

第3章 弾性体の静的変形

本章では、連続体の中でも弾性体の変形を取り扱う。弾性体の変形を解析するには、応力が重要である。例えば、弾性体の左端に力を印加させたとき、弾性体の全体にわたって曲線的に変形する。全体にわたって変形するのは、左端に印加された力を起点に応力が弾性体全体に連なるためだ。その応力の変化率が弾性体の変形を決めることになる。印加された力の向きや分布に応じて、応力が分布し、伸縮・曲げ・せん断などの変形差生じる。本章では、そのような変形について、応力をメカニズムとして解析する。

3.1 弾性体の変形

応力の作用がないときに一定の形状を保つ弾性体を考えよう。その弾性体はゼロの応力作用によって平衡状態を示すと考えてもよい。その弾性体に応力が作用すると歪みが生じ、歪みのもとで新たな平衡状態に落ち着く。そのときの歪みが変形である。その変形は弾性体に作用する応力に依存し一意的に決まるはずだ。

本節で取り扱う変形は、時間に依存しない変形、すなわち、静的変形である。それに対し、時間に依存する変形は動的変形と呼ばれる。

3.2 応力と歪み

等方性弾性体における基本的な変形を考察しよう。前章で導出したように、等方性弾性体では、変形テンソル E_{mn} が与えられたとき、

$$P_{mn} = \lambda E_{kk} \delta_{mn} + 2\mu E_{mn},$$

によって応力テンソルが決まる。この数式を変形テンソル E_{mn} について解くと、前章で導出したように、

$$E_{mn} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} P_{kk} \delta_{mn} + \frac{1}{2\mu} P_{mn},$$

となる。なお、この数式はアインシュタインの総和の規約が適用されている。これらの公式を基礎として基本的な変形を考察しよう。

伸縮歪み 単純な例として、弾性体が x_1 方向に伸縮する場合を考えよう。簡単のため、他の方向、すなわち、 x_2 方向と x_3 方向への伸縮はないとする。その状況は、 x_1 方向に有限の厚さをもち、 x_2x_3 平面上に無限に広がる弾性体のシートを考えればよい。その場合、変形を表すのは歪みテンソルの成分 E_{11} のみである。歪みテンソルのほかの成分はすべてゼロである。公式を適用すると、弾性体に作用する応力は、

$$P_{11} = (\lambda + 2\mu) E_{11}, \quad P_{22} = P_{33} = \lambda E_{11}, \quad P_{mn} = 0 \quad (m \neq n), \quad (3.1)$$

となる。得られた数式によると、 x_1 方向の応力は E_{11} 、すなわち、 x_1 方向の歪み量に比例する。それは、いわゆるフックの法則 $F = kx$ に相当する。比例定数 $\lambda + 2\mu$ が大きい場合、その弾性体は固く、変形しにくいことを意味する。しかも、張力の作用で伸び、圧力の作用で縮むという経験則から $\lambda + 2\mu > 0$ でなければならない。

面白いことに、 P_{22} と P_{33} がゼロでない。それは、 x_1 方向に伸縮させるとき、 x_2 方向や x_3 方向の長さを一定に保つには、 x_2 方向や x_3 方向にも応力を作用させなければならないことを意味する。これを数式で書くと、

$$P_{22} = P_{33} = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} P_{11},$$

となる。我々の経験則から、 x_1 方向に伸ばそうとして張力を作用させると、 x_2 方向と x_3 方向に縮もうとするため、それらの方向の長さを一定に保つには、張力を与えなければならない。逆に、 x_1 方向に圧力を作用させると、 x_2 方向と x_3 にも圧力が必要となる。つまり、 $\lambda > 0$ であるはずだ。数学的に $\lambda > 0$ が導かれるわけではないが、それに反する物質は現在までに見つかっていない。

ずれ歪み 無限に広がる弾性体において、 x_2 座標に比例して x_1 方向に歪みがある場合を考えよう。つまり、歪みテンソル D_{12} のみが存在し、他の成分はすべてゼロである。歪みテンソル D_{mn} は対称テンソルではなく、ここで考えている状況では $D_{21} = 0$ であるとする。その設定から、対称テンソルである変形テンソルは $E_{12} = E_{21} = D_{12}/2$ となる。変形テンソルの他の成分はすべてゼロである。その変形テンソルの成分から、公式を用いてゼロでない応力テンソルの成分を特定すると、

$$P_{12} = P_{21} = 2\mu E_{12} = \mu D_{12},$$

が得られる。この数式から、比例係数 μ はずれ歪みの発生しやすさを表すことがわかる。同一ずれ歪み D_{12} を起こすにしても、 μ が小さければ、小さな接線応力で十分であるのだ。逆にずれ歪みの起こしにくさは剛性と呼ばれる。そのため、 μ は**剛性率**と呼ばれる。さらに、この考察から $\mu > 0$ でなければならないことがわかる。

体積歪み 無限に広がる連続体の中の直方体に静水圧が作用している状態を考えよう。つまり、直方体には $P_{11} = P_{22} = P_{33} = -p$ のみが作用している。ここで、 $p > 0$ ならば圧力、 $p < 0$ ならば張力が直方体に作用していることになる。応力テンソルと歪みテンソルの関係式から、

$$E_{11} = E_{22} = E_{33} = -\frac{p}{3\lambda + 2\mu},$$

が得られる。つまり、静水圧による変形は等方的である。さらに、圧力によって連続体は圧縮されるべきであるので、 $p > 0$ ならば $E_{11} < 0$ となることが条件となる。したがって、ラメの係数は $3\lambda + 2\mu > 0$ でなければならない。

体積ひずみは変形テンソル E_{mn} のトレースで与えられる。この例における体積ひずみは、

$$E_{kk} = E_{11} + E_{22} + E_{33} = -\frac{p}{\lambda + 2\mu/3},$$

となるわけだ。ここで、

$$k = \lambda + \frac{2\mu}{3}, \quad (3.2)$$

なる体積弾性率を定義すると、変形テンソルと圧力/張力の間には、

$$p = -kE_{mn}$$

なる簡単な関係が成立する。また、体積弾性率の逆数 $1/k$ は圧縮率と呼ばれる。フックの法則 $F = kx$ と比較すると、変形テンソルは単位体積当たりのばね定数であると考えられる。

3.3 棒の伸縮変形

有限の長さもった棒の一端を固定し、もう一方の端に圧力、または、張力 F を作用させた場合を考えよう。棒の断面積を S としたとき、棒の端には F/S の様な法線応力が作用する。この例に関し、棒の長さ方向に x_1 座標を設定すると、応力テンソルは $P_{11} = F/S$ がゼロでない成分であり、他の成分はすべてゼロである。応力と歪みの関係から、

$$\begin{aligned} E_{11} &= \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} P_{11}, \\ E_{22} = E_{33} &= -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} P_{11}, \\ E_{mn} &= 0 \quad (m \neq n), \end{aligned} \quad (3.3)$$

が得られる。これらの数式は、 x_1 方向に作用する応力によって、棒が x_1 方向だけでなく x_2 方向と x_3 方向にも変形することを意味する。既に述べたように、 $\mu > 0$ と $3\lambda + 2\mu > 0$ な

ので、正の張力が作用されると、棒は x_1 方向に伸び、 x_2 方向と x_3 方向に縮むのだ。これは、ゴム製の棒を引っ張ったときに目にする現象と合致している。

物質の伸縮は弾性体において観測される基本現象であるので、ラメの弾性定数を用いる代わりに、伸縮に関して定義された弾性率を用いることが多い。伸縮に関する弾性率は、

$$Y = \frac{P_{11}}{E_{11}} = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad (3.4)$$

のように定義される。その定義された定数は、導入した人物の名前から**ヤング率**と呼ばれる。いうまでもなく、ヤング率は物質固有の定数である。ヤング率を用いると、単位長さの弾性体に作用する張力 P_{11} とその伸び E_{11} は、

$$P_{11} = Y E_{11}, \quad (3.5)$$

なる関係で記述できる。変形テンソルが無次元なので、ヤング率は応力と同一の次元をもつ量である。例えば、MKSA 単位系ならば、ヤング率を表す単位は Pa (もしくは N/m^2) である。

長さとは垂直方向 x_2 と x_3 についても同様に考察できる。ラメの弾性定数が $\lambda > 0$ と $\mu > 0$ であると考え、棒を引っ張って伸ばすと棒は細くなり、棒を圧縮すると棒は太くなる。もし、 λ が負であれば、引っ張られた棒が太くなるという理解しがたい現象を意味することになる。数学的に証明されないが、そのような理由で $\lambda > 0$ に違いないのだ。棒の太さ方向の変形に関して、

$$E_{22} = E_{33} = -\sigma E_{11} = -\frac{\sigma}{Y} P_{11},$$

のような記述を考えよう。新たな係数 σ は**ポアソン比**と呼ばれ、

$$\sigma = -\frac{E_{22}}{E_{11}} = -\frac{E_{33}}{E_{11}} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}, \quad (3.6)$$

のように定義される。ポアソン比は、物体を伸縮させる張力が作用したときの、長さ方向の変形に対する太さ方向の変形の比率である。その比率も物質固有の定数である。

ヤング率 Y とポアソン比 σ がわかれば、ラメの弾性定数 λ と μ が特定できる。上で定義した (3.4) と (3.6) を λ と μ について解き、さらに、(3.2) を用いて体積弾性率 k を特定すれば、

$$\lambda = \frac{Y\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}, \quad \mu = \frac{Y}{2(1+\sigma)}, \quad k = \frac{Y}{3(1-2\sigma)}, \quad (3.7)$$

が得られる。つまり、棒状に成型した物質の長さ方向に接線応力を作用させ、長さど太さの変化を測定すれば、物質固有のこれら定数を決定できるのだ。ここで、 $Y > 0$ 、 $\mu > 0$ 、 $k > 0$ を利用してポアソン比 σ の有効範囲を考察すると、 $-1 < \sigma < 1/2$ が得られる。つまり、不思議なことに $\sigma < 0$ 、さらに、 $\lambda < 0$ である可能性を否定できないのだ。

本節での考察は、伸びと縮みを同様に取り扱ったが、実際の物質ではそうならない。縮の場合、棒が直線を保てず、横方向に張り出した曲線状になることがある。棒がある程度細長い、または、作用する圧力が大きい場合、直線的な形状が外力に対して不安定となるため直線状を保てないのだ。そのような変形は**座屈**と呼ばれる。

本節での考察で、特定方向の歪み E_{11} を与えたとき、それとは垂直方向に応力 P_{22} と P_{33} が発生するという奇妙な現象が導かれた。その奇妙な現象は、物質を構成する分子間力が原因である。特定方向に物質を引っ張ると、構成分子の間隔が広がる。分子間力に引かれ、隣接分子が空いた場所に移動しようとする。隣接分子が移動してくると垂直方向の変形が生じてしまうので、それを阻止するには、分子間力による引力と釣り合うだけの応力を印加しなければならない。それが、垂直方向に発生する応力の正体である。逆に、圧力を加えて圧縮する場合も同様に、分子間力が垂直方向の応力に関係する。本節で示した数式は、分子間力を意識して構成されたわけではないが、結果的に、分子間力を起因とする歪みの現象を説明することができる簡易的な数学モデルになっている。

3.4 片もち梁の変形

垂直に立った壁上に、長さ L の棒が水平方向に固定した場合を考えよう。その棒は、水平方向を向くように壁に固定されている。そのように固定された水平方向の棒は**片もち梁**と呼ばれる。片もち梁は、固定点以外の場所に左右する力によって曲がる。そのような変形は**曲げ**と呼ばれる。有限の太さをもつ棒の曲げは、棒の断面の中心を連ねた**中立線**の変形を取り扱うことによって解析される。後に示すように、中心線は棒の断面の重心を取るのが適当である。

3.4.1 集中荷重による変形

片もち梁の自由端に、鉛直下方に力 N が作用する場合を考えよう。ここでは、棒が無重力状態に固定されている、もしくは、棒に作用する重力が無視できるとの仮定で問題を取り扱う。棒の固定端が座標の原点であり、棒の長さ方向が x 軸に、高さ方向が z 軸になるように座標軸が設定されている。つまり、 $x = L$ の点に外力 N が下方に作用している。そのとき、図 3.1 のように梁は変形する。その変形した形状を解析しよう。

任意の位置 x での棒の断面には、断面に対して法線方向と接線方向に力が作用している。法線方向の力は、棒が曲がることによって発生する伸縮に起因する。法線方向に作用する力は後に説明する。接線方向に作用する力は、この例において、場所によらず大きさが N となる。その理由は次のとおりである。棒の自由端を含む微小区間を考えた場合、自由端

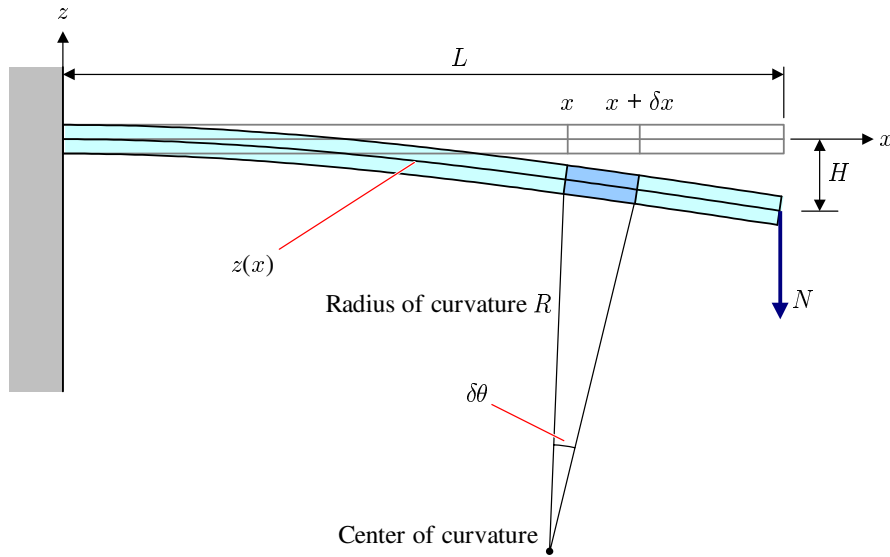


図 3.1: 集中荷重による片もち梁の変形

には応力が作用しないが、自由端で下方に作用する外力 N と釣り合うため、微小区間の左断面には、上方に向かう接線応力 N が発生する。その左隣に接する微小区間区間では、右断面に作用反作用の法則で下方に向かう接線応力が発生する。その断面全体で応力を積分した合力は下向きに N となるはずだ。隣り合う微小区間で、断面に対する接線が右から左へ棒全体に伝搬し、任意の断面で接線方向に力 N が上向きと下向きに作用することになるのだ。

法線方向に作用する力は、棒の曲げに起因する。棒の中立線の y 座標を x の関数 $z(x)$ で表現しよう。曲げによる棒の変形を解析するには、 $z(x)$ の曲率による棒の伸縮を取り扱う。解析学によると、曲線 $z(x)$ の曲率は、

$$\kappa = -\frac{1}{[1 + (dz/dx)^2]^{3/2}} \frac{d^2z}{dx^2},$$

によって与えられる。ここで、曲率に負符号を付したのは、上に凸の形状で曲率を正にするためである。曲げの量が十分に小さければ、 $(dz/dx)^2 \ll 1$ と考えられるので、近似的に $\kappa \simeq -d^2z/dx^2$ が成立する。したがって、棒の中立線は、

$$R = \frac{1}{\kappa} = -\frac{1}{d^2z/dx^2},$$

なる曲率半径を示す。中立線を基準にしたとき、曲率の外側が伸長し、内側が収縮する。ここで、座標 x と $x + \delta x$ で挟まれた微小区間について考える。棒の曲率半径を R とし、曲率の中心から微小区間を見込んだ角度を $\delta\theta$ とすれば、 $\delta x = R\delta\theta$ が成立する。棒の中心線から外側に r だけ離れた位置では、この微小区間の長さは $(R + r)\delta\theta$ となっているはずで

ある。この長さは中立線における長さとは異なるので、伸長/収縮が発生しているはずだ。中立線における長さとの差は、

$$(R + r) \delta\theta - R\delta\theta = r\delta\theta = \frac{r}{R}\delta x$$

となる。つまり、長さ δx の微小区間が曲げによって $r\delta x/R$ だけ長さが変化するので、

$$E(r) = \frac{r}{R}, \quad (3.8)$$

だけ変形率が発生している。この変形率は、正では伸長を、負では短縮を意味する。このように伸縮に関する変形率が、 r の関数になっているので、図 3.2 に示すように、棒の中に r を微小に変化させた薄い層を積み重ねた状態を考えるとよい。それらの層ごとに、変形率が少しずつ異なるのだ。各層の伸縮率によって、作用する応力が異なる。位置 r にお

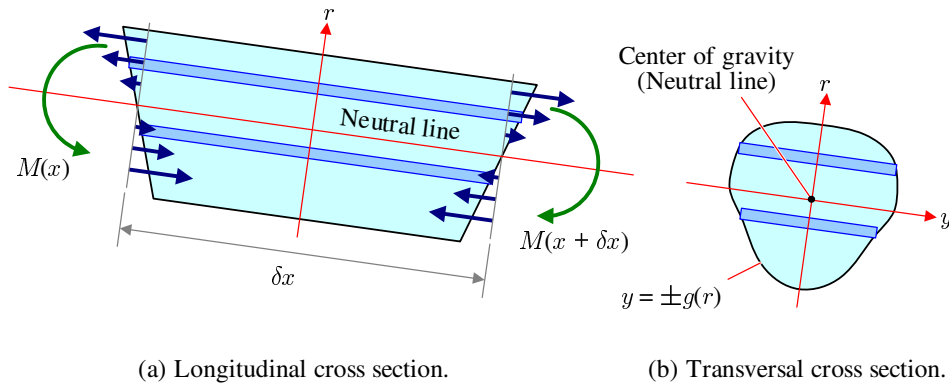


図 3.2: 微小区間の変形に関する応力のイメージ

る層に作用する応力を $P_{11} \equiv P(r)$, 発生する変形を $E_{11} = E(r)$ とすると、

$$P(r) = YE(r) = \frac{Yr}{R},$$

のように関係づけられる。ここで、 Y は棒のヤング率である。この応力を棒の断面全体で積分すれば、断面に作用する力が得られる。ここで、棒の断面が z 軸 (r 軸) に対して対称であり、 $y = \pm g(r)$ で与えられるとしよう。そのとき、棒の断面に作用する長さ方向の力は、

$$F = 2 \int_{r_1}^{r_2} g(r) P(r) dr = \frac{2Y}{R} \int_{r_1}^{r_2} rg(r) dr,$$

で計算できる。ここで、棒は z 座標にして $[z(x) + r_1, z(x) + r_2]$ の範囲に断面が分布していると仮定した。棒の断面に作用する応力の合力として、長さ方向に力が作用しないのであれば、上の式はゼロであるべきなので、

$$\int_{r_1}^{r_2} rg(r) dr = 0, \quad (3.9)$$

が成立するはずだ。この数式から、図3.2 (b) に描くように、中立線が棒の断面の重心を通ることがわかる。言い換えると、異なる位置での断面にわたって、断面の重心を通過する曲線が、棒の中立線である。

既に述べたように、 r に依存して棒の微小部分に対して伸縮を引き起こすことから、棒の断面に作用する応力は r に依存して変化する。場所によって応力が異なるため、棒を曲げるモーメントが発生するのだ。応力によって原点まわりに発生するモーメント¹は、

$$\begin{aligned} M &= -2 \int_{r_1}^{r_2} (z(x) + r) g(r) P(r) dr \\ &= -\frac{2Y}{R} \left(z(x) \int_{r_1}^{r_2} r g(r) dr + \int_{r_1}^{r_2} r^2 g(r) dr \right) \\ &= -\frac{2Y}{R} \int_{r_1}^{r_2} r^2 g(r) dr = -\frac{YI}{R}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

のように計算される。第2行目から第3行目の数式変形において、第1項が消去されたのは(3.9)を適用したからだ。さらに、新たに導入した記号 I は、

$$I \equiv \int_{r_1}^{r_2} r^2 g(r) dr, \quad (3.11)$$

のように定義される。記号 I は、境界線を $g(r)$ で与えられる断面における中立線まわりの慣性モーメントである。計算されたモーメント M は、曲率半径 R の依存性を含む。曲率半径 R が x によって異なるため、モーメント M は x の関数である。具体的に記述すると、

$$M(x) = YI \frac{d^2 z}{dx^2}, \quad (3.12)$$

となる。なお、ヤング率と断面の慣性モーメントの積 YI は**曲げ剛性率**と呼ばれる。

先端に作用する力 N によって、棒が変形するため、棒の微小区間には棒を変形させるためのモーメントが作用している。微小区間 $[x, x + \delta x]$ について、棒を変形させるモーメントの釣り合いを方程式として記述しよう。モーメントの記述は、原点を中心とした立場で実行してみよう。微小区間の一端 x には垂直上方に N の力が、もう一端には垂直下方に N の力が作用している。棒の曲げが十分に小さければ、その力によって作用する原点中心のモーメントは、

$$Nx - N(x + \delta x) = -N\delta x,$$

である。このモーメントが、微小区間を変形させるために使われると考えよう。すでに計算したように、棒が変形すれば、微小区間の左断面 x からモーメント $-M(x)$ が、右断面 $x + \delta x$ から $M(x + \delta x)$ が作用する。つまり、モーメントの釣り合いは、

$$-M(x) + M(x + \delta x) - N\delta x = 0,$$

¹位置 \mathbf{r} における力 \mathbf{F} に関するモーメントの定義 $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ に基づき、 xz 平面内における xz 平面上の力ではモーメントは、 y 成分しかもたない。よって、ここではモーメントの定義にしたがって計算されたベクトルの y 成分を表示する。

なる数式で記述できる。この方程式は、 $\delta x \rightarrow 0$ の極限で、

$$\frac{dM}{dx} = N, \quad (3.13)$$

なる微分方程式に書き換えられる。モーメント $M(x)$ が (3.12) であることに注意すると、

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{N}{YI}, \quad (3.14)$$

が導かれる。この方程式を1回だけ積分すると、

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{N}{YI}(x - L),$$

が得られる。ここで、 $x = L$ で $d^2z/dx^2 = 0$ となるように積分定数を選んだ。そのように選んだ理由は、棒の自由端である $x = L$ では法線応力がゼロであるので、中立線の曲率がゼロになるはずだからである。さらに積分すると、

$$\frac{dz}{dx} = \frac{N}{2YI}x^2 - \frac{NL}{YI}x,$$

が得られる。今度は、棒の固定条件として、 $x = 0$ で $dz/dx = 0$ となるように積分定数を選んだ。この数式をさらに積分すると、

$$z = -\frac{NL^3}{2YI} \cdot \frac{x^2}{L^2} \left(1 - \frac{x}{3L}\right), \quad (3.15)$$

となる。この積分では、 $x = 0$ で $z = 0$ となるように積分定数を選んだ。得られた数式によると、棒の曲げが小さければ、変形した棒の中立線は近似的に3次曲線を描くことになる。棒の先端の湾曲量 H は、

$$H = \frac{NL^3}{3YI}, \quad (3.16)$$

で与えられる。この結果から、湾曲量が棒のヤング率と断面の慣性モーメントに反比例することがわかる。曲げ剛性率 YI に反比例する、と言い換えてもよい。また、先端に印加した力に比例して湾曲することもわかる。さらに、湾曲量は棒の長さの3乗に比例する。棒の長さが2倍になれば、同じ力が作用すると、変形した棒の先端は8倍も下がるということだ。

棒の湾曲量が剛性率 YI に反比例する事実は、構造設計において重要である。棒の断面形状によって湾曲量が異なるからだ。例えば、高さ方向に a 、奥行方向に b の長方形断面をもつ棒を想定した場合、(3.11) によって計算すると、

$$I = \frac{a^3b}{12},$$

が得られる。この計算結果によると、幅 b を広くとるよりも、高さ a を大きくする方が変形を小さくできる。一定の体積で実現するなら、 ab を一定に保ち、 b に比べ a を大きくと

れば変形を小さくできる。しかし、実際、 b を薄くすると垂直方向からの力で曲がりやすくなるため、捩れ変形を起こしやすくなる。そのような理由で、実際の建築で利用される梁は、変形の方に厚いだけでなく、その垂直方向にもある程度の厚さをもつように、I字型やH字型の断面をもっている。

てこに作用する力 片もち梁の応用として、てこの歪みを解析することができる。図 3.3 に示すように、てこの長さを $L_A + L_B$ とする。支点 O から左に L_A だけ隔てた位置に、鉛直下方に力 F_A を作用させる。同様に、支点 O から右に L_B だけ隔てた位置に、鉛直下方に

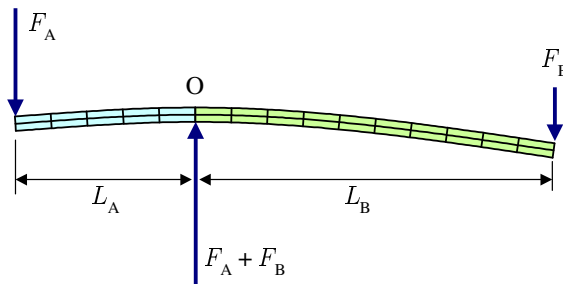


図 3.3: 釣り合った状態のてこの変形

力 F_B を作用させる。このとき、図 3.3 に描いたてこは釣り合っているとす。釣り合った状態においては、支点 O より左側と右側は、ともに、片もち梁として扱ってもよい。簡単のため、左側を梁 A、右側を梁 B と呼ぼう。釣り合いの状態において、梁 A にとって、梁 B は壁面の役割を果たす。逆に、梁 B にとって、梁 A は壁面の役割を果たす。

片もち梁の変形は、既に導出されたように、数式 (3.15) によってその湾曲の具合が表現されている。その数式に、この例におけるてこの長さとお荷重を代入すると、

$$z = \begin{cases} -\frac{F_A L_A}{2YI} x^2 \left(1 + \frac{x}{3L_A}\right) & \text{if } x \leq 0, \\ -\frac{F_B L_B}{2YI} x^2 \left(1 - \frac{x}{3L_B}\right) & \text{if } x > 0, \end{cases}$$

が得られる。ここで、 $x \leq 0$ は左側の片もち梁、 $x > 0$ は右側の片もち梁に対応する。ここで、中立線から r だけ離れた梁の内部における応力が、

$$P(r) = -Yr \frac{d^2z}{dx^2},$$

であることに注意すると、 $x = 0$ における応力は、

$$P_A(r) = \frac{F_A L_A}{I} r, \quad P_B(r) = \frac{F_B L_B}{I} r,$$

となる。ここで、 $P_A(r)$ と $P_B(r)$ は、それぞれ、支点Oより左側と右側の片もち梁に作用する応力である。任意の位置 r において、これらの応力が釣り合うには、

$$F_A L_A = F_B L_B,$$

でなければならない。これがてこの原理である。つまり、支点からの距離が大きくなると小さな力で釣り合いをとることができるのだ。得られた数式からわかるように、てこの原理はモーメントの釣り合いで説明できる。実際、てこの現象としては、力点に力を作用させることで棒が変形し、応力が発生する。応力は棒を伝搬し、支点Oでは、支点から見たモーメントに比例する応力が作用している。支点の両側から伝搬してきた応力が釣り合った状況がてこの動作状態というわけだ。

図3.3において、支点Oには $F_A + F_B$ の力が上向きに作用する。その事実は次のように説明できる。支点Oより左側の梁に着目し、梁を x 軸方向に多数の微小区間に分割したとする。最も左の微小区間の左端に力 F_A が下向きに作用している。釣り合いを考えると、その微小区間の右端には力 F_A が上向きに作用するはずだ。その場合、作用反作用の法則で、右隣の微小区間の左端には力 F_A が下向きに作用する。その理屈で、微小区間をまたいで力 F_A が伝搬し、支点Oで力 F_A が上向きに作用することになる。支点Oより右側の梁についても同様の考察で、最終的に、支点Oで力 F_B が上向きに作用することが導かれる。それらの結果として、支点Oでは $F_A + F_B$ の力が上向きに作用するのだ。

てこは図3.4に示すように、第1種 (first class) と第2種 (second class) のてこに分類される。これらのてこは、ともに、図3.3で説明した応力の釣り合いを利用して力を増強する。第1種てこ (図3.4 (a)) は支点 (fulcrum) が力点 (effort) と作用点 (resistance) の間に

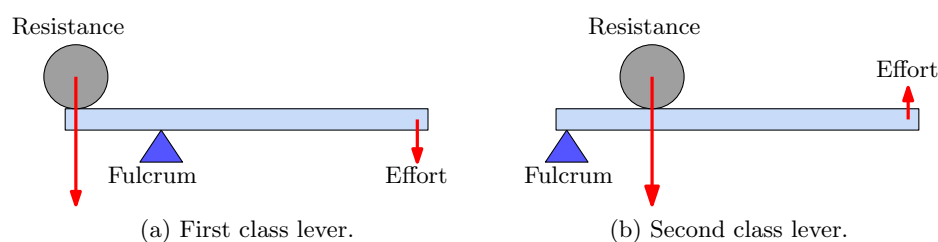


図 3.4: てこの種類

ある。この機構はバールや、自動車の変速機のシフトレバーに応用されている。第2種てこ (図3.4 (b)) は作用点が支点と力点の間にある。この機構は、栓抜きや、自動車のブレーキペダルに応用されている。

3.4.2 均等荷重による変形

片もち梁として設置した棒は、通常、自らに作用する重力(重量)によって変形する。前項での手順を参考にすれば、自らの重量による変形を解析できる。この場合、棒の任意の断面に作用する接線方向の力が前項と異なる。その違いに注意すれば、解析は難しくない。

単位長さあたりの棒の質量を ρ としよう。任意位置の小区間 $[x, x + \delta x]$ に作用する接線方向の力を考えてみる。右端には下方に力 $N(x + \delta x)$ が作用している。同様に、左端には上方に力 $N(x)$ が作用しているとする。それだけでなく、微小区間が質量 $\rho \delta x$ をもつため、微小区間には下方に $\rho g \delta x$ の重力が作用しているはずだ。それらの力が釣り合っている状態では、

$$N(x) - N(x + \delta x) - \rho g \delta x = 0,$$

が成立するはずだ。この力の釣り合いは、 $\delta x \rightarrow 0$ の極限で、

$$\frac{dN}{dx} = -\rho g,$$

なる常微分方程式に書き換えられる。棒の自由端で応力がゼロになる条件で微分方程式を解くと、

$$N = \rho g (L - x), \quad (3.17)$$

が得られる。つまり、固定点に近づくほど、単位長さあたりで ρg ずつ接線方向に作用する力が増加するのだ。その結果を用いて、微小区間に作用する接線方向の力と重力による原点まわりのモーメントを計算すると、

$$\begin{aligned} xN(x) - (x + \delta x)N(x + \delta x) - \rho g x \delta x \\ &= -x(N(x + \delta x) - N(x)) + N(x + \delta x)\delta x - \rho g x \delta x \\ &= -x \frac{dN}{dx} \delta x + N(x)\delta x - \rho g x \delta x \\ &= \rho g x \delta x + N(x)\delta x - \rho g x \delta x \\ &= N(x)\delta x = \rho g (L - x)\delta x, \end{aligned}$$

が得られる。これが前項との違いである。

法線方向に作用する力は、棒の変形によって発生する応力に起因するので前項と同様である。したがって、本項の場合、棒の中立線を与える微分方程式(3.14)は、

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{\rho g}{YI} (L - x), \quad (3.18)$$

となる。いうまでもなく、右辺には先ほど考察した力 N の x 依存性が含まれている。微分方程式(3.18)の解は、

$$y(x) = -\frac{\rho g L^4}{24YI} \cdot \frac{x^2}{L^2} \left(6 - \frac{4x}{L} + \frac{x^2}{L^2} \right), \quad (3.19)$$

となる。棒の先端にのみ外力が作用する場合、棒の中立線が3次関数となっていたが、一様に重力が作用するモデルでは4次関数となる。なお、この解は、以下の考察によって積分定数が決定されている。

1. 棒の先端 $x = L$ では、接線応力がゼロになるので、棒を変形させない。つまり、 $x = L$ では中立線の曲率がゼロとなるため、 $d^2y/dx^2 = 0$ となる。
2. 棒の固定条件から、 $x = 0$ で $dy/dx = 0$ となる。
3. 棒の固定条件から、 $x = 0$ で $y = 0$ となる。

導出された数式によると、長さ L の棒を片もち梁として固定すると、棒が変形することによって先端部が、

$$H = \frac{\rho g}{8YI} L^4, \quad (3.20)$$

だけ下がるという計算になる。この計算結果は図 3.5 のような湾曲を表す。この図は、同じ材質で同じ断面の梁の変形を比較している。長さ L は 1.4 倍程度だが、湾曲量が L の 4

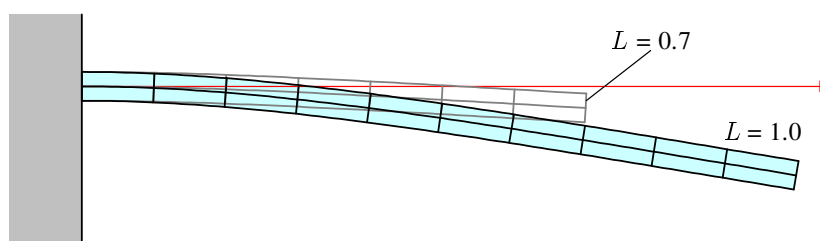


図 3.5: 均等荷重による梁の変形

乗に比例するので、先端部の湾曲量が 4 倍程度になっている。

均等荷重の梁において、湾曲が長さの 4 乗に比例することは構造設計において注意が必要な事実である。集中荷重モデルは、自らに作用する重力が無視できる場合に、局所的な外力による梁の変形を表していた。例えば、住宅のバルコニー設計においては、先端部に数名の人が乗った状況において、それらの人に作用する重力が外力となる。それに対し、均等荷重は、自らに作用する重力による梁の変形を表す。仮に、梁の密度 ρ が小さいなら、自らに作用する重力を無視して外力のみを考えて十分だとしても、梁の長さ L が大きくなると、もはや、自らに作用する重力を無視できなくなる。極端に L が大きくなると、バルコニー先端に乗った人による湾曲よりも、自らの重量による湾曲が支配的になることもある。

3.4.3 中央集中荷重による両もち梁の変形

既に確認したように、片もち梁における棒の変形は、固定点からの距離に対して、3次または4次の依存性で大きくなる。少なくとも、両端を固定点か支点にすれば変形に寄与する距離は半分になるので、変形の大きさを10分の1程度に抑えることができるだろう。そのように、両端を固定、もしくは、支持する構造は両もち梁と呼ばれる。本項では、特に、両もち梁の中央に集中荷重を与えたときの変形を調べよう。

両もち梁の代表的なモデルとして、図3.6に示すように、(a) 支持梁 (supported beam) と、(b) 固定梁 (fixed beam) が挙げられる。支持梁は、両端に梁を支える台座を有し、その台座の上で梁は向きを変えることが許容される。一方、固定梁は、両端でしっかりと向きも定められた状態で固定される。図3.6は、両もち梁における集中荷重の一例だ。梁の中央に、鉛直下方に向かって力 F を作用させた状況である。このように、中央に集中荷重を

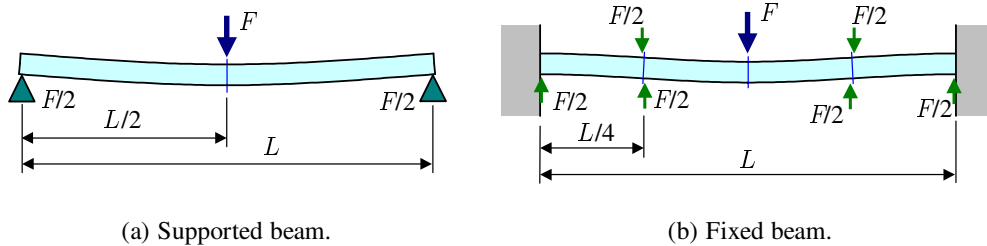


図 3.6: 両もち梁のモデル

与えたケースでは、対称性を利用して片もち梁の問題に帰着することができる。つまり、新たに方程式を導出せず、既に片もち梁の問題で導出した公式 (3.16) を用いて梁の湾曲量が算出できるということだ。以降の段落で、支持梁と固定梁のそれぞれについて、中央の湾曲量 $z(L/2)$ を計算しよう。

支持梁 図3.6 (a) から明らかなように、この梁は $x = L/2$ について左右対称である。中央に作用する力 F は、対称性ゆえに、左右で均等分配される。すなわち、左半分について、左端に集中荷重 $F/2$ が鉛直下方に作用するため、左端の台座では $F/2$ が鉛直上方に作用する。この様子は、片もち梁を上下反転した状態である。したがって、この梁の湾曲量は、(3.16) に $L \mapsto L/2$, $N \mapsto F/2$ の置き換えをすれば計算できる。その計算結果は、

$$z(L/2) = -\frac{FL^3}{48YT},$$

となる。つまり、支持梁によって両もち梁を構成すれば、湾曲量は片もち梁の16分の1まで小さくすることができるのだ。

固定梁 図 3.6 (b) に示すように、固定梁は両端の向きまで含めて固定している。梁の中央で鉛直下方に印加した力 F は、左側半分と右側半分で、 $F/2$ ずつに均等分配される。分配された力は応力として梁を伝搬し、左端では固定部 (壁面) から鉛直上方に $F/2$ の作用を受ける。右側半分も同様だ。ここで、左側半분을さらに、 $x = L/4$ で分割しよう。力の関係を見ると、 $x = L/4$ で対称性があることに気づくだろう。つまり、この梁は左から 4 分の 1 ($0 \leq x \leq L/4$) の区間で片もち梁と等価である。したがって、(3.16) に $L \mapsto L/4$ 、 $N \mapsto F/2$ の置き換えをすれば、計算すべき湾曲量の半分に相当する量が計算できる。その結果を 2 倍すれば、計算すべき $z(L/2)$ が算出できる。その計算結果は、

$$z(L/2) = -\frac{FL^3}{192YI},$$

となる。この湾曲量は、端点に集中荷重を作用させた片もち梁のわずか 64 分の 1 である。このように、両もち梁にすることで梁の変形をかなり小さくすることができる。建築において、バルコニーを大きく張り出す場合、張り出したバルコニーに脚を設けるのはこのような理由があるのだ。

3.4.4 均等荷重による両もち梁の変形

均等荷重の場合、中央に集中荷重を与えたときのような大胆な対称性は使えない。そのため、片もち梁の公式を使うわけにはいかないので、新たに公式を導出することにしよう。ただ、 $x = L/2$ について左右対称である対称性は使える。

左右対称であるので、両もち梁の左半分 ($0 \leq x \leq L/2$) に着目して公式を導出しよう。左右の台座、または、固定点 (壁面) で荷重を折半しているようなイメージを考えればよい。均等荷重の両もち梁では、基本となる微分方程式は (3.18) に基づき、

$$\frac{d^3z}{dx^3} = \frac{\rho g}{2YI}L - \frac{\rho g}{YI}x, \quad (3.21)$$

である。この微分方程式に、境界条件を適用し、積分定数を決定しながら積分を実行すると解が得られる。課すべき境界条件は、支持梁と固定梁では異なる。

支持梁 支持梁は両端が自由端であるので、 $x = 0$ で曲率がゼロである。そのため、 $x = 0$ で $d^2z/dx^2 = 0$ となるはずだ。さらに、 $x = L/2$ について左右対称であることから、 $x = L/2$ で $dz/dx = 0$ となるべきだ。それらの境界条件に考慮しながら、(3.21) を積分すると、

$$z(x) = -\frac{\rho g L^4}{24YI} \cdot \frac{x}{L} \left(1 - \frac{2x^2}{L^2} + \frac{x^3}{L^3} \right), \quad (3.22)$$

が得られる。なお、この数式を特定するうえで、 $z(0) = 0$ なる境界条件も付加した。この形態では、最下点の高さは、得られた数式に $x = L/2$ を代入し、

$$z(L/2) = -\frac{5\rho g L^4}{384YI},$$

であることがわかる。この変形量は片もち梁の約0.1倍である。

固定梁 固定梁ではさらに湾曲量が小さくなる。固定梁も同様に、微分方程式(3.21)から始まる。固定梁における境界条件は、 $x = 0, L/2$ で $dz/dx = 0$ となることである。さらに、 $z(0) = 0$ を境界条件として追加すると、梁の中立線の高さは、

$$z(x) = -\frac{\rho g L^4}{24YI} \cdot \frac{x^2}{L^2} \left(1 - \frac{2x}{L} + \frac{x^2}{L^2} \right), \quad (3.23)$$

となる。この形態では、最下点の高さは、得られた数式に $x = L/2$ を代入し、

$$z(L/2) = -\frac{\rho g L^4}{384YI},$$

であることがわかる。この変形量は片持ち梁の約0.02倍である。

3.5 棒の座屈

棒を伸ばす作用が安定であるのに対し、縮める作用は不安定である。安定であるとは、棒に作用させる力が攪乱によって軸からずれてしまった場合の振る舞いを意味する。その安定性は、図3.7の状況を考えるとわかりやすい。棒を伸縮させるには、棒の軸に沿った力を作用させることが重要である。図3.7は、作用させた力が棒の軸からずれた状況を描いている。軸からずれた力は、図に示すように、軸方向の成分と、それと直交する成分に分離

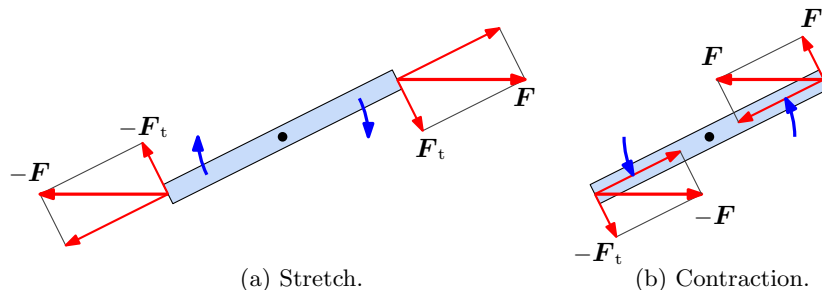


図 3.7: 軸からずれて棒を伸縮させる力

できる。軸方向の成分が望み通り棒を伸縮させるわけだが、それに対して、直交する成分は棒を回転させる。図3.7(a)のように、伸ばす過程において、力が軸からずれると、ずれ

を小さくするように棒が回転する。そのため、棒は安定して引き伸ばされる。一方、収縮する過程において力が軸からずれると、棒はそのずれを拡大する方向に回転する。その理由で縮める作用は不安定なのだ。

不安定性がゆえに、棒を収縮する際に垂直方向からの攪乱によって意図しない方向への変形が生じる。例えば、その収縮過程において、棒の先端が横に逸れる、または、棒の中央が湾曲するなどの変形が発生するわけだ。そのような変形は**座屈**と呼ばれる。

水平面に長さ L の棒を立て、棒と水平面の接合部を固定した場合を考えよう。棒は垂直に立つよう固定されるとする。棒の長さ方向に z 座標、その垂直方向に x 座標を設定しよう。棒の自由端には、力 F を鉛直下方に作用させる。その力によって棒は圧縮されるが、その圧縮は微小であるとする。理想的に鉛直方向に圧縮されるなら、棒はわずかに縮むだけである。外部からの攪乱によって力が棒の軸からずれると、図 3.8 に示すように、棒に曲げが発生する。ここで、外部からの攪乱によって棒が曲がり、自由端が H だけ横に動いた場合を想定する。そのとき、任意の位置 z と $z + \delta z$ に挟まれる小区間に作用する力の釣り

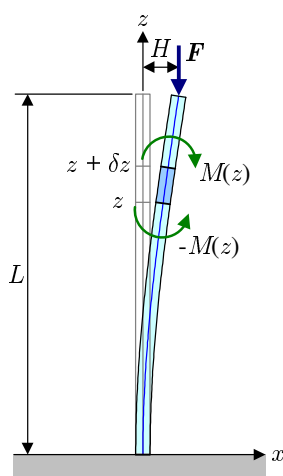


図 3.8: 棒の座屈

合いと、力のモーメントの釣り合いを考える。力に関しては、断面 z には z 軸方向に F が、断面 $z + \delta z$ には z 軸方向に $-F$ が作用している。モーメントに関しては、断面 z に作用する応力によるモーメント $-M(z)$ と断面 $z + \delta z$ に作用する応力によるモーメント $M(z)$ が存在する。さらに、力 F も棒の曲がりによってモーメント $F \cdot (x(z) - x(z + \delta z))$ を発生させる。したがって、微小区間のモーメントの釣り合いは、

$$-M(z) + M(z + \delta z) + F \cdot (x(z + \delta z) - x(z)) = 0,$$

のように記述できる。この方程式は、 $\delta z \rightarrow 0$ の極限で、

$$\frac{\partial M}{\partial z} + F \frac{\partial x}{\partial z} = 0, \quad (3.24)$$

なる微分方程式になる。力 F が z の関数でないので、この微分方程式は容易に積分でき、

$$M(z) + Fx(z) = c_1,$$

が得られる。ただし、 c_1 は積分定数である。自由端 $z = L$ で応力がゼロであることに注意すると、

$$c_1 = 0 + Fx(L) = FH,$$

のように積分定数が決定される。したがって、モーメントの釣り合いから導かれる関係は、

$$M(z) + F(x(z) - H) = 0,$$

となる。応力によるモーメント $M(z)$ は棒の曲げの問題と同様に、 $M(z) = YI \cdot d^2x/dz^2$ であるはずだから、

$$\frac{d^2x}{dz^2} + \frac{F}{YI} (x(z) - H) = 0, \quad (3.25)$$

と書くことができる。この方程式を解けば、棒の収縮時に外部攪乱があった場合の棒の形状 $x(z)$ が特定できるわけだ。

棒の形状を決定する微分方程式 (3.25) は2階の常微分方程式であり、その一般解は積分定数 c_2 と c_3 を用いて、

$$x(z) = H + c_2 \cos \sqrt{\frac{F}{YI}} z + c_3 \sin \sqrt{\frac{F}{YI}} z, \quad (3.26)$$

のように表される。この一般解に対して、 $x(0) = 0$ と $x(L) = H$ を境界条件として用いると、積分定数 c_2 と c_3 は、

$$c_2 = -H, \quad c_3 = H \cot \sqrt{\frac{F}{YI}} L,$$

のように決定される。したがって、

$$x(z) = H \left\{ 1 - \frac{\sin[\sqrt{F/YI}(L-z)]}{\sin(\sqrt{F/YI}L)} \right\}, \quad (3.27)$$

が得られる。実は、この時点で使っていない境界条件が一つある。それは、 $z = 0$ で棒が鉛直上方を向くように固定されていること、すなわち、 $dx/dz = 0$ となることである。それを要求すると、

$$\cos \sqrt{\frac{F}{YI}} L \equiv \cos \sqrt{T} = 0, \quad (3.28)$$

でなければならない。ただし、新たな記号 T は、

$$T \equiv \frac{FL^2}{YI},$$

のように定義される。境界条件 (3.28) を満たす T は,

$$T = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots), \quad (3.29)$$

のように複数存在する。そのうちの最小値:

$$T_c = \frac{\pi^2}{4}, \quad (3.30)$$

は**臨界値**と呼ばれる。この臨界値に対応する荷重は**座屈荷重**と呼ばれ、 $T = \pi^2/4$ となる荷重として,

$$F_c = \frac{\pi^2 Y I}{4L^2}, \quad (3.31)$$

が特定できる。棒の鉛直上方から作用させる荷重が座屈荷重を超えると座屈が発生する。座屈荷重は、 YI に比例していることから、変形しづらい材質ほど大きな値となる。逆に、長さの自乗に反比例するので、材質や形状が同じであっても、棒が長くなると小さな荷重で座屈するのだ。

座屈は次のように解釈すればよい。棒を長さ方向に圧縮するとき、加える力 F が小さく座屈荷重に満たない場合、直線形状が唯一の安定状態である。しかし、座屈荷重を超えると、湾曲した状態でさえ安定状態になり得るのだ。そうなると、外部攪乱によって垂直方向の作用が混合すると、順次に湾曲した状態に遷移するというわけだ。

3.6 しなやかな棒の変形

これまで変形量が非常に小さい場合を扱った。ここでは、しなやかに変形するような細い弾性体の棒を大きく曲げた状態を解析しよう。本節で取り扱う、細い材質がしなやかに曲がって描く形状はエラスチカ (elastica) と呼ばれる。本節では、ピアノ線のように大きく曲がる棒を定式化し、これまでに取り扱った近似との対応関係を調べる。具体的には、鉛直方向に立てた棒の変形、および、水平方向に指示する片もち梁を解析する。

3.6.1 数学的設定

しなやかに変形する弾力がある細い棒を、水平方向に片もち梁の形で渡した場合を考えよう。棒の自由端に鉛直下方に向かう力 F を印加する。図 3.9 のように、変形した棒の長さに沿って座標 s を設定し、任意の地点 s において、針が水平方向から角度 ϕ だけ傾いているとする。当然、 ϕ は s の関数である。さらに、水平方向に座標 x 、鉛直下方に向かって座標 z を設定する。その設定のもと、傾き ϕ は、

$$\frac{dx}{ds} = \cos \phi, \quad \frac{dz}{ds} = \sin \phi, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{dx}{ds} \frac{ds}{dz} = \tan \phi, \quad (3.32)$$

のように表現できる。なお、傾き ϕ は x 軸から時計回りにとった角度である。ここで、棒の曲率 κ は、

$$\kappa = \frac{1}{R} = \frac{d\phi}{ds}, \quad (3.33)$$

である。ここで、 R は曲率半径である。ここで、(3.32) の第3式に注意すると、

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\arctan \frac{dz}{dx} \right) = \frac{1}{1 + (dz/dx)^2} \frac{d^2z}{dx^2}.$$

が得られる。一方、(3.32) の第1式は、

$$\frac{dx}{ds} = \cos \phi = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \phi}} = \left[1 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 \right]^{-1/2},$$

となる。これらの式を組み合わせると、曲率 κ は、

$$\kappa = \frac{d\phi}{ds} = \frac{d\phi}{dz} \frac{dz}{ds} = \frac{1}{[1 + (dz/dx)^2]^{3/2}} \frac{d^2z}{dx^2}, \quad (3.34)$$

のように計算できる。変形が十分に小さく、 $dz/dx \ll 1$ をみなせる場合、曲率は $\kappa \simeq d^2z/dx^2$ のように近似できる。その近似が成り立つのは、これまでに議論してきた小さな変形に相当する。

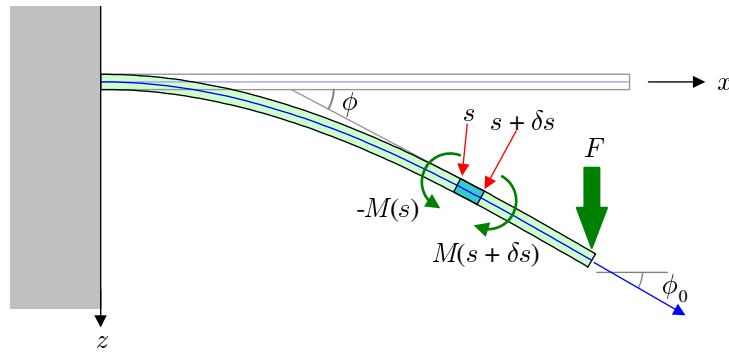


図 3.9: 先端に印加する力によってしなやかに変形する棒

本節では、 dz/dx が無視できないような大きな変形を取り扱う。長さ座標 s における微小長さ δs の微小区間において、図に示すように、微小区間の根元に近い端には応力のモーメント $-M(s)$ が、もう一方の端には応力モーメント $M(s + \delta s)$ が発生している。なお、(3.10) によると、応力のモーメントは、

$$M(s) = YI \frac{d\phi}{ds}, \quad (3.35)$$

である。これが変形する棒にかかる厳密な応力のモーメントだ。ここで、応力のモーメント $M(s)$ が弾性限界を超えないようにことを仮定する。すなわち、 YI が、さらに正確には、

棒断面の慣性モーメント I が十分に小さいことを想定する。例えば、その棒がピアノ線のように細くて弾力性に富む材質であるとする。

この流れで図 3.9 を示すような片もち梁を分析したいところだが、次項で座屈を分析した後に取り扱うことにする。座屈の方が数学的な解析が簡単だからである。座屈の解析結果を利用して、後に、図 3.9 にしめす片もち梁を解析することにする。

3.6.2 しなやかな棒の座屈

弾力性に富む細い棒を鉛直方向に立て、鉛直下方に向かう力を棒の上端に作用させたときの座屈を取り扱おう。解析にあたり、図 3.10 に示すように、棒の長さ方向に座標 s をとり、水平方向に座標 x 、鉛直上方に座標 z をとる。棒の長さ方向に関し、任意の位置 s における微小長さ δs における応力のモーメントのつり合いを考える。なお、座標 s において、棒は鉛直方向から角度 ϕ だけ傾斜するように変形しているとする。当然、傾き ϕ は s の関

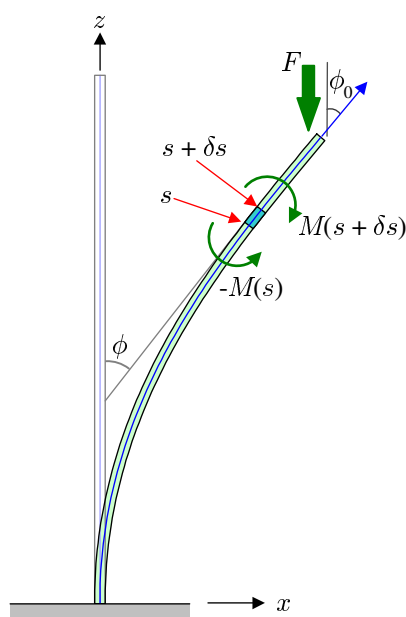


図 3.10: しなやかな細い棒の座屈

数である。考察する微小長さの両端を s と $s + \delta s$ とすれば、 $s + \delta s$ には正の力モーメント作用し、 s には負の力のモーメントが作用している。また、その場所において角度 ϕ だけ棒が傾いているので、力のモーメントのつり合いは、

$$-M(s) + M(s + \delta s) + F \delta s \cdot \sin \phi = 0,$$

となる。ここで、 $\delta s \rightarrow 0$ の極限をとると、その力のモーメントのつり合いは、

$$\frac{dM(s)}{ds} + F \sin \phi = 0, \quad (3.36)$$

なる微分方程式に書き換えられる。ここで、(3.35)を参考にすると、 $M(s) = YI d\phi/ds$ と考えられるので、微分方程式は、

$$\frac{d^2\phi}{ds^2} + \frac{F}{YI} \sin \phi = 0, \quad (3.37)$$

のように書き換えられる。

微分方程式(3.37)は、一般振り子と同一形の方程式であり、初等数学の範囲では解くことができない。ここでは、本書の付録Aで紹介する楕円関数を導入して方程式を解いていこう。両辺に $d\phi/ds$ を乗じて積分すると、その方程式は、

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{ds} \right)^2 = \frac{F}{YI} (\cos \phi - \cos \phi_0), \quad (3.38)$$

のように変形できる。ここで、 $\phi = \phi_0$ のとき、 $d\phi/ds = 0$ となるように積分定数を決定した。物理的な意味としては、 ϕ_0 は棒の自由端($s = L$)における傾きである。この方程式は、

$$\left(\frac{d\phi}{ds} \right)^2 = \frac{4F}{YI} \left(\sin^2 \frac{\phi_0}{2} - \sin^2 \frac{\phi}{2} \right), \quad (3.39)$$

のように書き換えることができる。ここで、

$$\xi \equiv \frac{\sin(\phi/2)}{\sin(\phi_0/2)}, \quad k \equiv \sin \frac{\phi_0}{2}, \quad (3.40)$$

なる置き換えを適用すると、微分方程式(3.39)は、

$$\int \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}} = \sqrt{\frac{F}{YI}} \int ds, \quad (3.41)$$

なる積分を実行して解くことができる。この数式の左辺は第1種楕円積分である。第1種楕円積分の逆関数がヤコビの楕円関数であることに注意すると、この方程式の解は、

$$\xi = \operatorname{sn} \left(\sqrt{\frac{F}{YI}} s; k \right),$$

となる。ここで、 k は楕円積分の母数である。なお、 $s = 0$ のとき $\xi = 0$ となるように積分定数を決定した。記号 ξ と k をもとに戻すと、

$$\sin \frac{\phi}{2} = \sin \frac{\phi_0}{2} \operatorname{sn} \left(\sqrt{\frac{F}{YI}} s; \sin \frac{\phi_0}{2} \right), \quad (3.42)$$

が得られる。ここで, sn がヤコビの楕円関数である。上で述べた積分定数の決定は, $s = 0$ のとき $\phi = 0$ ことを意図していたのだ。なお, ヤコビの楕円関数 (sn 関数) の二つのパラメータのうち, 第1のパラメータが関数の変数であり, もう一方が楕円積分の母数である。

棒の長さについて, パラメータを合わせておこう。すでに書いたように, 棒の長さが L であるので, $s = L$ のとき, $\phi = \phi_0$ となるようにパラメータを決めるのだ。棒の長さを計算する積分は,

$$L = \int_0^L ds = \int_0^{\phi_0} \frac{ds}{d\phi} d\phi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{YI}{F}} \int_0^{\phi_0} \frac{d\phi}{\sqrt{\sin^2(\phi_0/2) - \sin^2(\phi/2)}},$$

となる。ここでも, (3.40) なる置き換えを適用すると,

$$L = \sqrt{\frac{YI}{F}} \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}} = \sqrt{\frac{YI}{F}} K\left(\sin \frac{\phi_0}{2}\right), \quad (3.43)$$

が得られる。ここで, $K(k)$ は, 母数 k の第1種完全楕円積分である。ヤコビの楕円関数が $\text{sn}(K(k); k) = 1$ を満たすので, (3.42) が $s = L$ のとき $\phi = \phi_0$ となる。なお, (3.43) を ϕ_0 について解けば, 印加した力 F に対する棒の先端の傾斜 ϕ_0 が特定できる。とはいえ, (3.43) は解析的に解けないので, 数値解法で解くことが必要だ。印加した力と先端の傾きの関係を図3.11に示す。図に示すように, 力が特定の大きさに満たなければ棒は鉛直方向に立ったままである。その特定の大きさとは, $F = \pi^2 YI / 4L^2$, すなわち, 座屈荷重である。座屈

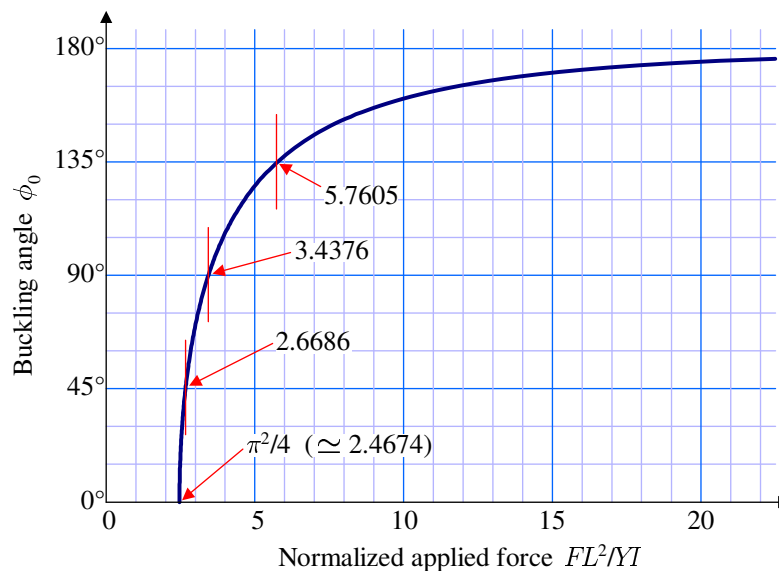


図 3.11: 印加した力に対する座屈角

荷重を超える力を印加すると, 棒は急激に変形する。図に示すように, 座屈荷重からわずか8%だけ力を大きくしただけで, 棒の先端は45°も傾くのだ。このような不連続的な特性が座屈の特徴だ。その特性は, 力を徐々に加えていったとき, ある時点を境に, 突然, 大

きく変形するような現象となるだろう。さらに、座屈荷重から約39%だけ力を大きくすると先端の角度は 90° も傾く。ただし、棒の破壊や塑性変形がないことが条件である。

変形した棒の形状を水平座標 x と鉛直座標 z を積分形式で書いてみよう。棒が鉛直方向から角度 ϕ だけ傾いている状態では、微小長さ ds に対して、水平方向の微小変位が $dx = \sin \phi ds$ 、鉛直方向の変位が $dz = \cos \phi ds$ であるから、

$$x = \int_0^x \sin \phi ds = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{YI}{F}} \int_0^\phi \frac{\sin \phi d\phi}{\sqrt{\sin^2(\phi_0/2) - \sin^2(\phi/2)}}, \quad (3.44a)$$

$$z = \int_0^x \cos \phi ds = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{YI}{F}} \int_0^\phi \frac{\cos \phi d\phi}{\sqrt{\sin^2(\phi_0/2) - \sin^2(\phi/2)}}, \quad (3.44b)$$

なる積分で計算できる。これらのうち、 x 座標は初等的な積分となり、角度 ϕ についての関数として書くと、

$$x = 2\sqrt{\frac{YI}{F}} \left(\sin \frac{\phi_0}{2} - \sqrt{\sin^2 \frac{\phi_0}{2} - \sin^2 \frac{\phi}{2}} \right), \quad (3.45)$$

が得られる。一方、 z 座標の計算には楕円積分が必要であり、これ以上の具体的な計算は割愛する。すでに、棒の傾き ϕ を s の関数として、(3.42) に計算結果を示しておいた。その結果を数値積分すれば具体的な形状を得ることができる。

座屈した棒の先端の水平方向の変位 H は、(3.45) に ϕ_0 を代入すれば得られる。その代入の結果は、

$$H = 2\sqrt{\frac{YI}{F}} \sin \frac{\phi_0}{2}, \quad (3.46)$$

となる。なお、角度 ϕ_0 は、すでに説明したように、(3.43) を解くことによって決定できる。座屈が十分に小さい場合、

$$H \simeq \sqrt{\frac{YI}{F}} \phi_0 \quad (\phi_0 \ll 1),$$

のように近似できるのだが、 ϕ_0 が十分に小さい場合、(3.43) は、 $L = (\pi/2)\sqrt{YI/F}$ のように ϕ_0 を含まない形になる。つまり、小さな座屈においては、印加した力 F に対して ϕ_0 が定まらない。その数学的な性質は、座屈の開始が不連続的な性質をもつことに起因する。

ピアノ線のような細い弾性棒を鉛直方向に立て、鉛直下方に力を印加して座屈させたときの形状は、図3.12のように変形する。この形状は、(3.42) によって、長さ s における傾き ϕ を逐次計算することによって描いた。弾力性がある細い棒は、大きな力を印加すると大きく曲がる。しかも、根本付近で大きく曲がるのだ。このような変形は棒高跳びの棒にも見られる。競技の初期は、棒高跳びは木製や竹製の棒を使用していたが、1960年以降、グラスファイバ製の棒を使用するようになった。グラスファイバは屈曲角を大きくでき、その

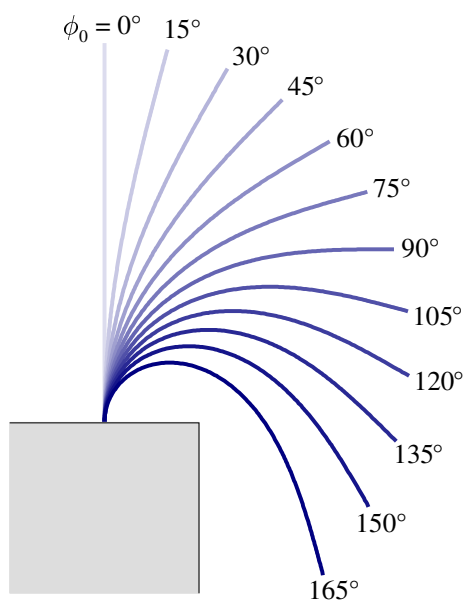


図 3.12: 細い弾性棒の座屈

復元力を利用し、棒高跳びの記録が伸びている。棒高跳びの競技中の棒の変形は、図 3.12 に似ている。

一方、エラスティカ以外の材質においても座屈限界は重要である。上に見たように、座屈限界を超えると、急激に変形が進むからだ。その結果、座屈限界を超えたはずみで、材質の弾性限界を超えてしまう危険性がある。弾性限界を超えると、材質は永久変形、もしくは、破壊に至ってしまう。建築においては、垂直に立てた柱にかかる荷重が座屈限界を超えないように注意が必要なのだ。万一、座屈限界を超えた場合、建物が倒壊する危険性があるのだ。

3.6.3 片もち梁

エラスチカの解析例として座屈を最初に取り扱ったのは、微分方程式の解が(どちらかというと)簡単だったからだ。水平に支える片もち梁では、座屈に比べると方程式が解きにくい。本稿では、直接的に方程式を解く代わりに、座屈の解を利用して片もち梁を解析しよう。

座屈モデルを片もち梁の解析に利用するには、図 3.13 のように、座屈角が $\pi/2$ を超える状況を考えればよい。座屈角がちょうど $\pi/2$ になっている場所を、棒の根元からの長さで s_0 とする。この位置に片もち梁の固定点があると考えなのだ。棒の焦点は、根元からの長さで $s_0 + L$ とする。このようにすれば、長さ L の片もち梁の変形が解析できる。

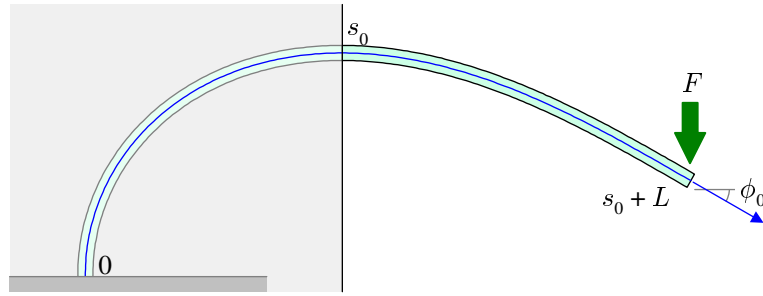


図 3.13: 座屈モデルを利用した片もち梁の解析

座屈モデルで片もち梁を解析するには, (3.42) を利用することになる。ただし, 片もち梁の固定点を $s = 0$ とし, 水平方向からの傾きを ϕ とするならば, (3.42) は,

$$\sin\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\phi_0}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \operatorname{sn}\left(\sqrt{\frac{F}{YI}}(s + s_0); \sin\left(\frac{\phi_0}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right), \quad (3.47)$$

のように書き換えられる。この数式は, (3.42) に対して $\phi \mapsto \phi + \pi/2$, $\phi_0 \mapsto \pi_0 + \pi/2$, $s \mapsto s + s_0$ を適用すれば得られる。力 F を先端に作用させた状況を解析するには, 得られた (3.47) に含まれる未知数 s_0 と ϕ_0 を決定する必要がある。未知数を決定するには, $s = 0$ で $\phi = 0$, $s = L$ で $\phi = \phi_0$ となることを利用すればよい。その条件を数式で表現すると,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\left(\frac{\phi_0}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \operatorname{sn}\left(\sqrt{\frac{F}{YI}} s_0; \sin\left(\frac{\phi_0}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right),$$

$$\sqrt{\frac{F}{YI}}(s_0 + L) = K\left(\sin\left(\frac{\phi_0}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right),$$

なる方程式が得られる。この方程式を, s_0 と ϕ_0 について解けばよいのだが, いささか取り扱いが難しい。なぜならば, 未知数 ϕ_0 は, 上の第 1 式における sn 関数の母数 k に関係するからだ。母数 k は楕円関数の形状を変えるで取り扱いが難しい。その方程式に書いた方程式は, 図 3.14 のように図解できる。図に描いた曲線が sn 関数である。その関数は, 振幅が 1 の周期関数である意味では正弦波に類似している。特に, 母数が $k = 0$ のとき, sn 関数は正弦波と一致する。しかし, 母数 k が大きくなる (1 に近づく) と, 頂点が平らになり, 周期が長くなることが特徴だ。この関数が, $1/\sqrt{2}k$ となる点を A, 楕円関数の頂点を B とすると, 図 3.14 のように, 点 A の x 座標は s_0 に対応し, 点 B の x 座標は $s_0 + L$ に対応する。このような関係を満たす s_0 と k を特定することによって, 片もち梁を解析するためのパラメータが抽出できるのだ。なお, 母数 k は,

$$k = \sin\left(\frac{\phi_0}{2} + \frac{\pi}{4}\right),$$

である。母数 k が決定できたら, この方程式を ϕ_0 について解けば, 端点における屈曲角がわかる。グラフによって屈曲角 ϕ_0 を示すと図 3.15 のようになる。屈曲角 ϕ_0 が 20° 以内で

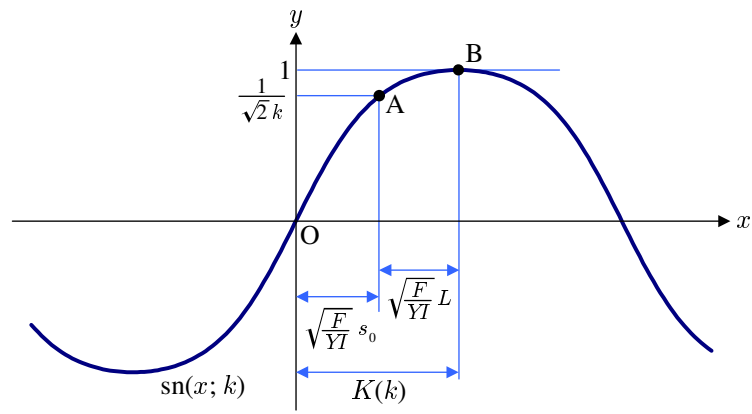


図 3.14: 片もち梁の屈曲解析のパラメータ抽出

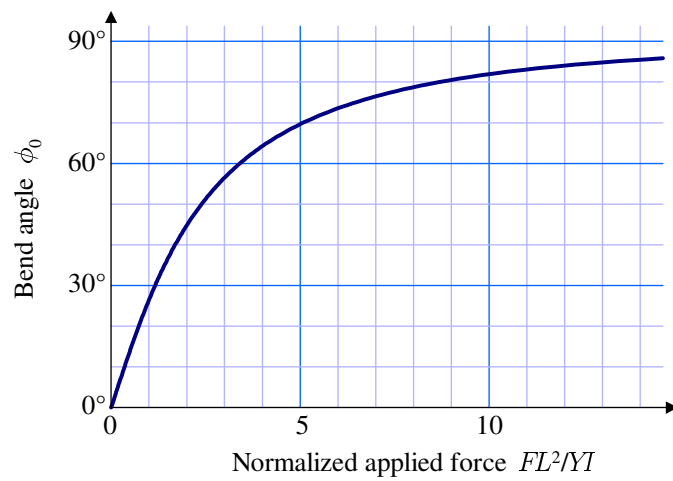


図 3.15: 片もち梁に印加する力と屈曲角

は、屈曲角は端点に印加した力にほぼ比例している。屈曲角が大きくなると、その比例関係は崩れる。屈曲角 30° に比べると、屈曲角 60° に達するには3倍もの力が印加されている。小さな屈曲角において、屈曲角が印加する力にほぼ比例するという事は、小さい屈曲角では近似的にフックの法則が成り立っているということだ。変形をもたらした力を解放すると、定規の端を指ではじいたときのように、復元力で棒は振動する。フックの法則が成立する範囲では、特定の振動数で振動する。しかし、一般振り子と同様に、屈曲角が大きくなるとフックの法則からずれ、復元力による振動するが振幅に依存するようになる。