関数をグラフに示した。しかし、これまでに調べた内容では整数変数しか関数値を与えることができず、任意の変数に対して関数値を計算するには異なる手段が必要である。その手段は本章の範囲を超えているため、本章で取り扱う代わりに、第 6 章で改めてゼータ関数の計算方法を取り扱う。

4.5.5 負整数のゼータ関数

本節では、負整数のゼータ関数を強引にべき級数と関連付けてみよう。あまりにも強引であるので、数学的な厳密さを伴っていないことを勘弁してほしい。その意味で、本節はコラム書くべき内容なのだが、多少まじめに議論してみたいので本文に書くことにした。

負整数のゼータ関数は、その関数の元来の定義によると、 $\zeta(-n) \equiv 1 + 2^n + 3^n + 4^n + \dots$ である。このような収束しない級数でゼータ関数を定義することはナンセンスであるが、本節はこのまま議論を進めていきたい。ここで、負整数のゼータ関数に現れる各項を係数とするべき級数(通常母関数):

$$f_n(x) = \sum_k^{\infty} k^n x^{k-1} = 1 + 2^n x + 3^n x^2 + 4^n x^3 + \dots \quad (4.57)$$

を考えてみよう。パラメータ n がゼロのとき、この関数は、

$$f_0(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots = \frac{1}{1-x},$$

であることがわかる。これから始めて、一般の $f_n(x)$ を表記してみよう。次の関数 $f_1(x)$ は、

$$f_1(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \dots$$

となることから、 $f_0(x)$ の1階微分、すなわち、 $f_1(x) = f_0'(x)$ であることがわかる。または、 $f_1(x) = (xf_0(x))'$ と考えても同じ結果が得られる。この後すぐにわかるが、 $f_1(x) = (xf_0(x))'$ と考えたほうが都合がよい。したがって、

$$f_1(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots = \frac{d}{dx} \frac{x}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2},$$

が得られる。階数を増加させるには、 $f_2(x) = (xf_1(x))'$ とすればよい。つまり、2階の関数は、

$$f_2(x) = 1 + 2^2x + 3^2x^2 + 4^2x^3 + \dots = \frac{d}{dx} \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{1+x}{(1-x)^3},$$

が得られる。ここまでくれば、一般的に階数を1階上昇させるには $f_{n+1}(x) = (xf_n(x))'$ とすればよいことは明らかだろう。とりあえず、3階の母関数を計算してみると、

$$f_3(x) = 1 + 2^3x + 3^3x^2 + 4^3x^3 + \dots = \frac{d}{dx} \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} = \frac{1+4x+x^2}{(1-x)^4},$$

のようになる。これから階数を上昇させるには計算が楽ではないようだ。上で計算した3階までの母関数を見ると、 $n-1$ 階の母関数は分子が x の n 次式で分母が $(1-x)^{n+2}$ と推測できる。つまり、 $n-1$ 階の母関数は、

$$f_{n+1}(x) = \frac{1}{(1-x)^{n+2}} \sum_{k=0}^n A_{n,k} x^k, \quad (4.58)$$

と書ける。この式に対して、 $f_n(x) = (xf_{n-1}(x))'$ の関係を用いて、階数を上昇させると、

$$\begin{aligned} f_{n+2}(x) &= \frac{1}{(1-x)^{n+3}} \left[(1-x) \sum_{k=0}^n A_{nk} x^k + (n+2) \sum_{k=0}^n A_{nk} x^{k+1} \right] \\ &= \frac{1}{(1-x)^{n+3}} \left\{ A_{n0} + \sum_{k=0}^n [(k+1)A_{nk} + (n-k+1)A_{n,k-1}] x^k + A_{nn} x^{n+1} \right\}, \end{aligned}$$

のように計算できる。この計算結果における x^k の係数を $A_{n+1,k}$ とすると、その係数は、

$$A_{nk} = (n-k+1)A_{n-1,k-1} + (k+1)A_{n-1,k}, \quad A_{n0} = A_{nn} = 1, \quad (4.59)$$

なる漸化式で与えられる。この式のうち、 $A_{n0} = A_{nn} = 1$ は、 $f_1(x) = 1/(1-x)^2$ である事実から得られる $A_{00} = 1$ から派生している。上に示した漸化式を用いて7階の母関数まで計算すると、表 4.8 が得られる。この表によると、展開係数に左右の対称性:

$$A_{nk} = A_{n,n-k} \quad (4.60)$$

が成立しているように見える。その対称性が n 階の展開係数で成立すると仮定して、 $n+1$ 階の展開係数を計算すると、

$$\begin{aligned} A_{n+1,(n+1)-k} &= (k+1)A_{n,n-k} + (n+1-k+1)A_{n,n-k+1} \\ &= (k+1)A_{n,k} + ((n+1)-k+1)A_{n,k-1} = A_{n+1,k}, \end{aligned}$$

となるので、 $n+1$ 階の展開係数も対称性が成立する。したがって、展開係数はいかなる階数においても左右対称である。

表 4.8: 母関数の展開係数

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	4	1					
3	1	11	11	1				
4	1	26	66	26	1			
5	1	57	302	302	57	1		
6	1	120	1191	2416	1191	120	1	
7	1	247	4293	15619	15619	4293	247	1

展開係数 A_{nk} は、 k について和をとると $(n+1)!$ に等しい事実がある。この事実は、次のように数式展開すると証明できる。展開係数 A_{nk} の総和を、漸化式に注意して変形すると、

$$\sum_{k=0}^n A_{nk} = A_{n0} + \sum_{k=1}^{n-1} A_{nk} + A_{nn}$$

$$\begin{aligned}
&= A_{n-1,0} + \sum_{k=1}^{n-1} \left[(n-k+1)A_{n-1,k-1} + (k+1)A_{n-1,k} \right] + A_{n-1,n-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)A_{n-1,k} + \sum_{k=1}^n (n-k+1)A_{n-1,k-1} = (n+1) \sum_{k=0}^{n-1} A_{n-1,k},
\end{aligned}$$

のように, $A_{n-1,k}$ の総和の $n+1$ 倍になっている。第 0 階の展開係数 A_{0k} の k についての和が 1 であることから,

$$\sum_{k=0}^n A_{nk} = (n+1)! \quad (4.61)$$

であることが導かれる。

展開係数 A_{nk} の性質がいくつかわかったので, $f_n(x)$ とゼータ関数の関係を調べよう。単純に考えれば, $x=1$ とすれば,

$$f_n(1) = 1 + 2^n + 3^n + 4^n + \dots$$

となるので, ゼータ関数 $\zeta(-n)$ そのものであるが, 取り扱うには注意が必要である。なぜなら,

$$f_n(x) = \frac{1}{(1-x)^{n+1}} \sum_{k=0}^{n-1} A_{n-1,k} x^k,$$

であるので, $x=1$ では $f_n(x)$ が発散するからである。発散を回避するため, 代わりに $x=-1$ を代入しよう。そのときの関数値を $\varphi(-n) \equiv f_n(-1)$ と定義すると,

$$\varphi(-n) = 1 - 2^n + 3^n - 4^n + \dots = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k A_{n-1,k},$$

のように書くことができる。さらに, $\varphi(-n) = (1-2^{n+1})\zeta(-n)$ であることに注意すれば,

$$\zeta(-n) = \frac{\varphi(-n)}{1-2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}(1-2^{n+1})} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k A_{n-1,k},$$

が導出される。展開係数 A_{nk} が k についての対称性があることから, n が偶数 ($n=2m$) のとき, この式は確実にゼロになるので, $\zeta(-2m) = 0$ となる。これは, 前に導出した結果と合致している。さらに, 表 4.8 を上の式に適用すると,

$$\begin{aligned}
\zeta(-1) &= -\frac{1}{12}, & \zeta(-3) &= \frac{1}{120}, & \zeta(-5) &= -\frac{1}{252}, \\
\zeta(-7) &= \frac{1}{240}, & \zeta(-9) &= -\frac{1}{132},
\end{aligned}$$

が得られる。これも, 前に解析接続によって導出した結果 $\zeta(-2m+1) = B_{2m}/2m$ と合致する。また, $\zeta(0)$ については,

$$\varphi(0) = f_0(-1) = \frac{1}{1-x} \Big|_{x=-1} = \frac{1}{2},$$

によって $\zeta(0) = -1/2$ を導くことができる。これも解析接続によって導出した結果と合致する。

本節で展開した手法は、オイラーがゼータ関数の拡張に用いた方法である。級数の収束性を無視した方法であるが、解析接続を用いて拡張した結果と一致している。本節で新たに検証したゼータ関数を、元来の定義形式と併せて値を記述すると、

$$\begin{aligned} 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \cdots &= -1/2, \\ 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots &= -1/12, \\ 1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \cdots &= 0, \\ 1 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + \cdots &= 1/120, \\ 1 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + 5^4 + \cdots &= 0, \\ 1 + 2^5 + 3^5 + 4^5 + 5^5 + \cdots &= -1/252, \end{aligned}$$

のようになる。しかし、本当にこれらの左辺と右辺が等号で結ばれると考えてはいけない。読者が気づいているように、この関係式を得るまでの数式変形に、非常に怪しい操作を実行しているのだ。例えば、 $\zeta(-1)$ の場合、数学的テクニックとして $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots = 1/(1-x)$ の関係を用いるのはよいとして、 $x = 1$ ではなく $x = -1$ とするのが怪しいのである。確かに、 $x = 1$ では左辺の級数が収束しない。かと言って、 $x = -1$ でも収束するわけではない。級数 $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots$ は $|x| < 1$ が収束条件である。つまり、この級数が関数として有効な定義域は $|x| < 1$ である。そんな収束条件が厳しい級数を、定義域が複素数全体に渡るように解析接続した関数が $1/(1-x)$ なのである。その関数は、 $x = 1$ を極とする（つまり、 $x = 1$ で正則ではない）ため $x = 1$ でなく $x = -1$ を用いて議論したのである。つまり、数式変形の途中から議論の対象は $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots$ でなく、それを解析接続した $1/(1-x)$ にすり替わっていたのである。したがって、最終的に得られる関係式の左辺は $\zeta(-1)$ であり、決して $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots$ ではないのである。言い換えると、結果として得られる関係式は、 $\zeta(-1) = -1/12$ であることに間違いのないのだが、 $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots = 1/12$ は正しくない。そのような、収束条件を満たさない数式と、それを解析接続した関数とを等号で結ぶことはかなり乱暴なことである。

不思議なことに、物理学の世界で上記の不可思議な数式が成立すると解釈できることがある。その例として、カシミール効果がある。カシミール効果とは、帯電していない2枚の金属板を微小距離隔てて平行配置したときに、それらの間に引力が発生する現象である。その現象は、量子論的なゼロ点エネルギーに起因する。あらゆる可能な組み合わせについてゼロ点エネルギーが総和が $1 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots$ のように3乗数の無限和となる。この無限和を $\zeta(-3) = 1/120$ で置き換えて金属板間に作用する力を計算すると、実験結果と一

致する[¶]。

[¶]この現象を紹介した文献は多いのだが、ゼータ関数との関係を説明している文献として、黒川信重, “オイラー探検 無限大の滝と 12 連峰,” 丸善, 2012, が挙げられる。

