

第7章 流体の波

流体も弾性体と同様に波を伝える。流体は接線応力の作用がないので、流体内部を伝搬する波は縦波である。しかし、重力によって退席した水の表面、すなわち、水面を伝播する波は横波が存在する。それは、弾性体における表面波に相当する。本章は、水面を伝搬する波を取り扱う。

7.1 水の波

一様な重力のもとでの水面を伝搬する水の波を取り扱おう。一般的な水の波における水の運動速度は、たかだか 10 m/s 程度であり、水中の音速 1500 m/s に比べて非常に小さいので、水の波を取り扱う場合、水を非圧縮性の流体と考えてよい。また、簡単のため、粘性も無視して議論を進めよう。水以外の液体であっても、粘性が著しく大きくない限り、本節の議論を適用することができる。

静止水面に沿ってカルテシアン座標系 $[x, y, z]$ を考えよう。座標軸は、鉛直上方を z 軸に選ぶものとする。つまり、静止水面は xy 平面上に位置する。

一般的な例を意識し、推定の深さが場所によって異なることにすると、その z 座標は、

$$z = -h(x, y), \quad (7.1)$$

のように表される。ここで、 $h(x, y) > 0$ とする。また、波立つ水面の高さを ζ とするとき、その座標は一般的に、

$$z = \zeta(x, y, t), \quad (7.2)$$

のように、位置と時刻の関数である。関数 $\zeta(x, y, t)$ は波の高さを表すと同時に、波の形状を表している。

静止状態から始まった流体の運動は、ラグランジュの渦定理から渦なしである。渦なしの流れでは、ポテンシャル Φ が存在し、速度ベクトルが、

$$u_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad u_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad u_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad (7.3)$$

なる成分をもつはずだ。特に、非圧縮性の流体ではポテンシャル Φ はラプラス方程式,

$$\nabla^2 \Phi = 0, \quad (7.4)$$

を満たす。つまり、水の波に伴う運動はポテンシャル流である。その運動を特定するには、境界条件を設定することが必要である。

水の波を特定するには、水底と水面で境界条件を設定することが必要である。水底 $z = -h(x, y)$ における境界条件は、固体表面における境界条件:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0, \quad (7.5)$$

である。ここで、 $\partial/\partial n$ は法線方向に沿った空間微分である。つまり、固体表面では、法線方向に対するポテンシャル Φ の変化率はゼロになるのだ。

一方、水面での境界条件は複雑である。なぜなら、水面は固定曲面でなく、大気圧との釣り合いのもとに自由に変形するからである。水面では、鉛直方向の座標 z に対し、

$$F(\mathbf{x}, t) = z - \zeta(x, y, t) = 0,$$

が成立しなければならない。これが水面条件である。この数式は、非常に当前のように感じるかもしれないが、境界条件を考える上で重要である。例えば、ある時刻 t において \mathbf{x} が水面であるとする。その場所の水の速度が \mathbf{u} であるとし、時間 δt だけ経過したときの水面は、

$$F(\mathbf{x} + \mathbf{u} \delta t, t + \delta t) = 0,$$

を満たすはずだ。これら二つの時刻における水面条件の差をとり、単位時間当たりの変化率を計算すると、

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) F = 0, \quad (7.6)$$

が得られる。つまり、水面条件のラグランジュ微分は常にゼロである。このラグランジュ微分に対して、水面条件 $F(\mathbf{x}, t)$ の定義を用いて数式展開すると、

$$u_z = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u_x \frac{\partial \zeta}{\partial x} + u_y \frac{\partial \zeta}{\partial y},$$

が得られる。ポテンシャル流の速度 (7.3) に注目すると、上の数式は、

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \quad (7.7)$$

のように書き換えられる。

渦なし流を考えているので、水面において一般化されたベルヌーイの定理 (5.31) を適用することができる。非圧縮性の流体であるので、圧力関数は $P = p/\rho$ 、外力が重力であるので力のポテンシャルは $\Lambda = gz$ である。このとき、(5.31) は、

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 + gz = f(t), \quad (7.8)$$

となる。水面 $z = \zeta$ に接する大気の圧力を p_0 とすれば、水面上では $p = p_0$ であるので、積分定数に当たる関数 $f(t)$ を $f(t) = p_0/\rho$ のように選べば、水面における一般化されたベルヌーイの定理は、

$$\zeta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2g} |\nabla \Phi|^2, \quad (7.9)$$

のように書き換えられる。この方程式が水面における力学的条件を与えるわけだ。

水面における一般化されたベルヌーイの定理 (7.9) を (7.7) に代入すると、ポテンシャル Φ のみで記述された数式が得られるのだが、それは非線形の方程式である。水の波は日常にみられる身近な現象であり、ラプラス方程式という基本的な方程式で支配されているにも関わらず、境界条件を考慮すると非線形方程式になってしまう。そのため、水の波は身近な現象でありながら、解析が困難である。

本書では波の振幅を十分に小さいと仮定し、非線形の境界条件を近似的に線形として取り扱う。なお、そのような考えで取り扱いを簡略化した波は、**最小振幅波**、または、**線形波**と呼ばれる。一方、近似を適用しない一般の波は、**有限振幅波**、または、**非線形波**と呼ばれる。最小振幅波に伴う流体の運動は微小であると考えられるので、速度ポテンシャル Φ と波の高さ ζ は微小量である。しかも、(7.9) の両辺の比較から、両者は同程度の微小量であるとわかる。したがって、(7.7) と (7.9) について、 Φ と ζ の2次の項を無視すると、

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \quad \zeta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad \text{for } z = \zeta, \quad (7.10)$$

が得られる。さらに、この方程式は ζ を消去すると、

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{for } z = \zeta, \quad (7.11)$$

のように書き換えられる。

補足的に記載したように、数式 (7.11) は水面 $z = \zeta$ のみでの適用を意識して導出されている。しかし、その数式は平均水位 $z = 0$ で適用してもよい。なぜなら、 Φ の z についてのテイラー展開:

$$\Phi(x, y, \zeta) = \Phi(x, y, 0) + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right]_{z=0} \zeta + O(\Psi \zeta^2),$$

から明らかなように、 Φ と ζ の2次の項が無視できる場合、 $\Phi(x, y, z) = \Phi(x, y, 0)$ となるので、境界条件を $z = 0$ で与えても問題ない。したがって、境界条件 (7.11) は、

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{for } z = 0, \quad (7.12)$$

のように書き換えることができる。結果として、振幅が小さい水の波は、ラプラス方程式 (7.4) と線形境界条件 (7.5) と (7.12) を解くことによって特定できる。方程式の解として Φ が得られれば、(7.10) を利用して波の形 ζ が得られる。

7.2 線形波

振幅が小さい水の波を定式化しよう。前節で説明したように、振幅が小さい波では境界条件が近似的に線形であるので**線形波**と呼ばれる。座標軸として、鉛直上方に z 軸をとり、静水面を xy となるように座標軸を設定する。また、水の運動が y 軸方向に成分をもたず、その方向に変化がないとする。そのとき、水の運動は xz 平面に平行な面内における2次元ぬん道となり、波は x 軸方向に伝搬する1次元波である。

前節で導いたが、改めて、水の波を定式化する際に必要な数式を列挙しておこう。基本方程式として、水の波はラプラス方程式にしたがう。特に、上の条件設定のように x 軸方向に伝搬する波は、

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0, \quad (7.13)$$

にしたがうわけだ。満たすべき境界条件は、

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{at } z = -h, \quad (7.14a)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{at } z = 0, \quad (7.14b)$$

である。第1式は水底における境界条件、第2式は水面における境界条件である。そのとき、波の形状は、

$$\zeta = -\frac{1}{g} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right]_{z=0}, \quad (7.15)$$

によって与えられる。これから、これらの方程式の解として水の波を数式で表現していく。

水の波を与える数学モデルとして、水平座標 x と時刻 t について正弦波となる関数:

$$\Phi(z, z, t) = \phi(z) \cos(kx - \omega t), \quad (7.16)$$

を考えよう。この数式に示すように、正弦波の振幅 $\phi(z)$ は水深 z の関数であるとした。さらに、 k は波数であり、 $k \equiv 2\pi/\lambda$ によって定義される。さらに、 ω は角周波数である。余弦関数の変数は波の位相を表すので、 $\theta = kx - \omega t$ が一定であると考え、波の位相は、

$$c = \frac{\omega}{k}, \quad (7.17)$$

で移動することがわかる。速度 c は**位相速度**と呼ばれる。この例において、 $c > 0$ であれば波は x 軸の正の方向に、 $c < 0$ であれば x 軸の負の方向に移動する。そのように波が移動することは、波の伝搬と呼ばれる。

波を形成する水の実際の運動は波の伝搬とは異なる。水の運動を特定するため、波動関数 (7.16) を (7.13) に代入すると、振幅関数 $\phi(z)$ についての微分方程式:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - k^2 \phi = 0,$$

が得られる。その方程式の解は、積分定数 C_1 と C_2 を用いて、

$$\phi = C_1 e^{kz} + C_2 e^{-kz},$$

なる形で記述できる。つまり、波動関数 Φ が、

$$\Phi = (C_1 e^{kz} + C_2 e^{-kz}) \cos(kx - \omega t),$$

であることを意味する。この関数に対して、水底での境界条件 (7.14a) を適用すると、

$$C_1 e^{-kh} = C_2 e^{kh} = \frac{C}{2},$$

が得られる。ここで、 C は別の積分定数である。この積分定数を用いると、速度ポテンシャルは、

$$\Phi = C \cosh [k(z+h)] \cos(kx - \omega t), \quad (7.18)$$

のように表現できる。得られた関数 Φ を (7.10) に代入すると、波の形状:

$$\zeta = -\frac{C\omega}{g} \cosh kh \sin(kx - \omega t), \quad (7.19)$$

が得られる。この結果によると、波の振幅、すなわち、最大波高は $(C\omega/g) \cosh kh$ で与えられる。さらに、波動関数 (7.18) について平均水面 $z = 0$ での境界条件 (7.14b) を適用すると、

$$\omega = \sqrt{gk \tanh kh}, \quad (7.20)$$

が得られる。波数 k と角速度 ω の関係に平方根や双曲線関数が現れていることから、波の位相速度が波長に依存して異なることが予想される。位相速度の定義式 $c = \omega/k$ を用いると、

$$c = \sqrt{\frac{g}{k} \tanh kh} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \tanh \frac{2\pi h}{\lambda}}, \quad (7.21)$$

のように、位相速度が波長に依存して変化することが確認できる。特に、波長よりも水深が十分に浅い場合、位相速度は $c \simeq \sqrt{gh}$ となる。逆に、波長に比べ水深が十分に大きい場合、 $c \simeq \sqrt{g/k}$ が成立する。導出した線形波の位相速度は、図 7.1 に示す曲線を描く。横軸

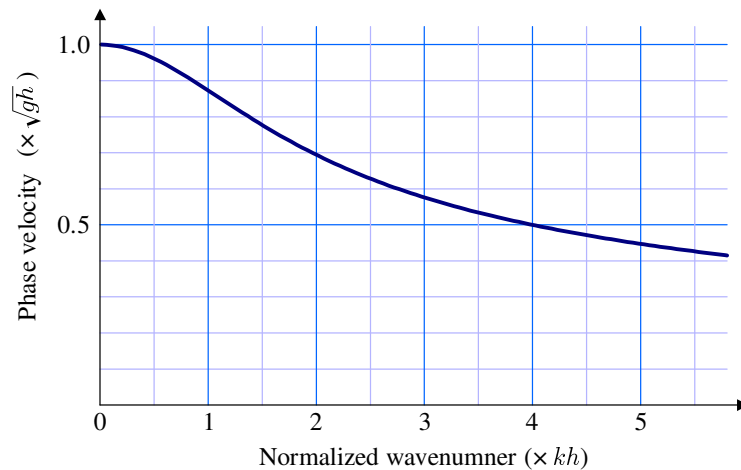


図 7.1: 線形波の位相速度

は正規化された波数 kh である。この値が小さい領域は、深さに比べ波長が長い状況 (長波) に相当する。長波での位相速度は、波数への依存が少なく、近似的に \sqrt{gh} となる。その近似は、図 7.1 によると、深さと波長が 10 倍以上で成立する。一方、 kh が大きい領域は深さに比べ波長が短い状況 (短波) に相当する。短波における位相速度は、上で述べたように $\sqrt{g/k}$ となるので、波数の平方根に反比例する。長波の代表的な例は、海底地震に起因する津波である。上で述べたように、長波の位相速度は \sqrt{gh} となる。例えば、深さ 3000 メートルの太平洋を横断する津波は約 170 m/s の速度で伝搬するのだ。

水の波の位相速度は、上で説明したように、波数 (波長) に依存して異なる値となることが特徴である。任意の波形がフーリエ変換によると異なる波数の波の重ね合わせであることを考えると、波形を構成する各波数成分は、それぞれ異なる位相速度で伝搬する。その結果、任意波形の水の波は時々刻々と形状が変化するのだ。そのような現象は、波の**分散**と呼ばれる。このように波が分散を示す媒質は、**分散性媒質**と呼ばれる。

既に導出したポテンシャル (7.18) に含まれる積分定数 C は物理的意味がわかりにくいので、書き換えてみよう。その書き換えには、(7.19) の形状における振幅に注目すればよい。その振幅を A とすれば、

$$A = -\frac{C\omega}{g} \cosh kh,$$

である。つまり、積分定数 C は、

$$C = -\frac{gA}{\omega \cosh kh},$$

のように、波の振幅、すなわち、波高 A を用いて記述できる。ところが、水の波の位相速度 (7.21) を利用すると、 C はさらに簡略化でき、

$$C = -\frac{Ac^2k}{\omega \sinh kh} = -\frac{Ac}{\sinh kh},$$

が得られる。したがって、ポテンシャル Φ は、

$$\Phi = -\frac{Ac}{\sinh kh} \cosh [k(z+h)] \cos(kx - \omega t), \quad (7.22)$$

のように書き換えられる。このポテンシャルを座標 x と z について、それぞれ、偏微分すれば速度成分が得られる。つまり、速度成分 $u_x = d\Phi/dx$ と $u_z = d\Phi/dz$ は、

$$\frac{dx}{dt} = u_x = \frac{Ack}{\sinh kh} \cosh [k(z+h)] \sin(kx - \omega t), \quad (7.23a)$$

$$\frac{dz}{dt} = u_z = -\frac{Ack}{\sinh kh} \sinh [k(z+h)] \cos(kx - \omega t), \quad (7.23b)$$

のように計算される。これらの速度成分は、波の伝搬速度でなく、波を構成する水が実際に運動する速度である。これらの微分方程式を解けば波を構成する水の運動軌跡がわかるのだが、それが容易ではない。なぜなら、同一の正弦関数の変数の中に空間座標と時間が含まれているため、微分方程式を変数分離できないからだ。これらの微分方程式は非線形であるので厳密に解くことができないのだ。

波を構成する水の運を規定する方程式 (7.23a) と (7.23b) は、厳密に解けないので、水の変位量が小さい仮定の下で近似的に方程式を解こう。座標 x も z も周期関数であると予想されるので、長時間にわたるそれらの平均値を x_0 と z_0 とし、 $x \equiv x_0 + \Delta x$, $z \equiv z_0 + \Delta z$ とおこう。つまり、平均値からの変位量を Δx と Δz とした。これらを (7.23a) と (7.23b) に代入し、変位量を決定しようというのだ。取り掛かりとして、(7.23a) について、変位量の 1 次までの近似をとると、

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta x}{dt} = \frac{Ack}{\sinh kh} \left\{ \cosh [k(z_0+h)] \sin(kx_0 - \omega t) \right. \\ \left. + k \sinh [k(z_0+h)] \sin(kx_0 - \omega t) \Delta z - k \cosh [k(z_0+h)] \cos(kx_0 - \omega t) \Delta x \right\}, \end{aligned}$$

が得られるのだが、第 2 項と第 3 項は微小量である。したがって、平均値から変位量は近似的に、

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta x}{dt} &= \frac{Ack}{\sinh kh} \cosh [k(z_0+h)] \sin(kx_0 - \omega t), \\ \frac{d\Delta z}{dt} &= -\frac{Ack}{\sinh kh} \sinh [k(z_0+h)] \cos(kx_0 - \omega t), \end{aligned}$$

なる微分方程式を満足する。これらの微分方程式は、右辺に含まれる変数が t のみであるので容易に解くことができ、

$$\begin{aligned} \Delta x &= \frac{A}{\sinh kh} \cosh [k(z_0+h)] \cos(kx_0 - \omega t), \\ \Delta z &= \frac{A}{\sinh kh} \sinh [k(z_0+h)] \sin(kx_0 - \omega t), \end{aligned}$$

が得られる。ここで、 $k = c/\omega$ なる関係式に注意した。これらの解から、波を構成する水の運動は、

$$x = x_0 + \frac{A}{\sinh kh} \cosh [k(z_0 + h)] \cos(kx_0 - \omega t), \quad (7.24a)$$

$$z = z_0 + \frac{A}{\sinh kh} \sinh [k(z_0 + h)] \sin(kx_0 - \omega t), \quad (7.24b)$$

で表されることがわかる。得られた結果によると、波を構成する水は xz 平面内で楕円運動をすることがわかる。その楕円の x 軸方向と z 軸方向の半径を、それぞれ、 A_x と A_z とすると、

$$A_x = \frac{A \cosh [k(z_0 + h)]}{\sinh kh}, \quad A_z = \frac{A \sinh [k(z_0 + h)]}{\sinh kh},$$

と書くことができる。この数式で示すように、楕円軌跡の大きさは、水底からの距離に依存して変化する。特に、 $z = 0$ における運動の z 方向振幅は A に等しい。つまり、 xz 平面内の楕円運動によって、水面が上下していることを意味する。得られた数式によって明らかになった水の運動は、図 7.2 に描くような運動をしているのだ。水底からの距離によって、長軸方向と短軸方向の半径が異なるが、あらゆる場所の水は楕円運動をしている。場

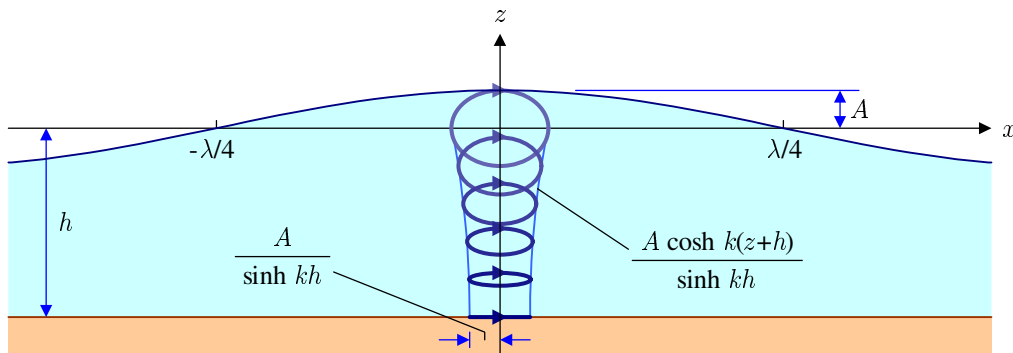


図 7.2: 波を構成する水の運動

所ごとに楕円運動のタイミングが少しずつ異なるため、波が進行しているように見えるが、実際の水は狭い範囲を周回しているに過ぎない。

楕円運動する水が波を引き起こすのは図 7.3 を用いると説明できる。この図は、水中に等間隔で設定した格子点の運動を描いている。既に説明したように、各格子点は楕円を描く。図 7.3 に描いた計算結果によると、波の山の付近では水平方向に点の間隔が小さくなっている。もともと縮まない流体を想定しているので、水平方向の間隔が小さくなった分だけ、鉛直方向の間隔が長くなっている。結果として、格子点で囲まれる四辺形の面積は一定である。一方、谷の付近では格子点の水平方向の間隔が大きくなり、鉛直方向の間隔が小さくなる。そのような水の変形によって山と谷ができる。時間の経過とともに、格子点が楕円を描くと、山や谷が異なる位置へ移っていく。そのようにして波が形成されるのだ。

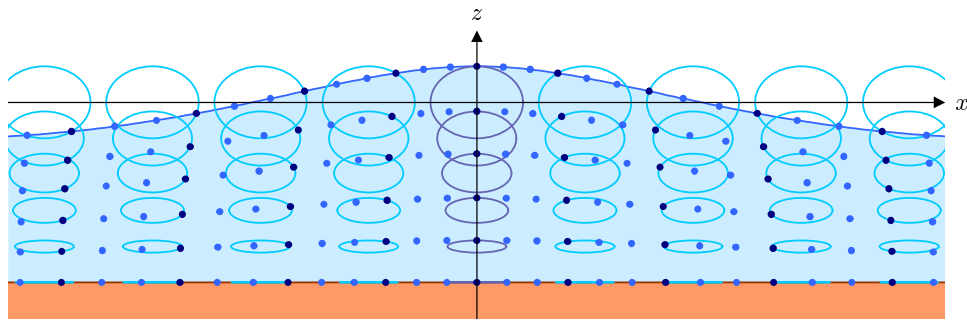


図 7.3: 水の変形によって引き起こされる波

例として、海底の巨大地震で発生する津波を考えてみよう。津波の振幅と波長を、それぞれ、 $A = 5 \text{ m}$, $\lambda = 10 \text{ km}$ とする。波長に対応して、波数は $k = 2\pi/\lambda = 6.28 \times 10^{-4} \text{ rad/m}$ となる。津波が深さ $h = 3000 \text{ m}$ の海を伝搬する場合を考えると、その位相速度は、(7.21) にしたがって、 $c = 122 \text{ m/s}$ と計算される。このとき、海水は水平方向の半径 $A_x = 5.24 \text{ m}$ 、鉛直方向の半径 $A_z = 5.00 \text{ m}$ の楕円運動をするということだ。さらに、(7.23a) によると、海水の水平方向の速度は、最大値が 0.40 m/s に過ぎない。つまり、津波といえども、沖合では海水の動きが非常に静かであり、たとえ航行中に津波に遭遇してもその事実気づかないことが十分にあり得る。

7.3 長波と短波

前節で説明した線形波は、水深 h と波長 λ の一方が極端に大きい場合、特性が簡潔に表現できるようになる。水深に比べて波長が十分に大きい場合は**長波**、水深に比べ波長が十分に小さい場合は**短波**と呼ばれる。

7.3.1 長波

長波は、波長に比べて水深が十分に小さい状況を表すので、**浅水波**とも呼ばれる。その場合、 $h/\lambda \ll 1$ であるので、 $\tanh kh \simeq kh = 2\pi h/\lambda$ であるので、波の位相速度 (7.21) は、

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{gh}, \quad (7.25)$$

のように、波長の依存性がなくなる。つまり、長波の位相速度は**非分散的**である。

速度ポテンシャル (7.22) は、長波の条件 $\sin kh \simeq kh$, $\cosh[k(z+h)] \simeq 1$ を適用すると、

$$\Phi = -\frac{Ac}{kh} \cos(kx - \omega t), \quad (7.26)$$

のような簡単な数式で書き換えられる。さらに、水の運動軌跡 (7.24a) と (7.24b) は、同様に長波の条件を適用すると、

$$x = x_0 + \frac{A}{kh} \cos(kx_0 - \omega t), \quad (7.27a)$$

$$z = z_0 + \frac{A(z_0 + h)}{h} \sin(kx_0 - \omega t), \quad (7.27b)$$

$$(7.27c)$$

のように簡略化される。ところが、 $1/k \gg h$ であることに注意すると、 z 軸方向の振幅が x 軸方向に比べ無視でき、その結果、水の運動は近似的に x 軸方向の単振動と考えてよいことがわかる。事実、ポテンシャル (7.26) からでは、 x 軸方向の運動しか導出できない。

前の段落で述べたように、長波における水の運動は水平方向 (x 軸方向) の運動が支配的である。しかも、その速度は水深に依存しない。水の運動を表す (7.27a) を時刻 t について微分すると、

$$u_x = A \sqrt{\frac{g}{h}} \sin(kx_0 - \omega t),$$

が導かれる。鉛直方向の運動 (7.27b) と比較すると明らかなように、水平方向の運動速度は波の形状と同位相である。図 7.4 に示すように、水の波が山の位置で水は位相の伝搬方向に運動する。谷の位置では、水は位相の伝搬方向と逆方向に運動する。図に描かれている

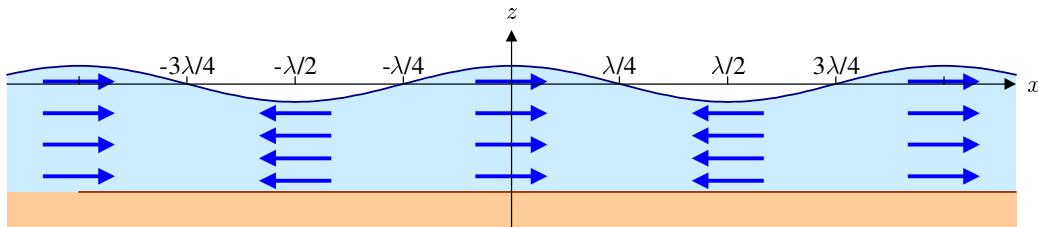


図 7.4: 長波を構成する水の運動

瞬間の波の形状は $x = 0$ に山があるが、すでに $x = 0$ の水は正の方向に運動している。一方、谷である $x = \lambda/2$ の水は負の方向に運動している。時間の経過とともに、水は $x = \lambda/4$ に集まり、山ができる。つまり、時間の経過とともに山は $x = 0$ から $x = \lambda/4$ に移動する。同様に、谷も $x = -\lambda/2$ から $x = -\lambda/4$ に移動する。そのようにして波は伝搬するのだ。

本項で説明したような簡略化されたモデルは水深に比べて波長が十分に長い場合であり、 $\tanh kh \simeq kh$ となることを利用している。双曲線関数 $\tanh x$ のマクローリン展開が、

$$\tanh x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \dots$$

であることに注意すると、 $kh < 0.17$ であれば、簡略化されたモデルが 1% 以内の誤差で表現できているとわかる。その条件を満たす波長の条件は $\lambda > 37h$ である。つまり、水深の 40 倍以上の波長の波に関して、本項で取り扱った長波のモデルが成立する。

7.3.2 短波

短波は水深 h に比べ波長 λ が十分に小さい場合、あるいは、波長 λ に比べ水深 h が十分に大きい場合のモデルであり、**深水波**とも呼ばれる。このモデルでは $hk \gg 1$ となるので、 $\tanh hk \simeq 1$ なる近似が適用される。短波では、波の位相速度は、

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}, \quad (7.28)$$

のように、波長 λ に依存する。つまり、短波は**分散的**である。一般的な風速によって引き起こされる海面波の波長 $\lambda = 100$ m について位相速度を計算すると $c = 12.5$ m/s となる。海の波は自動車と同程度の速度で伝搬するのだ。さらに、波長と位相速度の関係から、この例において振動の周期は 8 秒である。

短波の条件は $hk \gg 1$ であるので、 $\sinh hk \simeq e^{hk}/2$, $\cosh[k(z+h)] \simeq e^{k(z+h)}/2$ なる近似が成立し、速度ポテンシャル (7.22) は、

$$\Phi = -Ace^{kz} \cos(kx - \omega t), \quad (7.29)$$

となる。そのとき、水の運動軌跡 (7.24a) と (7.24b) は、

$$x = x_0 + Ae^{kz_0} \cos(kx_0 - \omega t), \quad (7.30a)$$

$$y = y_0 + Ae^{kz_0} \sin(kx_0 - \omega t), \quad (7.30b)$$

となる。つまり、短波に相当する水は、図 7.5 に示すように、 xz 平面内を半径 Ae^{kz_0} で円運動するのだ。水面の近くでは、水平方向に収縮し、鉛直方向に引き伸ばされた水が波の山となり、水平方向に引き伸ばされ、鉛直方向に縮められた水が波の谷となる。円運動の半

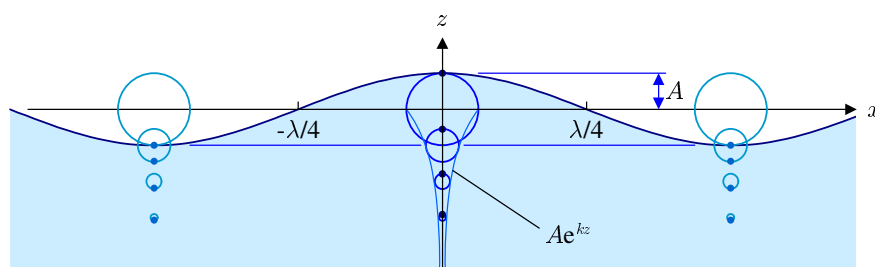


図 7.5: 短波を構成する水の運動

径は水深とともに指数関数的に減少し、波長の深さ $|z_0| = \lambda/2$ において、振幅は水面での 4.3% まで減少する。つまり、水の運動は、せいぜい、半波長程度の水深までしか及ばないのだ。それ以上での水深では水はほとんど運動しない。

短波に相当する例は、風によって引き起こされる海の波である。上で説明した近似は、 $\tanh kh \simeq 1$ であることを利用している。双曲線関数 $\tanh x$ が、

$$\tanh x = \frac{x^x - e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = 1 - \frac{2}{e^{2x} + 1},$$

であることに注意すると、 $\tanh x = 1$ と考えたときの誤差が1%未満になるのは、 $x > 2.65$ のときである。つまり、 $hk > 2.65$ から $\lambda < 2.37h$ が導かれる。したがって、波長が水深の2倍以下であるとき短波近似が成立する。

7.3.3 表面張力波

波長が短い波では表面張力の影響が無視できなくなる。本節では表面張力波が波の形成に与える影響を考察する。これまで議論してきた水深一定での1次元正弦波は、ラプラス方程式 (7.13) と水底での境界条件 (7.14a) がそのまま適用できる。一方、水面での境界条件 (7.14b) に表面張力による作用が加わる。

これまでと同様に1次元波を取り扱うので、水面は xz 平面上での曲線を取り扱う。その曲線の曲率を κ とすれば、曲率半径は $R = 1/\kappa$ となる。曲率 κ の水面には、表面張力によって水の内部に向かう力 $\delta p = -\gamma\kappa$ が作用する。ここで、 γ が表面張力である。凸形状の曲率 κ が正になるので、水の内部に向かう力を表現するために負の符号を付した。そのとき、水の圧力 p と大気圧 p_0 の間には、

$$\delta p = p - p_0 = -\gamma\kappa, \quad (7.31)$$

が成立する。水面の形状が $z = \zeta(x, t)$ で表されるとき、水面の曲率は、

$$\kappa = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \left/ \left[1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 \right]^{3/2} \right.,$$

で与えられる。微小振幅波を取り扱ううえで、 $\partial \zeta / \partial x$ は微小量であるので、その自乗は無視できると考えよう。したがって、水面の曲率は近似的に、

$$\kappa = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}, \quad (7.32)$$

である。その近似のもとで、表面張力波は、

$$\delta p = -\gamma \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}, \quad (7.33)$$

と書くことができる。

表面張力の影響下で、圧力方程式 (7.8) は、圧力を $p = p_0 + \delta p$ として適用すればよい。そのとき、水面における一般化されたベルヌーイの定理 (7.9) は、

$$\zeta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2g} |\nabla \Phi|^2 - \frac{\delta p}{\rho g}, \quad (7.34)$$

となる。微小振幅波を考えているので Φ についての 2 次の項を無視し、 δp の関係式 (7.33) を代入すると、方程式 (7.34) は、

$$\zeta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\gamma}{\rho g} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}, \quad (7.35)$$

のように書き換えられる。この方程式の右辺の第 2 項が表面張力による寄与である。

これまでに議論してきた水の波で扱った水面での境界条件は、(7.10) から得られた。その数式を再び書くと、

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} \quad \text{for } z = \zeta,$$

である。ただし、この方程式に含まれる ζ は (7.35) で定義されている。この方程式を変形することによって、水面における境界条件:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \left(g - \frac{\gamma}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{for } z = 0, \quad (7.36)$$

が得られる。この結果は、表面張力を考慮しない場合の水面の境界条件 (7.12) について、 g を $g - (\gamma/\rho)\partial^2/\partial x^2$ で置き換えた結果に相当する。解として、 $\Phi = \phi(z) \cos(kx - \omega t)$ を仮定すると、 g を $g - \gamma k^2/\rho$ で置き換えた解釈すればよいだろう。そのように考えると、表面張力を考慮した場合、波の角速度は、

$$\omega = \sqrt{\left(g + \frac{\gamma k^2}{\rho} \right)} k \tanh kh, \quad (7.37)$$

となるはずだ。この数式を書き換えると、位相速度が、

$$c = \sqrt{\left(\frac{g}{k} + \frac{\gamma k}{\rho} \right) \tanh kh} = \sqrt{\left(\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\gamma}{\rho\lambda} \right) \tanh \frac{2\pi h}{\lambda}}, \quad (7.38)$$

であることが導かれる。

表面張力の影響は波長が小さい場合にのみ現れる。なぜなら、長波の条件 $\lambda \gg h$ を (7.38) に代入すると、 $c \simeq \sqrt{gh}$ となり、表面張力がない場合の位相速度と一致するからだ。つまり、波の性質に表面張力の影響がほとんど寄与していないのだ。一方、短波の条件では $\tanh kh \simeq 1$ であるので、位相速度は、

$$c = \sqrt{\frac{g}{k} + \frac{\gamma k}{\rho}} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\gamma}{\rho\lambda}}, \quad (7.39)$$

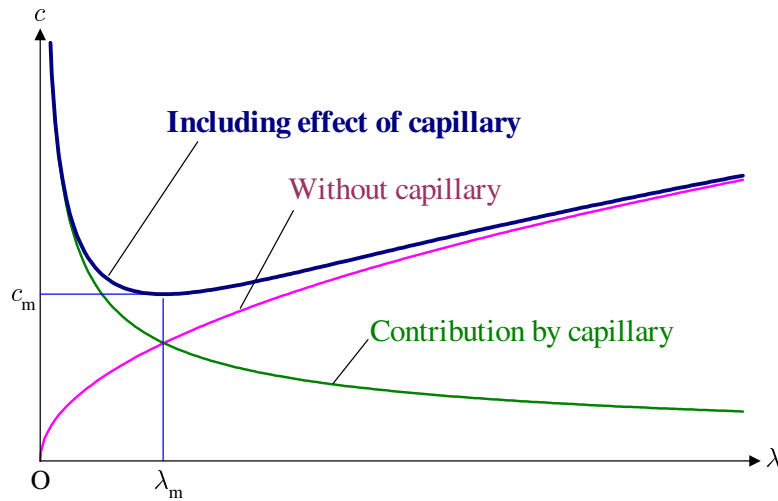


図 7.6: 表面張力を考慮した短波の位相速度

となる。位相速度 (7.39) には、図 7.6 に示すように表面張力の影響が表れている。表面張力の考慮がない場合、波長が短くなれば、その平方根に比例して位相速度が小さくなっていった。しかし、表面張力による寄与 (数式 (7.39) の平方根内の第 2 項) は、波長が小さくなると大きくなる。その影響によって、波長が小さくなると、表面張力を考慮した位相速度は大きくなる。正確に述べるなら、

$$\lambda_m = 2\pi\sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}, \quad (7.40)$$

が最も位相速度が小さくなる波長である。この長さより短い波長では位相速度が速くなる。言い換えると、波長が $\lambda < \lambda_m$ の条件では表面張力の影響が顕著になるわけだ。そのような波は、**表面張力波** (capillary wave)、または、**さざ波** (ripple) と呼ばれる。なお、波長が λ_m のとき、位相速度は最小値:

$$c_m = \sqrt[4]{\frac{4\gamma g}{\rho}}, \quad (7.41)$$

となる。一方、表面張力の影響が小さい波は、重力を復元力とするため**重力波**¹ (gravity wave) と呼ばれる。なお、位相速度 (7.39) は、 λ と c_m を用いると、

$$c = c_m\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\lambda_m} + \frac{\lambda_m}{\lambda}\right)}, \quad (7.42)$$

なる簡単な数式で表現できる。

温度 20°C の水について、表面張力の影響を計算しよう。その温度での表面張力は $\gamma = 7.3 \times 10^{-2}$ mN/m である。密度 $\rho = 1.0 \times 10^3$ kg/m³ と重力加速度 9.8 m/s² を上で導出し

¹同じ名称であるが、アインシュタインの重力理論による重力作用が伝搬する波とは異なる。英語では、重力を復元力とする水の波は gravity wave, 重力作用を伝搬する波は gravitational wave のように、異なる用語で区別されている。

た公式に代入すると, $\lambda_m = 0.017 \text{ m}$, $c_m = 0.23 \text{ m/s}$ が計算される。つまり, 波長が 1.7 cm 以下の波は表面張力波ということだ。

7.4 位相速度と群速度

既に示したように, 短波では位相速度が波数 k (または波長 λ) によって異なる。そのような性質は, 分散的であると呼ばれる。分散的な波は, 位相速度がエネルギーを伝搬する速度とは異なる。エネルギーの伝搬速度は, **群速度**と呼ばれる速度である。本節では群速度について説明する。

分散的な波を考え, 波数 k と角速度 ω において, 波数が微小量 δk だけずれたとき, 角速度が $\delta\omega$ だけ変化するとしよう。正方向に波数がずれた波と負方向に波数がずれた波を重ね合わせたとしよう。重ね合わされた波は形式的に,

$$\begin{aligned} f(t) &= A \cos [(k + \delta k)x - (\omega + \delta\omega)t] + A \cos [(k - \delta k)x - (\omega - \delta\omega)t] \\ &= 2A \cos(\delta k \cdot x - \delta\omega \cdot t) \cos(kx - \omega t), \end{aligned} \quad (7.43)$$

のように数式表現できる。重ね合わされた波は, 二つの正弦関数 (余弦関数) の積になっている。その因数のうち, $\cos(\delta k \cdot x - \delta\omega \cdot t)$ は, もう一方に比べ, 小さな波数で遅い角速度の波動関数である。つまり, 小さな波数で遅い角速度の波動関数は, 包絡線に対応する。その包絡線の中に, 大きな波数で速い角速度の波が入っている構造になっている。包絡線の位相が一定になる条件から, 包絡線の伝搬速度を計算しよう。包絡線の位相が一定のなる条件は, 形式的に,

$$\delta k \cdot x - \delta\omega \cdot t = \text{const},$$

となる。この数式を全微分すると,

$$\delta k \cdot dx - \delta\omega \cdot dt = 0,$$

が得られる。ここで, dx/dt が, 特定の包絡線位相の伝搬速度であるので, それは包絡線の伝搬速度に他ならない。その意味で, $c_g \equiv dx/dt$ なる記号を用いると,

$$c_g = \frac{\delta\omega}{\delta k},$$

が導かれる。なお, 波数と角速度のずれをゼロに近づけると,

$$c_g = \frac{d\omega}{dk}, \quad (7.44)$$

が得られる。それに対し, 位相速度は速い方の波動関数の位相が一定となる条件 $kx - \omega t = \text{const}$ から, $c_p = \omega/k$ なる公式が得られる。いうまでもなく, この公式はこれまで利用してきた公式と同一である。

