付 録D　負整数のゼータ関数の考察

級数展開によるゼータ関数の定義 $\zeta(s) = 1^{-s} + 2^{-s} + 3^{-s} + \cdots$ によると, その変数を負の値にすると, 明らかに発散する。負の数を与えた場合, 級数表現ではゼータ関数を定義できない。しかし, 発散するにしても, 解析接続で得られるゼータ関数の値と何らかの関連性があるかもしれない。ここで, 負整数のゼータ関数について, 発散級数と解析接続した関数値の関連性を考察していく。

ゼータ関数 $\zeta(s)$ の変数 s が負の値となった場合, 級数によるゼータ関数の定義式:

$$\zeta(-k) = 1 + 2^k + 3^k + \cdots$$

が収束しないことは既に説明したとおりである。数学的な厳密性はともかく, オイラーは交代級数によって定義したイータ関数:

$$\eta(-k) \equiv 1 - 2^k + 3^k - 4^k + \cdots \tag{D.1}$$

を導入し, $\eta(-k) = (1 - 2^{k+1})\,\zeta(-k)$ なる関係式*から $\zeta(-k)$ を特定しようとしたのである。イータ関数 $\eta(-k)$ は前節で示したとおり,

$$\begin{aligned} \eta(-k) &= \left. \frac{1}{(1-x)^{k+1}} \sum_{p=0}^{k-1} A_{k-1,p}\, x^p \right|_{x=-1} \\ &= \frac{1}{2^{k+1}} \sum_{p=0}^{k-1} (-1)^p A_{k-1,p}, \end{aligned} \tag{D.2}$$

によって与えられていた。なお, 分子の展開係数 $A_{k-1,p}$ は本文中で既に与えてある。もともと交代級数で定義したイータ関数 (D.1) が収束しないため, それを解析接続した関数 (D.2) によって関数値を決定したのである。

それでは, 発散する交代級数 (D.1) は, 解析接続によって得た関数値との間に関連性をもたないだろうか? 前節で既に確認したが, 改めて $\eta(-k)$ を書いてみると,

$$\eta(0) = \frac{1}{2}, \quad \eta(-1) = \frac{1}{4}, \quad \eta(-2) = 0, \quad \eta(-3) = -\frac{1}{8}, \quad \ldots$$

*もっとも, $\zeta(-k)$ も $\eta(-k)$ も収束しないので, この関係式が成立すると考えるのは乱暴である。

のようになる。まず, $k=0$ について考えてみよう。そのイータ関数に対応するゼロ次べき乗の交代級数は $1,0,1,0,\cdots$ のように振動する。単純に考えれば, $\eta(0)=1/2$ はその平均値である。その安易な考えが他の次数 k について成り立つか検証しよう。

イータ関数 $\eta(-k)$ の変数が $k=1$ の場合, 対応するべき乗の交代級数は, $1-2+3-4+\cdots$ である。この交代級数を n 項で打ち切った級数を:

$$\hat{S}_1^-(n) \equiv \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}j = 1-2+3-4+\cdots+(-1)^{n-1}n,$$

のように定義しよう。この表記は本書の第 1 章で取り扱ったべき乗和 $\hat{S}_k(n)$ に倣った記号を用いた。記号にハット (ˆ) を付したのは, 総和記号が 0 から $n-1$ でなく, 1 から n としたためである。交代級数 $\hat{S}_1^-(n)$ は, 加算する項の数 n が増加するにともない, $1,-1,2,-2,3,-3,\ldots$ のように振幅を拡大しながら振動する。その交代級数は, 任意の正の整数 m を用いて,

$$\hat{S}_1^-(n) = \begin{cases} m & (n=2m-1), \\ -m & (n=2m), \end{cases}$$

のように書くことができる。つまり, 加算項の数 n の偶奇によって, 計算式が異なるのである。この式を見ると, 加算項が奇数個のときの交代級数の値と, 偶数個のときの交代級数の値の平均値がゼロとなり, 項の数 m に依存しないように見える。しかし, それは誤解である。加算項の数がさらに隣の奇数 $n=2m+1$ である場合には, 交代級数の値は $m+1$ となる。さらに, 加算項の数がその隣の偶数 $n=2m+2$ の場合, 交代級数の値は $-m-1$ となるので, $n=2m+1$ と $n=2m+2$ の組み合わせでの交代級数の平均値は再びゼロとなるのである。平均極限[†]の概念によって, 一定の値を得るまで平均値をとる操作を繰り返す方法もあるが, 別の方法を考えてみたい。

交代級数 $S_1^-(n)$ の値 (D) は, 加算項の数 n が奇数と偶数の場合に分ける意味で, 媒介変数 m を用いて書いている。その式を, あえて m を使わずに書くと,

$$\hat{S}_1^-(n) = \begin{cases} \dfrac{n+1}{2} & (n = \text{ odd}), \\ -\dfrac{n}{2} & (n = \text{ even}), \end{cases}$$

となる。この交代級数の値は, n の偶奇によって上に書いた 2 つの値のどちらかになる。しかし, これを偶奇によらないものとし, 次のように読み替えてみよう。交代級数 $\hat{S}_1^-(n)$ は, 等確率で $(n+1)/2$ か, $-n/2$ となる。そのように読み替えるのは, $n\to\infty$ で交代級数の極限値を求めるので, n の偶奇の依存性を排除すべきと考えたからである。偶奇の依存性を排除した平均値は, 図 D.1 に示すように, 振動する交代級数の上側包絡線と下側包絡線の間の中点である。つまり, その平均値は交代級数の振動の中心を与えると解釈できる。なお, 1 次の交代級数の場合, 振動の中心は $\eta(-1)=1/4$ に一致する。

[†]黒川信重, “オイラー探検,” 丸善, pp.71–77, 2012.

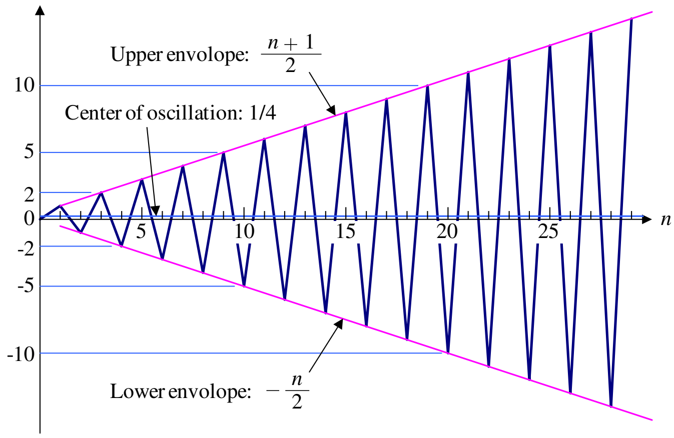


図 D.1: 交代級数の振動の中心 ($k=1$)

振動の中心によるイータ関数の解釈が 1 次以外の交代級数でも $\eta(-k)$ と合致することを検証しよう。続く例として, 2 次の交代級数:

$$\hat{S}_2^-(n)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}j^2=1-2^2+3^2-4^2+\cdots+(-1)^{n-1}n^2,$$

を考えよう。この交代級数は, n の増加にともない, $1,-3,5,-7,9,\ldots$ のように振幅を拡大しながら振動する。振幅の増加は 1 次の場合より速い。この交代級数は, 図 D.2 (a) に示すように振動している。交代級数 $S_2^-(n)$ は, 加算項の数 n との関係を書くと,

$$\hat{S}_2^-(n)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}n^2+\dfrac{1}{2}n & (n=\ \text{odd}),\\[2mm] -\dfrac{1}{2}n^2-\dfrac{1}{2}n & (n=\ \text{even}),\end{cases}$$

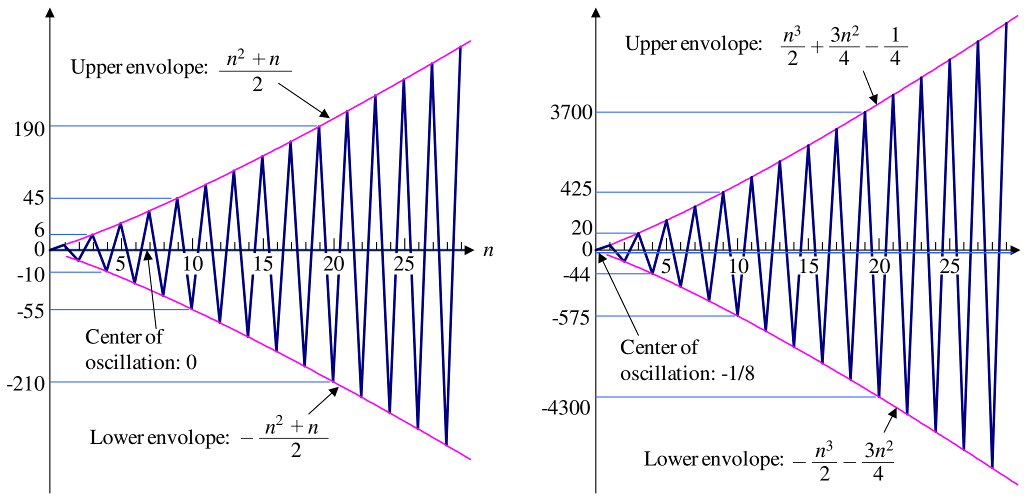
のようになる。場合分けされた 2 つの結果は, それぞれ, 2 次の交代級数の上側包絡線と下側包絡線を与える。上側包絡線と下側包絡線は x 軸に対して対称であるので, それらの平均値として得られる振動の中心はゼロとなり, $\eta(-2)=0$ と一致する。

さらに次数が高い場合も同様に, 交代級数の上側包絡線と下側包絡線の数式を導出し, その平均値を求め, 振動の中心を特定するのである。例として, 3 次の交代級数は図 D.2 (b) に示すように, n の増加と共に振幅を拡大しながら振動する。しかし, 上側包絡線と下側包絡線を数式によって特定すれば, その振動の中心が $-1/8$ であることがわかるのだ。それでは, 一般的な k 次の交代級数の振動の中心を導出しよう。そのために, k 次べき乗和の公式:

$$S_k(n)=\sum_{j=0}^{n-1}j^k=\frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k}\binom{k+1}{j}B_j\,n^{k-j+1},$$

を利用する。この公式では, 加算の範囲 j が 0 から $n-1$ であることに注意が必要である。この公式を使うと, k 次べき乗の交代級数は,

$$\hat{S}_k^-(2m-1)=S_k(2m)-2^{k+1}S_k(m),$$



(a) Second-order alternating series. (b) Third-order alternating series.

図 D.2: 交代級数の振動の中心

$$\hat{S}_k^-(2m) = S_k(2m) - 2^{k+1}S_k(m) - (2m)^k,$$

で計算できる。まず, 加算項が奇数個のときの交代級数を計算すると,

$$\begin{aligned}\hat{S}_k^-(2m-1) &= \frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k}\binom{k+1}{j}\left(2^{k-j+1}-2^{k+1}\right)B_j\,m^{k-j+1} \\ &= \frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k}\binom{k+1}{j}\left(1-2^{j}\right)B_j\cdot(2m)^{k-j+1},\end{aligned} \tag{D.3}$$

が得られる。それに対し, 加算項が偶数個のときの交代級数は,

$$\hat{S}_k^-(2m) = \frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k}\binom{k+1}{j}\left(1-2^{j}\right)B_j\cdot(2m)^{k-j+1} - (2m)^k, \tag{D.4}$$

となる。続いて, $\hat{S}_k^-(2m)$ と $\hat{S}_m^-(2m-1)$ から加算する項の数の偶奇依存を取り除き, 交代級数の上側包絡線と下側包絡線を導出しよう。計算が容易であるので下側包絡線から特定する。 下側包絡線は, (D.4) に $n=2m$ を代入すると,

$$\hat{S}_k^-(n_{=2m}) = \frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k}\binom{k+1}{j}\left(1-2^{j}\right)B_j\,n^{k-j+1} - n^k, \tag{D.5}$$

となる。上側包絡線は, 下側包絡線より多くの計算の手順を要する。上側包絡線は, (D.3) に $n=2m-1$ を代入することによって,

$$\hat{S}_k^-(n_{=2m-1}) = \frac{1}{k+1}\sum_{p=0}^{k}\binom{k+1}{p}\left(1-2^{p}\right)B_p\cdot(n+1)^{k-p+1}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{k+1}\sum_{p=0}^{k}\binom{k+1}{p}(1-2^p)\,B_p\sum_{j=0}^{k-p+1}\binom{k-p+1}{j}n^j \\
&= \frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k+1}\sum_{p=0}^{k-j+1}\binom{k+1}{p}\binom{k-p+1}{j}(1-2^p)\,B_p\,n^j - \frac{(1-2^{k+1})\,B_{k+1}}{k+1} \\
&= \frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k+1}\binom{k+1}{j}\sum_{p=0}^{k-j+1}\binom{k-j+1}{p}(1-2^p)\,B_p\,n^j - \frac{(1-2^{k+1})\,B_{k+1}}{k+1} \\
&= \frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k+1}\binom{k+1}{j}\sum_{p=0}^{j}\binom{j}{p}(1-2^p)\,B_p\,n^{k-j+1} - \frac{(1-2^{k+1})\,B_{k+1}}{k+1},
\end{aligned} \tag{D.6}
$$

のように導出される。この数式変形は技巧的である。まず, 第 2 行目への変形は $(n+1)^{k-p+1}$ の 2 項展開を適用した。第 3 行目への変形では, 添え字 p と j の総和の順序を交換した。ただし, 式に記述した総和記号のように計算すると, $[p,j]=[k+1,0]$ が余分に加算されるので, 最終項でその余分を差し引いている。さらに, 第 4 行目への変形では, 二項係数の公式 $\binom{a}{b}\binom{a-b}{c}=\binom{a}{c}\binom{a-c}{b}$ を用いた。続いて,

$$
\sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}(1-2^p)\,B_p = -(1-2^k)\,B_k \quad (k\geq 2), \tag{D.7}
$$

なる関係[‡]に注意すれば, (D.6) の右辺は,

$$
\begin{aligned}
\hat{S}_k^-(n_{=2m-1}) = \frac{1}{2}n^k - \frac{1}{k+1}\sum_{j=2}^{k}\binom{k+1}{j}(1-2^j)\,B_j\,n^{k-j+1}& \\
- \frac{2\,(1-2^{k+1})\,B_{k+1}}{k+1}&,
\end{aligned} \tag{D.8}
$$

のように変形できる。この数式変形で総和の範囲が変わっているように見えるのは, 次の 3 つの理由による。第 1 に, $j=0$ のとき総和の結果が必ずゼロになるので数式から除外した。第 2 に, $j=1$ が関係式 (D.7) の適用範囲外なので, 対応する項を総和記号の外に出した。最後に, $j=k+1$ のとき, 関係式 (D.7) は成立するが, 定数項となるので総和記号の外に書いた定数項に加算した。同じように, $n=2m$ の場合の数式も同様に書き直すと,

$$
\hat{S}_k^-(n_{=2m}) = -\frac{1}{2}n^k + \frac{1}{k+1}\sum_{j=2}^{k}\binom{k+1}{j}(1-2^j)\,B_j\,n^{k-j+1}, \tag{D.9}
$$

のようになる。先ほどの例のように, 上側包絡線 $S_k^-(n_{=2m+1})$ と下側包絡線 $S_k^-(n_{=2m})$ の平均値を計算し, 交代級数の振動の中心が得られる。導出された振動の中心をイータ関数の値として統合で結ぶと,

$$
\eta(-k) = -\frac{(1-2^{k+1})\,B_{k+1}}{k+1} \tag{D.10}
$$

[‡]ベルヌーイ多項式 $B_k(x)$ に関する性質: $S_k(1/2)=2^{-k}-1$ を利用すれば証明できる。

が得られる。この式からイータ関数の値は,

$$\eta(-1) = \frac{1}{4}, \quad \eta(-3) = -\frac{1}{8}, \quad \eta(-5) = \frac{1}{4}, \quad \dots$$

のように計算され, しかも, 負の偶数変数によるイータ関数がゼロになることは, 交代級数を正則関数に解析接続して得られた結果と合致するのである。さらに, 上に書いたようにイータ関数は $\eta(-k) = (1-2^{k+1})\,\zeta(-k)$ にてゼータ関数と関係づけられている。この関係に注目し, 負の整数変数によるゼータ関数を求めると,

$$\zeta(-k) = -\frac{B_{k+1}}{k+1},$$

が得られる。この結果は, 交代級数の形ではなく, ゼータ関数を複素数全体を定義域にできるように解析接続した結果と一致する。