

付録A 楕円積分・楕円関数

力学の問題において、しばしば、初等関数の範囲で積分ができない形に遭遇することがある。その典型的な例が楕円積分である。また、その逆関数は楕円関数と呼ばれる。本書では、数回ほど楕円積分や楕円関数が登場している。

A.1 楕円積分

一般的な楕円積分ではなく、代表的な楕円積分として、第1種と第2種との楕円積分を紹介しよう。それらの積分は、

$$F_J(k, x) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad E_J(k, x) = \int_0^x \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}} dx, \quad (\text{A.1})$$

のように定義される。これらはヤコビの標準形と呼ばれる形式である。この積分には、変数 x の他にパラメータ k を伴っている。その k は母数と呼ばれる。また、 $k'^2 \equiv 1 - k^2$ のように定義される k' は補母数と呼ばれる。ヤコビの標準形に対し、 $x = \sin \phi$ とおくと、楕円積分は、

$$F(k, \phi) = \int_0^\phi \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi}}, \quad E(k, \phi) = \int_0^\phi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi} d\phi, \quad (\text{A.2})$$

なる形に書き換えることができる。この形態はルジャンドルの標準形と呼ばれる。ヤコビの標準形とルジャンドルの標準形は、

$$F_J(k, \sin \phi) = F(k, \phi), \quad E_J(k, \sin \phi) = E(k, \phi),$$

のように対応づけられる。また、これらの楕円積分の特別な形として、

$$K(k) = F(k, \pi/2) = F_J(k, 1), \quad E(k) = E(k, \pi/2) = E_F(k, 1), \quad (\text{A.3})$$

なる完全楕円積分が頻繁に使われる。第1種完全楕円積分 $K(k)$ は一般振り子の周期が代表的な応用例であり、第2種完全楕円積分 $E(k)$ は楕円の周囲長が代表的である。楕円

積分という名称は、第2種楕円積分が楕円の周囲長の計算に用いられることに由来する。それらの完全楕円積分は、

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1^2}{2^2} k^2 + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2} k^4 + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} k^6 + \dots \right), \quad (\text{A.4a})$$

$$E(k) = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{2^2} k^2 - \frac{1^2 \cdot 3}{2^2 \cdot 4^2} k^4 - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} k^6 - \dots \right), \quad (\text{A.4b})$$

のように級数表現できる。また、第1種完全楕円積分 $K(k)$ は、後に紹介するヤコビの楕円関数 (sn 関数) の周期を与える重要な積分である。

A.2 ヤコビの楕円関数

ヤコビの楕円関数 (sn 関数) は第1種楕円関数の逆関数として定義される。例えば、 $F(k, x) = u$ とするならば、 $x = \text{sn}(u; k)$ と書かれるのだ。この記述法では、母数 k を明記しているが、特に明記の必要がない場合、 $x = \text{sn } u$ のように簡略する。

ヤコビの楕円関数 $\text{sn } x$ に対応し、補助関数 $\text{cn } x$ と $\text{dn } x$ が定義される。それらの定義は、 $\text{cn}^2 x = 1 - \text{sn}^2 x$ 、 $\text{dn}^2 x = 1 - k^2 \text{sn}^2 x$ なる形で与えられる。これらの楕円関数をグラフとしてプロットすると図 A.1 のような曲線を描く。そのうち、 $\text{sn } x$ と $\text{cn } x$ は、ゼロを中心とする振幅1で、周期 $4K$ の周期関数である。それに対し、 $\text{dn } x$ は $k' (= \sqrt{1 - k^2})$ から1まで変化し、周期 $2K$ の周期関数だ。なお、 K は前節で紹介した完全楕円積分だ。ヤコビ

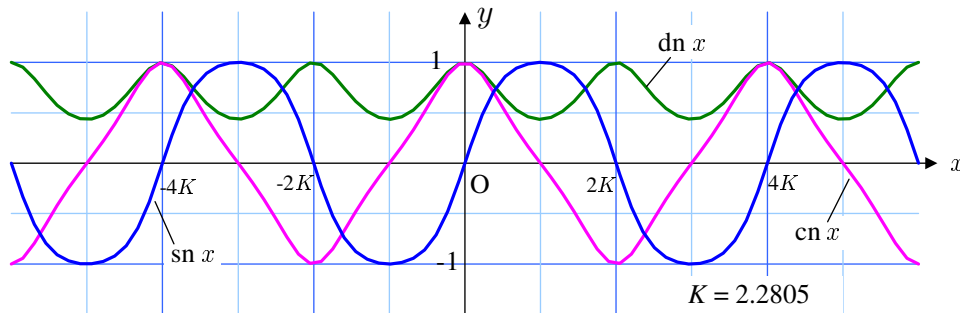
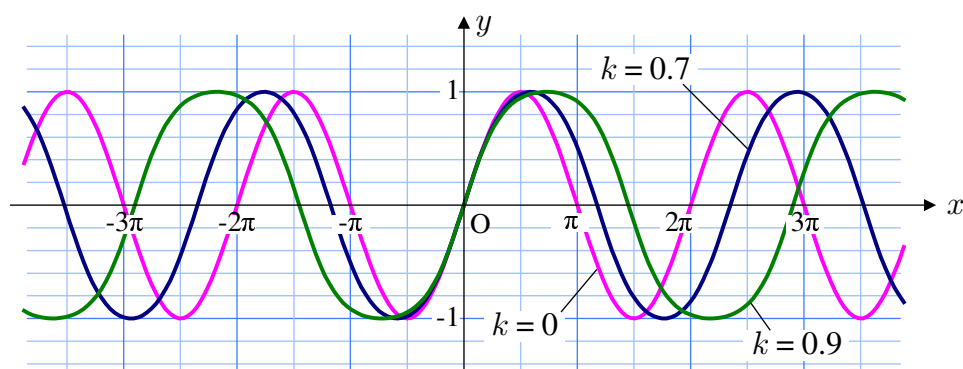


図 A.1: ヤコビの楕円関数と補助関数 ($k = 0.9$)

の楕円関数 $\text{sn } x$ は $k = 0$ のとき $\sin x$ と一致する。その特別な場合の周期は $4K = 2\pi$ である。その特別な場合を除き、 $4K > 2\pi$ となるので、一般的な楕円関数の周期は 2π より長い。母数 k が大きくなるほど、sn 関数の形状は正弦波からさらにひずんだ形状となり、周期が長くなる。それに対応し、cn 関数や dn 関数もひずみが大きくなる。

母数 k の設定に対する sn 関数の形状や周期は図 A.2 に示すように変化する。上で述べたように、 $k = 0$ のとき、ヤコビの楕円関数 $\text{sn } x$ は正弦関数 $\sin x$ と一致する。母数 k が大

図 A.2: 母数 k と楕円関数 $\operatorname{sn} x$ の関係

きくなると、頂点付近がなだらかに伸び、周期が長くなっている。例えば、 $k = 0.9$ のとき、 $\operatorname{sn} x$ の周期は、 $\sin x$ の約 1.45 倍も長くなっている。

蛇足 ヤコビの楕円関数として命名された sn 関数は、 $k = 0$ のとき正弦関数と一致することに由来する。その事実は、(A.1) が $k = 0$ のとき $\arcsin x$ となることから明らかだろう。つまり、ヤコビの楕円関数は、 \sin の第 2 文字目を削除し、 sn 関数と命名された。一方、 $\sqrt{1 - \operatorname{sn}^2 x}$ となる関数は、余弦関数 \cos に類似しているため、 cn 関数と命名された。この関数名が cs 関数とならなかったことは、いささか不可解である。さらに、 $\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 x}$ となる関数は、 cn 関数と同様に、 sn 関数の補助関数である。関数名は cn に続いて、 dn 関数という命名法であろう。