

## 第5章 流体の運動

流体は弾性体とは異なり、自由に形を変えることができる連続体である。その性質がゆえに、弾性体とは取り扱うモデルが異なるが、モデルを確立すれば弾性体と同様に物理現象を記述できる。

### 5.1 流体の性質

流体は自由に形を変えることができるのが弾性体との大きな違いである。流体は容器に入れなければ特定の形に収めることができない。その性質ゆえに、静止した状態では、流体に接線方向の応力が存在しない。なぜなら、容器入れた流体が、仮に、容器から接線方向の応力の作用を受けた場合、流体はその応力の方向に運動することができる。流体が形を一定に保っている状態は、応力を受けずに平衡状態が成立していると考えられる。したがって、静止状態にある流体には法線応力しか作用できないと考えるのが妥当だ。したがって、静止状態の流体に作用する応力は、

$$P_{mn} = -p \delta_{mn}, \quad (5.1)$$

となる。ここで、 $p$ は圧力を意味する。圧力の符号が負になれば、応力テンソルの接線成分は正となり、それは張力を意味する。このように対角成分しか存在しない応力テンソルは**静水圧**と呼ばれる。

#### 5.1.1 粘性流体

流体には接線揚力が作用しないと述べたが、それは静止した流体の性質である。現実の気体や液体は、運動するとき、その流れの方向に抵抗力がはたらく。その抵抗力は、接線応力による作用と考えてはどうだろうか？ 運動する流体における接線応力は、流体の運動によって引き起こされるということは、運動がもたらす変形の速さに関係すると考えることができる。

流体における応力は、弾性体の場合を参考にし、変形テンソル  $E_{mn}$  と関係づけるのが妥

当だろう。とはいえ、流体の場合、弾性体のように変形テンソル  $E_{mn}$  と直接結びつけるのではなく、変形テンソルの時間微分  $\partial E_{mn}/\partial t$  と結びつけるのがよい。すなわち、流体における応力テンソルは、

$$P_{mn} = G_{mn} + G_{mnkl} \frac{\partial E_{kl}}{\partial t}, \quad (5.2)$$

であると仮定する。なお、2階のテンソル  $G_{mn}$  は静止状態における応力であり、4階のテンソル  $G_{mnkl}$  は運動がもたらす応力のための定数を与える。このような関係で応力が記述できる流体は、**粘性流体**、または、**ニュートン流体**と呼ばれる。静止状態における応力を与える  $G_{mn}$  は静水圧でなければならないので、 $G_{mn} = -p\delta_{mn}$  となるはずだ。

運動による応力への寄与を表すテンソル  $G_{mnkl}$  は、弾性体における弾性定数テンソル  $C_{mnkl}$  と同様に、一般的に81個の成分をもつが、流体が等方性であれば、

$$G_{mnkl} = \zeta \delta_{mn} \delta_{kl} + \eta (\delta_{lk} \delta_{nm} + \delta_{ml} \delta_{nk}), \quad (5.3)$$

のように、二つのパラメータ  $\eta$  と  $\zeta$  のみで記述できる。なお、 $\eta$  は**ずれ粘性率**、 $\zeta$  は**第2粘性率**と呼ばれる。ラメの弾性定数と同様、 $\eta > 0$ 、 $\zeta > 0$  であると考えてよい。

等方性流体における弾性定数 (5.3) を用いると、応力テンソルは、

$$P_{mn} = \left( -p + \zeta \frac{\partial E_{kk}}{\partial t} \right) \delta_{mn} + 2\eta \frac{\partial E_{mn}}{\partial t}, \quad (5.4)$$

のように書けるはずだ。このテンソルのトレースを計算すると、

$$P_{mm} = -3p + (3\zeta + 2\eta) \frac{\partial E_{kk}}{\partial t},$$

となる。ここで、第2項の係数を  $3\chi$  とおくと、トレースは、

$$P_{mm} = 3 \left( -p + \chi \frac{\partial E_{kk}}{\partial t} \right), \quad (5.5)$$

のように書ける。新たに定義された記号:

$$\chi = \zeta + \frac{2}{3}\eta, \quad (5.6)$$

は、流体の体積変化に対する抵抗を表す定数であるので、**体積粘性率**と呼ばれる。体積粘性率と呼ばれる理由は、応力テンソルを次のように変形してみればわかる。変形テンソル  $E_{mn}$  の定義に注意して  $P_{mn}$  を変形すると、

$$\begin{aligned} P_{mn} &= \left( -p + \chi \frac{\partial E_{kk}}{\partial t} \right) \delta_{mn} + 2\eta \left( \frac{\partial E_{mn}}{\partial t} - \frac{1}{3} \frac{\partial E_{kk}}{\partial t} \delta_{mn} \right) \\ &= \left( -p + \chi \nabla \cdot \mathbf{u} \right) \delta_{mn} + 2\eta \left( \frac{\partial E_{mn}}{\partial t} - \frac{1}{3} \nabla \cdot \mathbf{u} \delta_{mn} \right), \end{aligned} \quad (5.7)$$

が得られる。既に弾性体における議論で、 $\nabla \cdot \mathbf{u}$  が体積歪みに関係することを述べた。応力テンソルが、係数  $\chi$  と  $\nabla \cdot \mathbf{u}$  の積を含むことから、 $\chi$  が体積粘性率と呼ばれるわけだ。

流体において、三つのパラメータ  $\chi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  がすべてゼロとみなせるとき、応力テンソルは  $P_{mn} = -p\delta_{mn}$ , すなわち、完全流体の応力テンソルと一致する。その意味で、完全流体は**非粘性流体**と呼ばれる。

### 5.1.2 各種粘性

粘性率  $\eta$  によってモデル化された粘性流体の特性は、実際の気体や液体によく適合している。体積弾性率  $\chi$  については実測データが多くない。その理由は、 $\chi$  が体積変化を伴う量であるため、液体の流れ、音速より遅い気体の流れのような、体積変化率  $E_{kk}$  が極めて小さい流れでは無視されることが多いからだ。しかし、音波や衝撃波の減衰のような液体の圧縮性(体積変化率)と粘性がともに関係する現象においては、体積粘性率の影響が大きい。そのような場合に  $\chi$  の測定がなされている。

[静止状態で分子衝突による力の作用が平衡状態になっている。運動すると、その平衡状態が崩れるが、分子衝突のアンバランスが新たな力の作用につながる。その新たな作用が粘性である。粘性によって平衡状態に引き戻される。]

## 5.2 流体の流れ

流体の弾性体とは異なる性質として、力が作用する限り変形を続ける。弾性体には変形に限界があるが流体には限界がない。その独特の性質ゆえに、流れという概念が必要になる。流れとは、力を加えたときの流体の変形を表す運動である。例えば、ある位置  $\mathbf{x}$  での時刻  $t$  における流体の速度  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  が流体の流れである。

### 5.2.1 流線

流体の流れの軌跡は流線と呼ばれる。流れに沿った微小ベクトルを  $d\mathbf{s} \equiv \mathbf{e}_l ds$  としよう。ここで、 $\mathbf{e}_l$  は流れに沿った単位ベクトルであり、 $ds$  は微小長さである。そのベクトルは、速度ベクトル  $\mathbf{u}$  と平行のはずなので、

$$d\mathbf{s} = \frac{\mathbf{u}}{u} ds,$$

なる関係を満たす。つまり、流れに沿った単位ベクトルは  $\mathbf{e}_l = \mathbf{u}/u$  である。上に書いた  $d\mathbf{s}$  の表現式を  $d\mathbf{s} = (ds/u)\mathbf{u}$  のように解釈すると、 $ds/u$  は、ベクトル  $d\mathbf{s}$  と  $\mathbf{u}$  の間の比例係数となるので、それらのベクトルが  $d\mathbf{s} \equiv [ds_1, ds_2, ds_3]$ ,  $\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3]$  のように成分表示できるとき、

$$\frac{ds_1}{u_1} = \frac{ds_2}{u_2} = \frac{ds_3}{u_3}, \quad (5.8)$$

を満足する。数学上、この方程式は3次元空間中の直線の方程式である。物理的な意味として、 $\mathbf{s}$  がたどる軌跡、すなわち、流線の接線である。その直線の方程式は、

$$\frac{ds_1}{ds_3} = \frac{u_1}{u_3}, \quad \frac{ds_2}{ds_3} = \frac{u_2}{u_3},$$

のような独立な二つの微分方程式に書き換えられる。これらの数式を積分することによって流線が決定できる。局所的に見れば、一つの微分方程式の解は平面となるので、与えられる流線はそれら平面の交点でつくられる直線である。大域的に見れば、一つの微分方程式の解は曲面となり、与えられる流線は曲面が交差する曲線となる。

簡単な関数で速度が与えられる流体の流れを例にして、流線を特定してみよう。速度  $\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3]$  が、

$$u_1 = U_0, \quad u_2 = V_0 \cos(kx_1 - \omega t), \quad u_3 = 0,$$

で与えられる流れを取り扱おう。これら速度線分を (5.8) に代入すると、

$$\frac{dx_1}{U_0} = \frac{dx_2}{V_0 \cos(kx_1 - \omega t)},$$

が得られるので、流線は微分方程式:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{V_0 \cos(kx_1 - \omega t)}{U_0},$$

で決定できる。この方程式を積分することによって、

$$x_2 = \frac{V_0}{kU_0} \sin(kx_1 - \omega t) + C,$$

が導かれる。ここで、 $C$  は積分定数である。この結果から、取り扱った流れは、 $x_1x_2$  平面上を正弦波関数の形で蛇行することがわかる。しかも、積分定数  $C$  の任意性から、その蛇行した流れが  $x_1x_2$  平面を均一に分布していることがわかるのだ。

## 5.2.2 流管

空間中に設定した閉曲面を通過する流体の運動を追跡して得られる3次元の領域は**流管**と呼ばれる。そのため、流管の側面は速度ベクトル  $\mathbf{u}$  が張り付くため、流管の側面では法線ベクトルと速度ベクトルの内積がゼロとなる。

特定の流管に注目したとき、その流管の任意の断面を通過する流体の質量は等しい。これは質量保存側である。ある閉曲面で囲まれた面積  $S_0$  を通過する流体の流管に注目する。その流管の下流の断面  $S_1$  を設定したとき、断面  $S_0$  と  $S_1$  で切断された流管は、質量保存の法則を満たすはずだ。質量保存の法則は、

$$\left( \int_{S_0} + \int_{S_{\text{side}}} + \int_{S_1} \right) \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS = 0,$$

が成立する。ここで、 $S_{\text{side}}$  は流管の側面、 $\mathbf{n}$  は領域の外側に向かう法線ベクトルである。特に、流管の側面では  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$  が成立するので、側面における面積分はゼロである。したがって、特定の流管を切断する断面  $S_0$  と  $S_1$  について、

$$\left( \int_{S_0} + \int_{S_1} \right) \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS = 0,$$

が成立する。同一の流管の切断面を  $S_1$  を、 $S_0$  より下流の別の切断面  $S_2$  に変更すると、

$$\left( \int_{S_0} + \int_{S_2} \right) \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS = 0,$$

が成立するはずである。したがって、

$$\int_{S_1} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{S_2} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS = \text{const}, \quad (5.9)$$

が成立することが導かれる。特定の流管に注目した場合、その流管をどの場所で切断しても、その切断面を通過する流体の質量は等しい。この方程式は流管における連続の法則である。この数式の定数量 (const) は**質量流量**と呼ばれる。

特に、非圧縮性の流体の場合、 $\rho$  が一定であるので、流管における連続の法則は、

$$\int_{S_1} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{S_2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS = \text{const}, \quad (5.10)$$

と書き換えることができる。この関係式における一定量は、流管を単位時間あたりに通過する流量を表す。つまり、単位時間あたりの流量は流管のどの断面で計測しても等しいのだ。その単位時間あたりの流量は**流管の強さ**と呼ばれる。

比較的細い流管を考えるとその流管内での流れの速度は一定と考えることができる。その細い流管の2箇所の断面について、断面積を  $\sigma_1$  と  $\sigma_2$ 、速度を  $u_1$  と  $u_2$  とすれば、

$$\sigma_1 u_1 = \sigma_2 u_2,$$

が成立する。この関係は、模式的に描くと図5.1に示すように、流管が細くなる場所では速度が大きくなる。例えば、断面積が2分の1になれば、流れの速度は2倍になるのだ。流管の断面積と速度の関係は、道路交通の性質と大きく異なる。道路が2車線から1車線に減少する箇所があれば、交通量が多いとき渋滞の原因となる。それば、2車線で走行していた

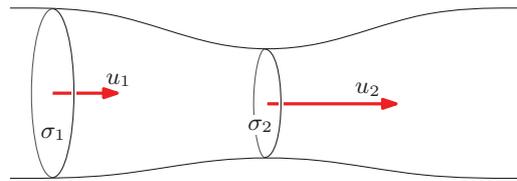


図 5.1: 流管の断面積と速度

車両が1車線に合流する際に、事故を避けるために速度を落とすからである。道路交通では車線が減少すると速度が小さくなる傾向にある。実は、流管における断面積と速度の関係が、流れが滞らない条件となっている。実際の交通では、工事等によって車線規制をした場合、安全のため運航速度が通常時より低くなる。これが流れが滞らない条件を大きく逸脱するため、必然的に渋滞が発生してしまうのだ。

### 5.2.3 流跡線と流脈線

既に取り扱った流線と類似した曲線として、流跡線と流脈線を説明する。流線は時間的な概念を含まず、ある時刻において、流れの接線ベクトルをつないで形成される曲線が流線であった。それに対し、流跡線と流脈線は特定の位置を通過する流体を追跡することによって得られる。

微小時間  $dt$  の間の流体の変位  $ds$  は、流体の速度を  $\mathbf{u}$  とすると、 $ds = \mathbf{u} dt$  で与えられる。このベクトルによる関係式の成分を書き出すと、

$$\frac{ds_1}{u_1} = \frac{ds_2}{u_2} = \frac{ds_3}{u_3} = dt, \quad (5.11)$$

なる関係が得られる。得られた関係式は流線を特定するための関係式と同一に見えるが、流線を議論したときには、右辺については特に言及しなかった。今回は、右辺が  $dt$  であることに注目している。この点が流線との違いである。

流線の特定に二つの微分方程式を用いていたのに対し、流跡線を特定するための関係式(5.11)から微分方程式を三つ抽出する。流線の特定で取り扱った例で流跡線を考察しよう。再び条件を書くと、

$$u_1 = U_0, \quad u_2 = V_0 \cos(kx_1 - \omega t), \quad u_3 = 0,$$

である。流跡線を特定する微分方程式は、(5.11)を用いると、

$$\frac{du_1}{dt} = U_0, \quad \frac{du_2}{dt} = V_0 \cos(kx_1 - \omega t),$$

となる。第1式を節分して得られる  $u_1 = U_0 t + C_1$  を第2式に代入すると、

$$\frac{du_2}{dt} = V_0 \cos [(kU_0 - \omega)t + kC_1],$$

が得られる。この数式を積分すると、

$$u_2 = \frac{V_0}{kU_0 - \omega} \sin [(kU_0 - \omega)t + kC_1] + C_2,$$

なる流跡線が特定できる。先ほど求めた  $x_1$  を用いて  $t$  を消去すると、

$$u_2 = \frac{V_0}{kU_0 - \omega} \sin \left[ \left( k - \frac{\omega}{U_0} \right) x_1 + \frac{\omega}{U_0} C_1 \right] + C_2,$$

が曲線の方程式と特定された流跡線である。なお、 $C_1$  と  $C_2$  は積分定数であり、流体中の注目する点の初期位置によって決まるパラメータである。例えば、 $t = 0$  のとき  $[x_1, x_2] = [0, 0]$  となるように積分定数を選べば、

$$u_2 = \frac{V_0}{kU_0 - \omega} \sin \left( k - \frac{\omega}{U_0} \right) x_1,$$

となるのだが、これはいかなる時刻  $t$  においても、流線とは一致しない。なぜなら、振幅が異なるからだ。この例では、流線と流跡線が一致するには、 $\omega = 0$  でなければならないのだ。それは流れが時間依存しない条件、すなわち、定常流である場合に限られるのだ。

類似した流体中の曲線として、**流脈線**が挙げられる。流脈線は、特定の点を通じた流体が、ある時刻において並ぶ曲線である。上の例において、原点  $[u_1, u_2] = [0, 0]$  を通過した流体の時刻  $t = 0$  における流脈線を導出しよう。原点を通過する時刻を  $t = -t_0$  として積分定数を決定すると、 $C_1 = U_0 t_0$ 、 $C_2 = 0$  となる。得られた積分定数を代入し、 $t = 0$  における流体の位置を特定すると、

$$x_1 = U_0 t_0, \quad x_2 = \frac{V_0}{kU_0 - \omega} \sin kU_0 t_0,$$

となる。したがって、求める流脈線は、

$$x_2 = \frac{V_0}{kU_0 - \omega} \sin kx_1,$$

である。この結果からわかるように、流線、流跡線、流脈線は一般的にすべて異なる。特殊な例として、定常流であれば、それら3種類の曲線は一致する。

### 5.3 渦度と渦線

流れが特定の方向に向かって曲がっている状態は渦と呼ばれる。渦は、渦度  $\boldsymbol{\omega} \equiv \nabla \times \boldsymbol{u}$  なる量で記述される。この定義式から、速度が直線的である場合、または、対称性を保って広がる場合に  $\boldsymbol{\omega} = 0$  となる。流れを取り扱ったときと同様に、渦の場合は、渦線や渦管によって渦の性質を議論する。

### 5.3.1 渦線

渦線は、ある一瞬の観測において見出すことができる渦を表現するための曲線である。その曲線は、渦度  $\boldsymbol{\omega}$  を接線とするので、流線と同様に、

$$\frac{ds_1}{\omega_1} = \frac{ds_2}{\omega_2} = \frac{ds_3}{\omega_3},$$

によって特定することができる。流線と同様に、この方程式から二つの微分方程式を取り出すことができるので、その解は二つのパラメータを用いて記述できる。

### 5.3.2 渦管

流管の定義と同様、閉曲線の任意の点を通る渦線で形成される曲面を考えよう。その曲面は渦管と呼ばれる。渦管の側面の法線ベクトルを  $\mathbf{n}$  とすると、渦管の側面では、 $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$  を満たす。

渦管において成立する保存則は、定常流の流管とは異なる。流体中に任意の閉曲線  $C$  をとり、 $C$  の線素を  $d\mathbf{s} \equiv \mathbf{e}_l ds$ 、速度  $\mathbf{u}$  の接線方向の成分を  $u_l (= \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_l)$  であるとすると、 $C$  を周回する線積分:

$$\Gamma = \int_C u_l ds = \int_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s},$$

は、閉曲線  $C$  に沿った循環と呼ばれる。この積分が  $\Gamma > 0$  であれば、流れは積分路と同じ方向に回っている。一方、 $\Gamma < 0$  であれば、流れの方向は積分路とは逆である。

閉曲線  $C$  に沿った線積分は、ストークスの定理によって、 $C$  で囲まれる曲面  $S$  における面積分書き換えることができる。その書き換えは、

$$\int_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \nabla \times \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS,$$

のようになる。この積分公式を利用すると、渦管を特徴づける公式が得られる。ある渦管を切断する閉曲線に沿って流体の速度  $\mathbf{u}$  を線積分すると、その積分は切断面の位置とは無関係に一定値となる。それを形式的に書くと、

$$\int_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} = \text{const}, \quad (5.12)$$

となる。この関係式を証明するには、特定の渦管を切断する二つの断面  $S_1$  と  $S_2$  を考えればよい。それらの外周を、それぞれ、 $C_1$  と  $C_2$  であるとする。流管の側面に  $C_1$  から  $C_2$  まで切れ込みを入れ、 $C_1$  から  $C_2$  を切れ込みに沿う経路を  $C_{12}$  としよう。このとき、閉曲線  $C_1 + C_{12} - C_2 - C_{12}$  は、渦管の側面  $S_{\text{side}}$  を取り囲む閉曲線であると考えられる。上で説明したように、渦管の側面では  $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} = 0$  であるので、その経路に沿って  $\mathbf{u}$  を線積分すると、

$$\int_{C_1 + C_{12} - C_2 - C_{12}} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} = \int_{S_{\text{side}}} \nabla \times \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S_{\text{side}}} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS = 0,$$

が得られる。ところで、

$$\int_{C_1+C_{12}-C_2-C_{12}} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} = \left( \int_{C_1} - \int_{C_2} \right) \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s},$$

であることに注意すると、

$$\int_{C_1} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} = \int_{C_2} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s},$$

が成立する。積分路  $C_1$  と  $C_2$  は任意であるので、特定の渦管を切断する任意の断面の境界線に沿った  $\mathbf{u}$  の周回積分は、切断面の選択によらず一定値となる。すなわち、(5.12) が成立する。その数式は、

$$\int_S \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS = \text{const}, \quad (5.13)$$

のように書くこともできる。つまり、特定の渦管を切断する任意の断面で渦度  $\boldsymbol{\omega}$  を面積分した値は、切断面の選択によらず一定なのだ。

十分に細い渦管を2箇所切断し、それぞれの面積と渦度を  $\sigma_1, \omega_1$  と  $\sigma_2, \omega_2$  であるとすれば、

$$\sigma_1 \omega_1 = \sigma_2 \omega_2,$$

が成立する。例えば、同一の渦管において、断面積が小さくなると渦度がそれに反比例して大きくなるのだ。この法則は流管における流れの速度と同じである。

## 5.4 流体の運動方程式

流体は連続体の一種であるので、第\*\*章で導出した連続体の運動方程式をもとに流体の運動方程式が導かれる。つまり、考察の原点は、連続体の運動方程式:

$$\frac{Du_m}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_{mn}}{\partial x_n} + K_m,$$

である。ここで、 $P_{mn}$  は応力テンソル、 $K_m$  は外力である。この方程式の  $P_{mn}$  に流体の特徴を適用することによって流体の運動方程式が得られる。

**完全流体** もっとも単純な例として完全流体を考えよう。完全流体は粘性がないため、運動状態に関わらず接線応力が発生しない。つまり、 $P_{mn} = -p\delta_{mn}$  である。したがって、運動方程式は、

$$\frac{Du_m}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_m} + K_m, \quad (5.14)$$

なる形に書き換えられる。この方程式はベクトル表記すると、

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{K}_m, \quad (5.15)$$

となる。この方程式は、完全流体の運動方程式であり、オイラーが最初に導出したことから、**オイラー方程式**と呼ばれる。

**粘性流体** 一般の粘性流体は、運動しているとき、その速度に比例し接線応力が発生するので、完全流体とは運動方程式が異なる。粘性流体の応力テンソル (5.7) を連続体の運動方程式に適用すると、

$$\begin{aligned} \frac{Du_m}{Dt} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_m} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_m} \left( \chi \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \\ & + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_n} \left[ \eta \left( \frac{\partial u_m}{\partial x_n} + \frac{\partial u_n}{\partial x_m} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{mn} \right) \right] + K_m, \end{aligned} \quad (5.16)$$

なる運動方程式が得られる。この数式の変形において、変形テンソル  $E_{mn}$  が、

$$E_{mn} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_m}{\partial x_n} + \frac{\partial u_n}{\partial x_m} \right),$$

によって定義されていることを利用した。一般的に、粘性率  $\chi$  と  $\eta$  は温度や圧力に依存するので、定数として微分演算子の前に出すことはできない。しかし、その依存性が小さい場合、粘性率  $\chi$  と  $\eta$  を近似的に定数とみなすことができるので、運動方程式は、

$$\frac{Du_m}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_m} + \frac{1}{\rho} \left( \chi + \frac{\eta}{3} \right) \frac{\partial^2 u_n}{\partial x_m \partial x_n} + \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_n \partial x_n} + K_m, \quad (5.17)$$

となる。この方程式をベクトル表記で記述すると、

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} \left( \chi + \frac{\eta}{3} \right) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{K}, \quad (5.18)$$

となる。この方程式は、ナビエとストークスが独立に導出したことから、**ナビエ・ストークス方程式**と呼ばれる。この方程式の特殊形として、 $\chi = \eta = 0$  とすれば、完全流体の運動方程式が得られる。

流体の運動方程式は、流体の物理量を決定するには不十分である。なぜなら、ベクトル  $\mathbf{u}$  だけでなく、 $\rho$  と  $p$  もこの方程式の未知数だからだ。流体の方程式は、速度や力の他に、密度や圧力といった熱力学的変数を含んでいるため、熱力学的な物理法則が必要となる。流体の物理量を決定するには、質量と運動量の保存則だけでなく、エネルギー保存則を用いるのが一般的である。エネルギー保存則に対応する方程式は、流体の密度や圧力だけでなく、熱力学同様、内部エネルギーを新たな変数として含むため、新たな変数を支配する新たな関係式が必要になる。

不定性の連鎖を断ち切るために、通常、流体の熱力学的平衡を仮定する。その仮定は、流体が静止状態で熱力学的平衡にあるとし、運動によって平衡から外れても速やかに回復し、流体は常に平衡状態を維持しているとの考えに基づく。その仮定のもとで、密度  $\rho$ 、圧力  $p$  に加えて、温度  $T$ 、エントロピー  $S$  を含み、流体を支配する状態方程式によって物理量を決定する。

## 5.5 ベルヌーイの諸定理

完全流体について、熱力学的平衡に基づいて考察しよう。既に述べたように、完全流体は局所的に熱力学的平衡にあると仮定する。圧力  $p$ 、密度  $\rho$ 、温度  $T$  の物理量が与えられたとき、

$$f(p, \rho, T) = 0, \quad (5.19)$$

なる状態方程式が成立する。ここでは、関数  $f$  を特定しないが、何らかの関係で状態方程式が記述できることを表している。さらに、等温変化、あるいは、断熱変化 (エントロピー一定) の過程を規定すれば、圧力  $p$  と密度  $\rho$  の間に特定の関係:

$$\rho = f(p), \quad (5.20)$$

が成立する。そのような変化は順圧変化と呼ばれる。等温変化や断熱変化だけでなく、密度一定の変化も順圧変化である。

### 5.5.1 完全流体の基礎方程式

エネルギー保存則に相当する基礎方程式は、運動方程式を基準に導出できる。その導出の準備として、ラグランジュ微分の演算子について考察しておこう。ラグランジュ微分は直交座標系で、

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u},$$

なる記述ができるが、この数式は直交座標系でしか成立しない。一般的な取り扱いのため、ベクトル公式:

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \frac{1}{2}\nabla u^2 - \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}),$$

を利用すると、運動方程式は、

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \frac{1}{2}\nabla u^2 + \mathbf{K} + \mathbf{u} \times \nabla \times \mathbf{u}, \quad (5.21)$$

のように書き換えられる。ここで、順圧関係を考慮し、

$$P(p) = \int \frac{dp}{\rho(p)}, \quad (5.22)$$

なる圧力関数を定義すると、運動方程式は、

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla\left(P + \frac{1}{2}u^2\right) + \mathbf{K} + \mathbf{u} \times \nabla \times \mathbf{u}, \quad (5.23)$$

のように書き換えられる。流体の運動を決める基本方程式は、圧力関数 (5.22) と (5.23)、さらに、順圧方程式 (5.20) である。

**静止状態** 運動方程式を適用する最も簡単な例として、 $\mathbf{u} = 0$ を考えよう。その場合の運動方程式は非常に簡単であり、

$$\nabla P = \mathbf{K}, \quad (5.24)$$

となる。この方程式は、外力がポテンシャルをもつ保存力であることを示唆している。この運動方程式から、完全流体が外力のもとで静止するためには、外力が保存力でなければならない。保存力でなければ静止状態にならないのである。

外力が保存力であると仮定すれば、外力は何らかのポテンシャル  $\Lambda$  と、

$$\mathbf{K} = -\nabla\Lambda,$$

なる関係で結びつけられる。これを運動方程式に代入すると、 $\nabla(P + \Lambda) = 0$  が得られるので、 $P + \Lambda$  が定数である。これが成立するためには、等圧面、すなわち、 $P(p)$  が一定の面と、等ポテンシャル面が一致しなければならない。

外力の一例として、一様な重力を考えた場合、重力加速度が  $g$ 、鉛直上方に  $z$  軸をとった場合、重力ポテンシャルが  $\Lambda = gz$  となるので、 $P + gz$  は一定である。

**一定流速** 次の簡単な例として、 $\partial\mathbf{u}/\partial t = 0$  の場合を考えよう。注意すべきは、 $\partial\mathbf{u}/\partial t$  はオイラー記述でゼロであるということだ。言い換えると、定点観測で得られる速度が常に一定ということだ。流れる流体を追跡して計測した速度が一定とは限らない。その前提条件を運動方程式に代入すると、

$$\nabla \left( P + \frac{1}{2}u^2 + \Lambda \right) = \mathbf{u} \times \nabla \times \mathbf{u}, \quad (5.25)$$

が得られる。ここで、外力  $\mathbf{K}$  が保存力であり、先ほどと同様に  $\mathbf{K} = -\nabla\Lambda$  を仮定した。この方程式の右辺は、速度  $\mathbf{u}$  と渦度  $\nabla \times \mathbf{u}$  とも直交する方向を向くベクトルである。勾配ベクトルがそのような定ベクトルとなるには、 $P + u^2/2 + \Lambda$  が流線に沿って一定とならなければならない。つまり、

$$P + \frac{1}{2}u^2 + \Lambda = \text{const.} \quad (5.26)$$

である。単純な例として、非圧縮性の流体について考えてみよう。非圧縮性の流体では、 $\rho$  が一定であるので、圧力関数は、

$$P(p) = \int \frac{dp}{\rho} = \frac{p}{\rho},$$

である。さらに、重力加速度  $g$  の一様な重力場を考えると、 $\Lambda = gz$  であるので、運動方程式は、

$$p + \frac{1}{2}\rho u^2 + \rho gz = \text{const.} \quad (5.27)$$

となる。これは流体の単位体積あたりのエネルギー保存則である。この方程式によると、圧力はエネルギー密度と等価である。この関係式は**ベルヌーイの法則**と呼ばれる。この法則の応用で導かれる性質や発明について以降の段落で紹介する。

**トリチェリの原理** 水中は深く潜るほど圧力(水圧)が大きくなる。水を満たした大きな水槽の下部に穴をあけると、その水圧で水が押し出される。水槽が高ければ、水槽の底での大きな水圧のため、水は大きな速度で押し出されるわけだ。

準備段階として、水深と水圧の関係を調べよう。大気圧を  $p_0$ 、水面の高さをゼロ、水槽の底の高さを  $-z$  としよう。水槽の水が静止している場合、ベルヌーイの法則は、 $p_0 = p - \rho gz$  となるので、水槽の底での水圧は、

$$p = p_0 + \rho gz,$$

となる。この結果によると、水深が 10 メートル深くなるごとに圧力が  $0.98 \times 10^5 \text{ N/m}^2$  (約 1 気圧) ずつ増加する。例えば、水深 3000 メートルの深海では 300 気圧の水圧がかかるのだ。

水槽の下部に小さな穴をあけたとき、上で導出した水圧によって水が速度をもって流出する。その速度を算出しよう。算出するにあたり、水面の面積、すなわち、水槽の上面の面積にくらべ、下部にあけた穴が無視できるくらい小さいとする。そのとき、下部から流出する水の速度がどうであっても、水面の下降速度がゼロであると考え。今度は、穴の高さをゼロ、水面の高さを  $h$ 、流出する水の速度を  $u$  とすると、ベルヌーイの法則は、

$$p_0 + \rho gh = p_0 + \frac{1}{2}\rho u^2,$$

なる等式で記述できる。水面に位置する水も、穴から流出する水も、直接大気に触れているのだから、それらに作用する圧力はいずれも  $p_0$  ということなのだ。方程式を見ると明らかかなように、ベルヌーイの法則はエネルギー保存則である。したがって、流出する水の速度は、

$$u = \sqrt{2gh}, \quad (5.28)$$

が導かれる。つまり、水槽の下部に設けた小さな穴から流出する水の速度は、水槽の高さを自由落下する物体の速度と等しいのだ。

**ピトー管** 航空機が大気との相対速度、すなわち、対気速度を計測するため、ベルヌーイの法則を利用した**ピトー管**と呼ばれる計測器を用いる。ピトー管は図 5.2 に示すように二重の管構造であり、内側の管の入口は先端の開口部である。外側の管の入口は管の側面である。実際のピトー管では、側面には複数個の穴が設けられている。内側の管と外側の管は、

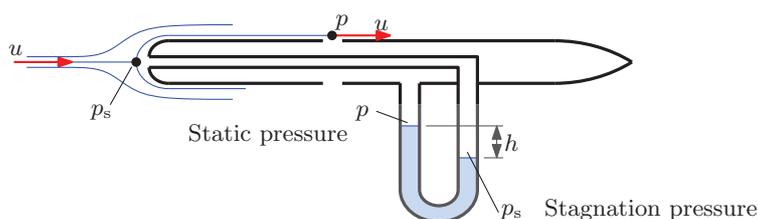


図 5.2: ピトー管

個別に出口が設けられている。ピトー管は、図 5.2 に示すように、内側の管と外側の管の間の圧力差を計測する器具を接続して使用する。図の例では、液体を入れた U 字型の管をつなぎ、液面の高さの差  $h$  で圧力差が計測できる仕組みになっている。管の正面に流れてきた流体は、圧力計でせき止められるため、管の内部に入ることができず、開口部でよどむ。つまり、速度がゼロになる。その場所の圧力  $p_s$  は淀み圧と呼ばれる。一方、管の側面をかすめる流体は、相対速度  $u$  で流れ、圧力が  $p$  であるとする。その条件にてベルヌーイの法則を記述すると、

$$p_s = p + \frac{1}{2}\rho u^2,$$

となる。なお、右辺について、 $p$  は静圧、 $\rho u^2/2$  は動圧と呼ばれる。動圧は単位体積当たりの流体の運動エネルギーであるが、圧力として作用する意味で動圧と呼ぶのだ。つまり、単位当たりの流体の運動エネルギーだけ、淀み圧と静圧の差が生じる。この方程式を速度  $u$  について解くと、

$$u = \sqrt{\frac{2(p_s - p)}{\rho}},$$

が得られる。つまり、淀み圧と静圧の差がわかれば、流体の相対速度が算出できるのだ。航空機での適用として、気体の外にピトー管を出していれば、航空機の対気速度が計測できる。

厳密には、この例ではベルヌーイの法則が成立するとは言いきれない。なぜなら、ベルヌーイの法則は 1 本の流線に沿って成立する法則である。管の正面でよどむ流線と、側面を沿って流れる流線が異なるので、ベルヌーイの法則が厳密に成立するとは言えないのだ。しかし、ピトー管が十分に細いのであれば、互いに接近する流線が同じ性質をもっていると考え、ベルヌーイの法則が近似的に成立すると仮定している。

### 5.5.2 渦なしの流れ

後に示すように、完全流体では渦度は発生しなければ、消滅もしない。例えば、静止状態から始まった流れや、無限上流が一様流である場合、初期状態に渦がないので、流れは常に

渦を含まない。渦は,  $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$  なる渦度で表現される。つまり,

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} = 0, \quad (5.29)$$

をいたる場所で満足する流れは渦なし流と呼ばれる。

渦なし流は  $\nabla \times \mathbf{u} = 0$  であるので, 速度  $\mathbf{u}$  はあるスカラ関数  $\Phi(\mathbf{x}, t)$  を用いて,

$$\mathbf{u} = \nabla \Phi, \quad (5.30)$$

のように定義することができる。スカラ関数  $\Phi$  は**速度ポテンシャル**と呼ばれる。力学や電磁気学では, ポテンシャルは勾配ベクトルに対して符号反転するものだが, 速度ベクトルは習慣的に符号反転しない。

流体の運動方程式 (5.23) に, 速度ポテンシャルと, 渦なし流の条件を適用すると,

$$\nabla \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + P + \frac{u^2}{2} \right) = \mathbf{K},$$

が得られる。この方程式から, 外力  $\mathbf{K}$  はポテンシャルをもつべきである。つまり,  $\mathbf{K} = -\nabla \Lambda$  である。そのとき, 上記の運動方程式は, 空間積分すると,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + P + \frac{u^2}{2} + \Lambda = f(t), \quad (5.31)$$

のように書き換えられる。ここで, 積分定数として記述した  $f(t)$  は空間座標に関して定数である。ただし, 時間に関しては定数である必要がないので時間の関数として  $f(t)$  と書いた。変形された運動方程式 (5.31) は一般化されたベルヌーイの定理と呼ばれる。

