第1章　楕円積分

楕円の周囲長や単振り子の周期を計算する積分のように, 被積分関数が初等的であるにも関わらず, 解析的に積分が実行できないことがある。積分を実行するにあたり, どのように変数を置き換えても積分が実行できず, 計算が行き詰ることがある。そのような積分のいくつかは楕円積分と呼ばれる積分である。本章は楕円積分を導入して, 解析的に積分できる関数の幅を拡張しよう。

1.1　積分の実行

積分を解析的に実行するとはどのようなことであろうか? 結論を述べると, 微分に関する事前知識と数学公式を組み合わせ, 微分する前の関数, すなわち, 原始関数を導き出すことが, 積分を解析的に実行することである。

例えば, x についての積分を考えよう。被積分関数が x ならば $x^2/2$ が得られる。また, 被積分関数が $\sqrt{x}$ ならば $2x^{3/2}/3$ が得られる。このように解析的に積分が実行できるのは, x^p の導関数が px^{p-1} になるという事前知識があるからである。さらに, $2x\cos x^2$ を積分すると $\sin x^2$ が得られることを導けるのも同様である。この場合は, $\sin x$ の導関数が $\cos x$ であり, x^2 の導関数が $2x$ であるという事前知識を応用しただけに過ぎない。

次の例として, $\sqrt{1-x^2}$ の積分を考えよう。この積分は x の多項式のように単純には積分できないので, 事前知識に合致できる形に変形できるかを考えるのだ。例えば, $t=\sin x$ なる変数を導入してみると,

$$\begin{aligned}\int\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x &= \int\cos t\cdot\cos t\,\mathrm{d}t = \int\cos^2 t\,\mathrm{d}t\\ &= \int\frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4},\end{aligned}$$

のように計算できる。しかし, この積分結果は勝手に設定した t で記述されているだけなので, これでは不十分である。変数を x に戻す必要があるのだ。三角関数の基本知識があれば, 第 2 項は変数を戻すことができ,

$$\int\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{t}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2},$$

が得られる。第 1 項の t は, $\sin x = t$ を満たす t である。言い換えると, $\sin x$ の逆関数である。その逆関数は逆正弦関数と呼ばれ, $\arcsin x$ なる記号で定義される。新たに定義された記号を用いると,

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right),$$

のように解析的に積分を実行することができるのだ。つまり, この例は正弦関数の逆関数である逆正弦関数 $\arcsin x$ を用いて積分を実行することができた。

上に示した例は, 積分自体は初等関数の知識で実行でき, 数式として記述する際に逆正弦関数を定義した。その例とは異なり, 初等的な数式であるにもかかわらず, 積分の実行を試みても, 初等関数の範囲内での形式に収まらない場合がある。次節では, 初等関数で実行できない積分のうち, 楕円積分と呼ばれる例を取り扱ってみよう。

1.2　楕円積分の例

前節で $\sqrt{1-x^2}$ の積分が, 逆正弦関数を用いて実行できることを示した。しかし, この被積分関数と類似した関数は初等関数の範疇で解析的に積分できない。その例として, 本節では単振り子の周期と楕円の周囲長を取り扱う。

1.2.1　単振り子の周期

ガリレイが 16 世紀に発見した単振り子の周期の一定性は, 振れ幅が小さいときの近似にすぎない。任意の振れ幅で運動する単振り子の周期は, その振れ幅に依存する。正確に言うと, 振れ幅が大きいほど単振り子の周期は大きくなる。短振り子の周期は楕円積分の例である。本節では, 単振り子の周期を計算する。

図 1.1 に示す長さ l の振り子を考えよう。振り子の端点の一方が支点でもう一方が錘である。錘の位置を鉛直下方から測った角度 θ で表すものとする。錘には, 図に示すように鉛直下方に重力 mg が作用している。ここで, m は錘の質量, g は重力加速度である。その重力が錘を半径 l の円弧に沿った往復運動をさせる。錘の位置を, 鉛直下方から測った角度 θ で表すと, 錘の運動を与えるニュートンの運動方程式は, 角度 θ に関する 2 階微分方程式:

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta,$$

となる。この運動方程式は,

$$\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta,$$

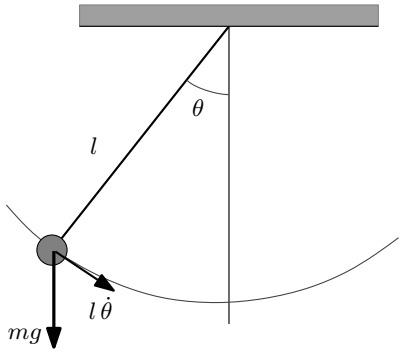

図 1.1: 単振り子

のように書き換えておくと便利である。ここで, $\dot{\theta}$ は角度 θ の時間微分である。つまり, $l\dot{\theta}$ は振り子の速度である。まず, 初等的な例として $\theta \ll 1$ としよう。その場合, 運動方程式は近似的に,

$$\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}t} = -\frac{g\theta}{l},$$

と書くことができる。この微分方程式を解くと,

$$\dot{\theta} = -\sqrt{\frac{g\left(\theta_0^2 - \theta^2\right)}{l}},$$

が得られる。ここで, θ_0 は振り子の最高点を意味する積分定数である。つまり, $\theta = \theta_0$ において $\dot{\theta} = 0$ となるように積分定数を選んでいる。

振り子の周期を計算するには, 角度 θ の 1 階微分 $\dot{\theta}$ を利用するのが便利である。振り子の周期 T は, 角度 0 から最高点 θ_0 まで振り子が移動する時間の 4 倍であるから,

$$T = 4\int_{\theta=0}^{\theta_0} \mathrm{d}t = 4\int_0^{\theta_0} \frac{\mathrm{d}\theta}{\dot{\theta}} = \frac{4}{\theta_0}\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\theta_0} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-\theta^2/\theta_0^2}},$$

のように計算できる。この式の右辺の積分は逆正弦関数 (arcsine) で与えることができ,

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\left[\arcsin\frac{\theta}{\theta_0}\right]_{\theta=0}^{\theta_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

が得られる。このように, 振れ幅が小さい振り子は, 初等的な積分で周期が計算でき, しかも, ガリレイが発見したように計算される周期は振れ幅 θ_0 に依存せず一定である。しかし, それは $\theta \ll 1$ に限られた特殊なケースである。

次に, 任意の振れ幅の振り子について周期を計算しよう。振れ幅が小さいという条件をはずしただけなのに, 問題は難しくなる。角度 θ について近似を適用せず $\dot{\theta}$ について微分方程式を解くと,

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2g\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)}{l}} = 2\sqrt{\frac{g}{l}\left(\sin^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right)},$$

が得られる。この式の右辺への変形には半角の公式を用いた。この結果を利用すると, 振り子の周期 T を計算するための数式は,

$$
\begin{aligned}
T &= 4\int_0^{\theta_0} \frac{\mathrm{d}\theta}{\dot{\theta}} = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\theta_0} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\sin^2(\theta_0/2)-\sin^2(\theta/2)}} \\
&= 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-x^2\sin^2(\theta_0/2))}},
\end{aligned}
$$

のように書くことができる。第 2 行目への数式変形には, $x=\sin(\theta/2)/\sin(\theta_0/2)$ なる置き換えを適用した。さらに, $k=\sin(\theta_0/2)$ とおくと,

$$
T = 4\sqrt{\frac{g}{l}}\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = 4\sqrt{\frac{g}{l}}\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},
$$

のように数式変形できる。この積分は初等関数によって与えることはできない。仕方ないので, 被積分関数を級数展開して積分を実行してみよう。右辺の被積分関数を展開すると, その積分は,

$$
T = 4\sqrt{\frac{g}{l}}\int_0^{\pi/2} \left(1+\frac{1}{2}k^2\sin^2\varphi+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}k^4\sin^4\varphi+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}k^6\sin^6\varphi+\cdots\right)\mathrm{d}\varphi,
$$

のように書き換えられる。その被積分関数にウォリスの積分公式:

$$
\int_0^{\pi/2} \sin^{2m}\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2m-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2m}\frac{\pi}{2},
$$

を利用すると, 一般振り子の周期 T は,

$$
T = 2\pi\sqrt{\frac{g}{l}}\left(1+\frac{1^2}{2^2}k^2+\frac{1^2\cdot 3^2}{2^2\cdot 4^2}k^4+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}k^6+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^2}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8^2}k^8+\cdots\right),
$$

のように計算される。ここで, $k=\sin(\theta_0/2)$ であることを思い出すと, 振り子の最高点 θ_0 が十分に小さいとき, 周期は θ_0 に依存せず $2\pi\sqrt{l/g}$ になる。逆に, θ_0 が大きくなるほど周期が長くなる。この級数は $\theta_0=30^\circ$ $(=\pi/6)$ で, k^8 の項まで計算すれば有効数字は 5 桁以上確保できる。この級数を用いて一般振り子の周期を計算すると図 1.2 のようになる。この計算では振り子の長さは 0.2482 m とした。それは, 振れ幅が小さいとき周期がちょうど 1 秒になる長さである。 最高点 θ_0 が 60 度以内では周期は 1.1 秒に満たない。しかし, 135 度を超えると周期が急激に伸び, 最高点が 180 度になると周期が無限大になる。最高点が 180 度いうことは, 振り子が支点の真上の不安定な位置で釣り合っているため振り子が移動できないと考えると, 周期が無限大であることが理解できるだろう。

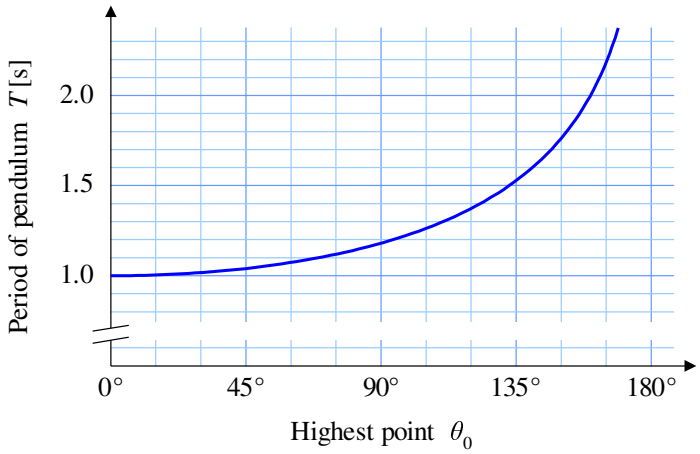

図 1.2: 一般振り子の周期 (長さ 0.2482 m)

1.2.2　楕円の周囲長

楕円の周囲長の計算も, 初等関数を用いて実行できない積分の例である。その問題に関しても, 前節と同様に級数展開を用いて実行してみよう。長半径が 1 で, 短半径が k' の楕円:

$$x^2 + \frac{y^2}{k'^2} = 1,$$

の周囲長を計算してみよう。この楕円の式を y について解くと,

$$y = \pm k'\sqrt{1-x^2},$$

となり, 楕円の周囲に渡って $\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}$ を積分すれば楕円の周囲長が計算できるはずなので,

$$\begin{aligned} L &= 4\int_0^1 \sqrt{\frac{1-(1-k'^2)x^2}{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = 4\int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi, \end{aligned}$$

のように計算できる。この計算は, 第 1 象限での積分を 4 倍することで周囲長を算出しようとしている。第 1 行目の数式変形では $k'^2 = 1 - k^2$ なる置き換えを実行している。また, 置き換えられた記号 k は離心率と呼ばれるパラメータである。第 2 行目への変形では $x = \sin\varphi$ なる置き換えを適用した。積分を実行するため, 被積分関数をテイラー展開すると,

$$L = 4\int_0^{\pi/2}\left(1 - \frac{1}{2}k^2\sin^2\varphi - \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}k^4\sin^4\varphi - \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}k^6\sin^2\varphi - \cdots\right)\mathrm{d}\varphi,$$

のようになる。この積分を実行するにはウォリスの公式を使えば,

$$L = 2\pi\left(1 - \frac{1}{2^2}k^2 - \frac{1^2\cdot 3}{2^2\cdot 4^2}k^4 - \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}k^6 - \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8^2}k^8 - \cdots\right),$$

のように計算できる。この計算結果は図 1.3 のようになる。このグラフは横軸を離心率 k として長半径が 1 の楕円の周囲長をプロットしている。離心率がゼロならば円であるので周囲長は 2π である。 離心率が 0.4 付近までは, 周囲長の現象は緩やかであるが, それより

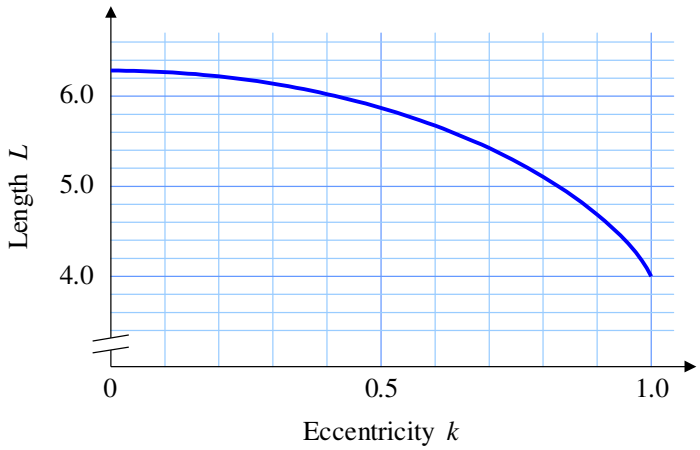

図 1.3: 長半径 1 の楕円の周囲長

離心率が大きくなると周囲長は急激に減少する。離心率が 1 になると, 楕円は一直線上につぶれてしまうため, 周囲長は 4 となる。

1.3　楕円積分の標準形

前に紹介した一般振り子の周期や, 楕円の周囲長の計算に用いた積分は楕円積分と呼ばれる。楕円積分という名称は, 被積分関数に楕円の周囲長の計算に用いられる $\sqrt{1-k^2x^2}$ が含まれることに由来する。

数学の分類として, x の整式 $p(x)$ の平方根と x による有理式 $f(x)$ の積分:

$$\int f\left(x, \sqrt{p(x)}\right) \mathrm{d}x$$

を考えたとき, $p(x)$ が 1 次式, または, 2 次式とき積分は初等関数で記述できる。しかし, $p(x)$ が 3 次以上になると初等関数で記述できない。特に, $p(x)$ が 3 次式か 4 次式の場合の積分は楕円積分と呼ばれる。ついでに, $p(x)$ が 5 次式以上の積分は超楕円積分と呼ばれる。

楕円積分は, 変数変換と数式変形によって次の 3 つのパターンに分類される。

$$F_{\mathrm{J}}(k,x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \tag{1.1a}$$

$$E_{\mathrm{J}}(k,x) = \int_0^x \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\,\mathrm{d}x, \tag{1.1b}$$

$$\Pi_{\mathrm{J}}(k,n,x)=\int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{(1-nx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}. \tag{1.1c}$$

これらの積分は, ヤコビの標準形と呼ばれる形式であり, 上から順に第 1 種, 第 2 種, 第 3 種の楕円積分の標準形である。第 1 種の楕円積分は一般振り子の周期で, 第 2 種の楕円積分は楕円の周囲長の計算で既に紹介している。なお, 楕円積分のパラメータ k は母数と呼ばれる。また, $k'=\sqrt{1-k^2}$ は補母数と呼ばれる。楕円積分の標準形は, $x=\sin\varphi$ のように置き換えて,

$$F(k,\varphi)=\int_0^\varphi \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \tag{1.2a}$$

$$E(k,\varphi)=\int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi, \tag{1.2b}$$

$$\Pi(k,n,\varphi)=\int_0^\varphi \frac{\mathrm{d}\varphi}{(1-n\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}. \tag{1.2c}$$

なる形で書かれることが多い。この形式はルジャンドルの標準形と呼ばれる。容易にわかるように, ヤコビの標準形とルジャンドルの標準形は,

$$F_{\mathrm{J}}(k,\sin\varphi)=F(k,\varphi),\quad E_{\mathrm{J}}(k,\sin\varphi)=E(k,\varphi),\quad \Pi_{\mathrm{J}}(k,n,\sin\varphi)=\Pi(k,n,\varphi),$$

のように対応づけられる。特に, 第 1 種と第 2 種の標準形において, 積分区間を $[0,\pi/2]$ とした定積分を完全楕円積分と呼ぶ。第 1 種と第 2 種の完全楕円積分は形式的に,

$$\begin{aligned}K(k)=F(k,\pi/2)&=\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\\&=F_{\mathrm{J}}(k,1)=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},\end{aligned} \tag{1.3a}$$

$$\begin{aligned}E(k)=E(k,\pi/2)&=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi\\&=E_{\mathrm{J}}(k,1)=\int_0^1\sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\,\mathrm{d}x,\end{aligned} \tag{1.3b}$$

と書かれる。完全楕円積分は, 既に一般振り子の周期と, 楕円の周囲長のために計算をした。その結果を再び書くと, 完全楕円積分は,

$$K(k)=\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1^2}{2^2}k^2+\frac{1^2\cdot3^2}{2^2\cdot4^2}k^4+\frac{1^2\cdot3^2\cdot5^2}{2^2\cdot4^2\cdot6^2}k^6+\frac{1^2\cdot3^2\cdot5^2\cdot7^2}{2^2\cdot4^2\cdot6^2\cdot8^2}k^8+\cdots\right), \tag{1.4a}$$

$$E(k)=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{2^2}k^2-\frac{1^2\cdot3}{2^2\cdot4^2}k^4-\frac{1^2\cdot3^2\cdot5}{2^2\cdot4^2\cdot6^2}k^6-\frac{1^2\cdot3^2\cdot5^2\cdot7}{2^2\cdot4^2\cdot6^2\cdot8^2}k^8-\cdots\right), \tag{1.4b}$$

なる級数で計算できる。この級数は次数が小さいうちは収束性がよい[1]。例えば, $K(k)$ は最初の 4 項 (k^6 の項まで) で誤差は 0.15 %程度になる。第 1 種と第 2 種の楕円関数をさらに優れた収束速度で計算する手法として, ランデン変換を次節で紹介する。

[1]つまり, 次数を大きくしていくとあまり有効桁が伸びなくなるという意味でもある。

1.4　ランデン変換による積分計算

楕円積分は物理学で登場することも多く, 興味深い。その積分値は既に示したように, 級数展開によって計算することができる。一方, 完全楕円積分はランデン変換というまったく異なる手法で計算することもできる。本節ではランデン (Landen) 変換による完全楕円積分の計算手法を導出する。

1.4.1　ランデン変換

ランデン変換は, 楕円積分の母数を増減する作用がある数学変換である。楕円積分の母数 k と, 積分変数 φ について,

$$k_1 = \frac{1-k'}{1+k'}, \tag{1.5a}$$

$$\tan(\varphi_1 - \varphi) = k' \tan\varphi, \tag{1.5b}$$

を用いて, 新たな母数 k_1 と積分変数 φ_1 を定義する。ここで, $k' \equiv \sqrt{1-k^2}$ は楕円関数の補母数である。この変換はランデン変換と呼ばれる。後の計算でも使うため, (1.5a) を逆変換して,

$$k' = \frac{1-k_1}{1+k_1}, \qquad k = \frac{2\sqrt{k_1}}{1+k_1},$$

となることを注意しておく。この変換式から楕円積分計算に必要な性質を抽出していこう。変換式 (1.5b) から即座に,

$$\sin(\varphi_1 - \varphi) = \frac{k' \sin\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \qquad \cos(\varphi_1 - \varphi) = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

が導かれるが, これに三角関数の加法定理を適用すると,

$$\sin(2\varphi - \varphi_1) = \frac{(1+k')\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \qquad \sin\varphi_1 = \frac{(1-k')\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

$$\cos(2\varphi - \varphi_1) = \frac{\cos^2\varphi - k'\sin^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \qquad \cos\varphi_1 = \frac{\cos^2\varphi + k'\sin^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

が得られる。これらの間の関係を調べると,

$$\sin(2\varphi - \varphi_1) = k_1 \sin\varphi, \tag{1.6a}$$

$$\cos(2\varphi - \varphi_1) + k_1\cos\varphi = (1+k_1)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}, \tag{1.6b}$$

を得ることができる。これを楕円積分に応用すると強力な効果を発揮するのである。その効果を以降の節で説明する。

1.4.2　第 1 種楕円積分への応用

楕円積分の母数を増減させるだけの変換に見えるランデン変換は, 第 1 種楕円関数を計算するための有力な手法である。本節はランデン変換を第 1 種楕円積分に応用し, その強力な効果を示す。関係式 (1.6a) を微分して得られる数式:

$$\cos(2\varphi - \varphi_1) \cdot (2d\varphi - d\varphi_1) = k_1 \cos\varphi_1 \, d\varphi_1,$$

を整理して, (1.6b) に注目すると,

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} = \frac{1 + k_1}{2} \frac{d\varphi_1}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2\varphi_1}}, \tag{1.7}$$

を導き出せる。この式の両辺を積分すると,

$$F(k, \varphi) = \frac{1 + k_1}{2} F(k_1, \varphi_1), \tag{1.8}$$

を得る。つまり, ランデン変換によって, 楕円積分を母数が小さい楕円積分で表すことができる。ランデン変換を繰り返せば k をさらに小さくすることができる。

ランデン変換の反復　実際の数値計算では (1.8) を繰り返し適用すれば効率的に第 1 種楕円積分を計算できる。補母数について, $a \geq b$ なる正の実数を用いて $k' = b/a$ とおき, $a_1 = (a + b)/2$, $b_1 = \sqrt{ab}$ とすれば, $k_1 = b_1/a_1$, $1 + k_1 = a/a_1$ が成立することは容易にわかる。

さらにランデン変換を繰り返し, 母数 k_1 から $k_2, k_3, k_4, \ldots$ をつくることを考えよう。すなわち,

$$k_{n+1} = \frac{1 - k'_n}{1 + k'_n}, \qquad \tan(\varphi_{n+1} - \varphi_n) = k'_n \tan\varphi_n,$$

を適用した場合を想定する。さらに, 先ほどの a_1, b_1 から $a_{n+1} = (a_n + b_n)/2$, $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ を定義すると, $k'_n = b_n/a_n$, $1 + k_n = a_{n-1}/a_n$ が成り立つことは帰納的に証明できる。

第 1 種楕円積分に関するランデン変換 (1.8) を繰り返し適用してみると,

$$F(k, \varphi) = \frac{a}{a_1} \frac{F(k_1, \varphi_1)}{2} = \frac{a}{a_2} \frac{F(k_2, \varphi_2)}{2^2} = \cdots = \frac{a}{a_n} \frac{F(k_n, \varphi_n)}{2^n},$$

が得られる。ランデン変換を無限に繰り返し, $n \to \infty$ とすれば, $k_n \to 0$ となるので, $F(k_n, \varphi_n) \to \varphi_n$ となる。さらに, $b_n \leq b_{n+1} \leq a_{n+1} \leq a_n$ という事実から, 系列 a_n と b_n は共通の極限値 $M(a, b)$ に収束することも明らかである。この極限値 $M(a, b)$ は, a と b の算術幾何平均とよばれるが, これを用いると,

$$F(k, \varphi) = \lim_{n \to \infty} \frac{a\,\varphi_n}{2^n M(a, b)}, \tag{1.9}$$

と書くことができる。

特に $\varphi = \pi/2$ の場合, すなわち, 第 1 種完全楕円積分について考えてみる。積分変数 φ_n が $\pi/2$ の整数倍であれば, (1.6b) より $\varphi_{n+1} = 2\varphi$ となるので, $\varphi_n = 2^{n-1}\pi$ と書くことができる。よって, 第一種完全楕円積分は

$$K(k) = \frac{a\pi}{2M(a,b)}, \tag{1.10}$$

で計算することができる。この手法で計算すると, 繰り返し回数 n を 1 つ増加するごとに, 有効数字が 2 倍になる特徴がある。その収束性は 2 次収束と呼ばれる性質である。その収束速度については, 第 7 章で解説する。

1.4.3　第 2 種楕円積分への応用

第二種楕円積分についても, ランデン変換を適用して効率よく数値計算をすることができる。まず, (1.6b) を自乗すると,

$$2(1 - k_1^2 \sin^2\varphi_1) - k_1'^2 + 2k_1 \cos\varphi_1 \sqrt{1 - k_1^2 \sin^2\varphi_1} = (1 + k_1)^2 (1 - k^2 \sin^2\varphi),$$

となる。この式に (1.7) を乗じて積分すれば, 第 2 種楕円積分のランデン変換

$$E(k,\varphi) = \frac{1}{1+k_1}\left[E(k_1,\varphi_1) - \frac{k_1'^2}{2}F(k_1,\varphi_1) + k_1 \sin\varphi_1\right], \tag{1.11}$$

を得ることができる。

それでは, $\varphi = \pi/2$ の場合, すなわち, 完全楕円積分についてランデン変換を繰り返してみよう。しかしながら, $\varphi = \pi/2$ の条件で (1.11) を書き直すと,

$$E(k) = \frac{1}{1+k_1}\left[2E(k_1) - k_1'^2 K(k_1)\right],$$

となるので, これを繰り返すと, 右辺第一項が発散すると予想できる。発散項の発生を考えると, この変換は数値計算には不向きである。そこで, (1.11) に (1.8) の逆数を乗じると,

$$\frac{E(k)}{K(k)} = \frac{2}{(1+k_1)^2}\left[\frac{E(k)}{K(k)} - \frac{k_1'^2}{2}\right], \tag{1.12}$$

を得る。さらに, この式の両辺から $1 - k^2/2$ を引くと,

$$\frac{E(k)}{K(k)} - \left(1 - \frac{k^2}{2}\right) = \frac{2}{(1+k_1)^2}\left[\frac{E(k)}{K(k)} - \left(1 - \frac{k_1^2}{2}\right) - \frac{k_1^2}{2}\right], \tag{1.13}$$

となる。この式を見やすくするため,

$$G(k) \equiv \frac{E(k)}{K(k)} - \left(1 - \frac{k^2}{2}\right),$$

とおいてみると, (1.13) は,

$$G(k) = \frac{2}{(1+k_1)^2}\left[G(k_1) - \frac{k_1^2}{2}\right], \tag{1.14}$$

と書くことができる。この変換式は発散項を含まないので, 前節の方法であらかじめ $K(k)$ を必要な精度で計算していれば, $E(k)$ を必要な精度で計算できる。

ランデン変換の反復　それでは, (1.14) の変換を繰り返し, 数値計算に適した方法を見つけてみよう。ここでも, $a \geq b$ なる正の実数を用いて, $k' \equiv b/a$ とし, 算術幾何平均を用いて a_n と b_n を更新していく方法をとる。すると,

$$\begin{aligned} G(k) &= 2\frac{a_1^2}{a^2}G(k_1) - \frac{a_1^2 - b_1^2}{a^2} = 4\frac{a_2^2}{a^2}G(k_2) - 2\frac{a_2^2 - b_2^2}{a^2} - \frac{a_1^2 - b_1^2}{a^2} \\ &= 2^n\frac{a_n^2}{a^2}G(k_n) - \sum_{j=1}^{n} 2^{j-1}\frac{a_j^2 - b_j^2}{a^2} = -\sum_{j=1}^{\infty} 2^{j-1}\frac{a_j^2 - b_j^2}{a^2}, \end{aligned} \tag{1.15}$$

となることがわかる。この式の変形に関して, $n \to \infty$ のとき $k_n \to 0$ となることを利用している。さらに, この式の両辺に $1 - k^2/2$ を加えると,

$$\frac{E(k)}{K(k)} = 1 - \sum_{j=0}^{\infty} 2^{j-1}\frac{a_j^2 - b_j^2}{a^2}, \tag{1.16}$$

が得られる。ここで便宜上, $a_0 \equiv a$, $b_0 \equiv b$ とおいた。算術幾何平均を用いているため, a_n と b_n は急激に同一の値へと収束する。具体的には, $a_n - b_n$ がゼロに向かって 2 次収束するため, (1.16) は 2 次収束することになる。つまり, (1.16) において総和記号の実行に対して 1 項加算するたびに有効桁が 2 倍ずつ改善されるのである。その収束速度については, 第 7 章で解説する。

1.5 楕円積分の応用例

初等関数では計算できなかった楕円積分を $F(k,\varphi)$, $E(k,\varphi)$ のような関数として定義し, それらを計算する手法を説明した。以降, 楕円積分が現れると, 具体的な数値を示す代わりに $F(k,\varphi)$ や $E(k,\varphi)$ を用いて数式を記述すればよい。具体的な値を記号で肩代わりして記述することは, 初等数学における $\sqrt{2}$, $\log 2$ などの記述と同じことである。

1.5.1　単振り子の周期と楕円の周囲長

本章の前半で単振り子の周期と, 楕円の周囲長を取り扱ったとき, 楕円関数の計算を議論したが, 記号を用いた表記をしなかったので改めて楕円間積分としての記号で表記しよう。

単振り子の周期　単振り子の周期 T は第 1.2.1 節で積分を示した。第 1.2.1 節で与えたように, 振り子の最大振れ幅を θ_0 とし, 楕円積分の母数を $k \equiv \sin(\theta_0/2)$ のように定義する。そのとき, その積分を楕円積分の記号に置き換えると,

$$T = 4\sqrt{\frac{g}{l}}\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = 4\sqrt{\frac{g}{l}}\,F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = 4\sqrt{\frac{g}{l}}\,K(k),$$

と書くことができる。つまり, 単振り子の周期は第 1 種の完全楕円積分である。振り子の振れ幅が小さい場合, すなわち, $k \ll 1$ のとき, $K(k) \simeq \pi/2$ である。よって, 振れ幅の小さい振り子の周期は, $T \simeq 2\pi\sqrt{g/l}$ となる。

振れ幅 θ_0 の単振り子について, 錘が鉛直下方 $\theta = 0$ から任意の角度 α に到達するまでの時間も同様に計算することができる。第 1.2.1 節によると, $1/\dot{\theta}$ の積分区間を $[0, \theta_0]$ の代わりに $[0, \alpha]$ とすればよいのだ。計算過程は省略するが, 錘が鉛直下方から角度 α に到達するまでの時間 t は,

$$t = \sqrt{\frac{g}{l}}\int_0^{\sin(\alpha/2)/\sin(\theta_0/2)}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = F_{\mathrm{J}}\left(k, \frac{\sin(\alpha/2)}{\sin(\theta_0/2)}\right),$$

となる。この式はヤコビの標準形で記述したが, $x = \sin\varphi$ で置き換えればルジャンドルの標準形で書いてもよい。どちらの表記法にしても, この数式によって時刻 t と錘の到達角度 α の関係が求まることがわかった。この関係式を α について解けば α を t の関数として書くことが可能であるが, それは次章で取り扱うことにする。

楕円の周囲長　楕円の周囲長は第 1.2.2 節で計算式を示した。第 1.2.2 節によると, 長半径が 1 で離心率 k の楕円の周囲長 L は,

$$L = \int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi = 4E\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = 4E(k),$$

と書くことができる。特に, 離心率が $k = 0$ の場合, $E(k) = \pi/2$ であるので, 周囲長は $L = 2\pi$ となる。その特殊な値は, 離心率がゼロの楕円が円であることと矛盾がない。

1.5.2　円環ポテンシャル

楕円積分の例として, 帯電した円環による静電ポテンシャルを挙げよう。図 1.4 示すように, 座標の原点を中心として xy 平面状に半径 r の円環が存在する。その円環は, 単位長

あたり ρ の電荷が帯電しているとする。一方, 円環から高さ h, x 軸方向に a だけ隔てた点 P を観測点とする。この観測点における静電ポテンシャルを計算しよう。

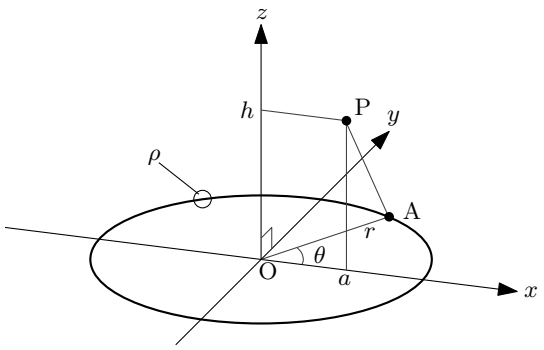

図 1.4: 円環に帯電した電荷

ポテンシャルの計算に対し, 円環上の点 A を考えよう。点 A は, x 軸から反時計回りに角度 θ の位置であるとする。このとき, 点 A から観測点 P までの距離は,

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AP}} &= \sqrt{(r\cos\theta - a)^2 + r^2\sin^2\theta + h^2} \\ &= \sqrt{(r+a)^2 + h^2 - 4ar\cos^2\frac{\theta}{2}},\end{aligned}$$

のように計算される。点 A の近傍の微小角度 $\mathrm{d}\theta$ の微小区間に含まれる電荷が $\rho r\mathrm{d}\theta$ であるので, 観測点 P におけるポテンシャルのうち, その微小区間の寄与は, 電磁気学の公式から,

$$\mathrm{d}U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho r\mathrm{d}\theta}{\sqrt{(r+a)^2 + h^2 - 4ar\cos^2(\theta/2)}},$$

のように与えられる。ここで, ε_0 は誘電率なる比例係数である。ポテンシャル U は, この寄与を円環一周にわたって積分すればよいので,

$$\begin{aligned}U &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\frac{\rho r\mathrm{d}\theta}{\sqrt{(r+a)^2 + h^2 - 4ar\cos^2(\theta/2)}} \\ &= \frac{\rho r}{2\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{(r+a)^2 + h^2 - 4ar\cos^2(\theta/2)}},\end{aligned} \tag{1.17}$$

によって計算できる。ここで,

$$k^2 \equiv \frac{4ar}{(r+a)^2 + h^2}, \quad \varphi \equiv \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2},$$

とおけば, ポテンシャル U は,

$$U = \frac{\rho r}{\pi\varepsilon_0\sqrt{(r+a)^2 + h^2}}\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} = \frac{\rho k}{2\pi\varepsilon_0}\sqrt{\frac{r}{a}}\,K(k), \tag{1.18}$$

のように計算できる。なお, 導出の途中で導入した k は, r と a の間の相加平均と相乗平均の大小関係から, $k^2 \leq 1$ であることが示される。なお, 等号が成立するのは, $r = a$ かつ $h = 0$ のときである。一方, $a = 0$ の場合, $k = 0$ であるので初等関数のみで積分を実行できる。

円環ポテンシャルを計算すると図 1.5 のようなグラフを描くことができる。このグラフは, 荷電粒子の水平位置 a を媒介変数として, 鉛直位置 h についての依存性を描いている。鉛直位置 h が増加すると, 水平位置 a への依存性が小さくなるが, h が小さいとき, すな

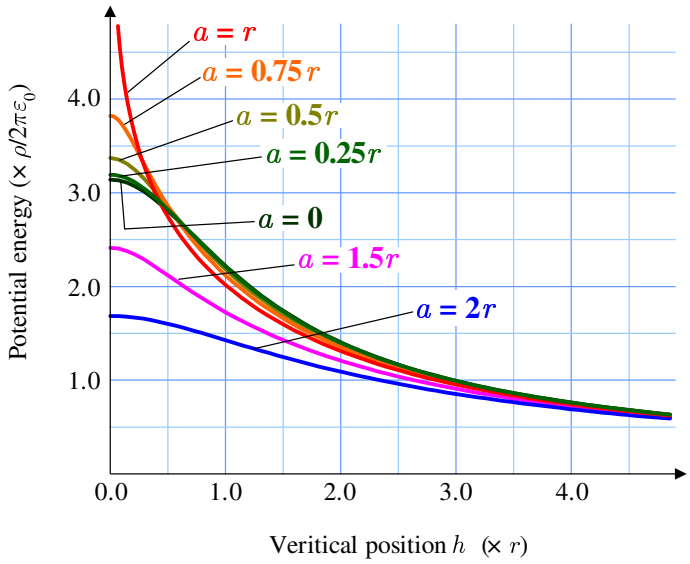

図 1.5: 円環ポテンシャルの計算結果

わち, 円環と近い位置では a の依存性が見られている。特に, $a < 1$ のとき, a が小さくなるとポテンシャルが小さい。一方, $a > 1$ では a が大きくなるほどポテンシャルが小さい。これは, 荷電粒子の動きを円環と同一の平面上に制限した場合, 円環の内部では荷電粒子は中心に向かって力を受け, 円環の外部では無限遠に向かって力を受けることを示唆している。また, $a \neq r$ のとき, $h = 0$ でのポテンシャルの傾きがゼロになっているので, 荷電粒子を正確に $h = 0$ に配置すれば, 荷電粒子は垂直方向に力を受けないことを示唆している。しかし, 位置が少しでも $h = 0$ からずれると, ポテンシャルの曲線を滑り落ちるように無限遠に向かって運動を始める。