第3章　複素関数としての楕円関数

前節で定義域を実数全体に拡張してきたのと同様に, 楕円関数の定義域は複素数に拡張することができる。複素数全体に定義域を拡張すると, 楕円関数の独特な特徴が見えてくるので, 面白いのはここからである。

3.1　複素数への拡張

ヤコビの楕円関数を, 変数として複素数をとる関数, すなわち, 複素関数に拡張しよう。複素関数に拡張するにあたり, 楕円積分:

$$u = \int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

を考える。前章で述べたように, この積分で用いる x と u は $x = \mathrm{sn}(u,k)$ の関係がある。その積分に対して, tn 関数型の楕円積分:

$$v = \int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1+x^2)(1+k^2x^2)}},$$

を考えよう。この積分の場合, $x = \mathrm{tn}(u,k')$ の関係がある。この tn 関数型の楕円積分の両辺に虚数単位 i を乗じると,

$$iv = \int_0^x \frac{i\,\mathrm{d}x}{\sqrt{(1+x^2)(1+k^2x^2)}} = \int_0^{ix} \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}},$$

のように変形できる。この数式変形は, $y = ix$ なる置き換えを用いた。この積分の結果から, $ix = \mathrm{sn}(iv,k)$ の関係が成立すると言える。ところで, 既に書いたように $x = \mathrm{tn}(u,k')$ であるので,

$$\mathrm{sn}(iv,k) = i\,\mathrm{tn}(v,k'), \tag{3.1}$$

なる関係が導かれる。この結果を使って, 補助関数である cn 関数と dn 関数の変数を純虚数に拡張すると,

$$\mathrm{cn}^2(iv,k) = 1 - \mathrm{sn}^2(iv,k) = \frac{\mathrm{cn}^2(v,k') + \mathrm{sn}^2(v,k')}{\mathrm{cn}^2(v,k')} = \frac{1}{\mathrm{cn}^2(v,k')},$$

$$\mathrm{dn}^2(iv,k) = 1 - k^2\,\mathrm{sn}^2(iv,k) = \frac{\mathrm{cn}^2(v,k') + k^2\,\mathrm{sn}^2(v,k')}{\mathrm{cn}^2(v,k')}$$
$$= \frac{1 - k'^2\,\mathrm{sn}^2(v,k')}{\mathrm{cn}^2(v,k')} = \frac{\mathrm{dn}^2(v,k')}{\mathrm{cn}^2(v,k')},$$

が得られる。純虚数に拡張した結果を改めて書くと,

$$\mathrm{sn}(iv,k) = i\,\mathrm{tn}(v,k'), \qquad \mathrm{cn}(iv,k) = \frac{1}{\mathrm{cn}(v,k')}, \qquad \mathrm{dn}(iv,k) = \frac{\mathrm{dn}(v,k')}{\mathrm{cn}(v,k')}, \tag{3.2}$$

である。これらの結果はヤコビの虚数変換と呼ばれる関係式である。これらの関係式によると, 純虚数変数によるヤコビの楕円関数は, 補母数 k' を母数とする実数変数の楕円関数で記述できる。

準備が整ったので, ヤコビの楕円関数の定義域を複数数全体に拡張するのは容易である。実変数の場合と純虚数変数の場合を加法公式を用いて結合すればよい。その結果,

$$\mathrm{sn}(u+iv) = \frac{\mathrm{sn}(u,k)\,\mathrm{dn}(v,k') + i\ \mathrm{cn}(u,k)\,\mathrm{dn}(u,k)\,\mathrm{sn}(v,k')\,\mathrm{cn}(v,k')}{\mathrm{cn}^2(v,k') + k^2\,\mathrm{sn}^2(u,k)\,\mathrm{sn}^2(v,k')}, \tag{3.3a}$$

$$\mathrm{cn}(u+iv) = \frac{\mathrm{cn}(u,k)\,\mathrm{cn}(v,k') - i\ \mathrm{sn}(u,k)\,\mathrm{dn}(u,k)\,\mathrm{sn}(v,k')\,\mathrm{dn}(v,k')}{\mathrm{cn}^2(v,k') + k^2\,\mathrm{sn}^2(u,k)\,\mathrm{sn}^2(v,k')}, \tag{3.3b}$$

$$\mathrm{dn}(u+iv) = \frac{\mathrm{dn}(u,k)\,\mathrm{cn}(v,k')\,\mathrm{dn}(v,k') - ik^2\ \mathrm{sn}(u,k)\,\mathrm{cn}(u,k)\,\mathrm{sn}(v,k')}{\mathrm{cn}^2(v,k') + k^2\,\mathrm{sn}^2(u,k)\,\mathrm{sn}^2(v,k')}, \tag{3.3c}$$

なる公式を得る。なお, これらの公式の分母は $1 - \mathrm{dn}^2(u,k)\,\mathrm{sn}^2(v,k')$ と書いてもよい。これらの公式は, 三角関数における

$$\sin(u+iv) = \sin u \cosh v + i \cos u \sinh v,$$
$$\cos(u+iv) = \cos u \cosh v - i \sin u \sinh v,$$

に対応する。実際, $k=0$ の場合に, 公式 (3.3a) から (3.3c) が, $\sin(u+iv)$ や $\cos(u+iv)$ の公式と一致することは容易に確認できる。

ここで, 公式 (3.3a) から (3.3c) が正則な関数であり, 実関数のときと同様の性質をもつことを示す必要がある。しかし, その証明は初等的であるが計算が煩雑であるため, ここでは省略する。その代わりに, 証明するための道筋を述べておこう。正則な関数とは, 微分可能な関数のことである。複素関数において微分可能とは, 実数方向の変化率から算出する導関数と, 虚数方向の変化率から算出する導関数が等しいことが条件である。この条件は, コーシー・リーマンの定理と呼ばれる。例えば, 関数 $f(u+iv)$ を実部 $\varphi(u,v)$ と虚部 $\psi(u,v)$ に分離して, $f(u+iv) \equiv \varphi(u,v) + i\,\psi(u,v)$ と書いたとする。そのとき, コーシー・リーマンの定理は,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} = \frac{\partial\psi}{\partial v}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial v} = -\frac{\partial\psi}{\partial u},$$

と書かれる。つまり, 公式 (3.3a) から (3.3c) がコーシー・リーマンの定理を満たすことを示せば, 公式が正則であることが証明できたことになる。コーシー・リーマンの定理を満たすことが証明されたので, 単純に実数方向の変化率から算出した導関数を楕円関数の微分と考えてよい。その微分が楕円関数の微分公式と一致することを証明すればよい。それが証明されれば, 微分公式から導かれた加法公式も成立する。

公式 (3.3a) から (3.3c) に, $v = K'\ (= K(k'))$ を適用してみよう。このとき, $\mathrm{sn}(K', k') = 1$, $\mathrm{cn}(K', k') = 0$, $\mathrm{dn}(K', k') = k$ であることに注意すると,

$$\mathrm{sn}(u + iK') = \frac{1}{k\,\mathrm{sn}\,u}, \quad \mathrm{cn}(u + iK') = -\frac{i\ \mathrm{dn}\,u}{k\,\mathrm{sn}\,u}, \quad \mathrm{dn}(u + iK') = -\frac{i\ \mathrm{cn}\,u}{\mathrm{sn}\,u}, \tag{3.4}$$

が得られる。また, $\mathrm{sn}(2K', k') = 0$, $\mathrm{cn}(2K', k') = \mathrm{dn}(2K', k') = 1$ であることから, 公式に $v = 2K'$ を適用すると,

$$\mathrm{sn}(u + 2iK') = \mathrm{sn}\,u, \quad \mathrm{cn}(u + 2iK') = -\,\mathrm{cn}\,u, \quad \mathrm{dn}(u + 2iK') = -\,\mathrm{dn}\,u, \tag{3.5}$$

が導かれる。これらの結果から楕円関数の面白い性質がわかる。その性質のひとつは, 楕円関数が極をもつことである。公式 (3.4) によると, 変数が iK' の楕円関数はどれも分母が $\mathrm{sn}\,0 = 0$ である。よって, 楕円関数はどれも iK' を極とすることがわかる。もう一つの性質は, 楕円関数の周期性である。すでに, 実数関数としての楕円関数が周期関数であることを導いた。それに加えて, (3.5) より, $\mathrm{sn}\,u$ が iK' の周期をもつことがわかる。さらに, (3.5) と, $\mathrm{cn}(u + 2K) = -\,\mathrm{cn}\,u$ なる関係を利用すれば,

$$\mathrm{cn}(u + 2K + 2iK') = \mathrm{cn}\,u, \quad \mathrm{dn}(u + 4iK') = \mathrm{dn}\,u, \tag{3.6}$$

なる関係が導かれる。つまり, cn 関数は $2K + 2iK'$ を, dn 関数は $4iK'$ を周期とすることがわかる。楕円関数の中で sn 関数に焦点を当てた場合, 周期 $2iK'$ は, 実数変数で見出した周期 $4K$ を整数倍しても作り出すことはできない。つまり, sn 関数は $4K$ を基本周期とするのと同様に, $2iK'$ も基本周期とする。このように基本周期を 2 つもつことを二重周期性という。

ヤコビの楕円関数の補助関数についても同様であるが, 実は cn 関数の周期には注意が必要である。公式 (3.5) から, $\mathrm{cn}(u+4iK') = \mathrm{cn}\,u$ であるので $\mathrm{cn}\,u$ の周期が $4iK'$ と考えるかもしれない。ところが, $\mathrm{cn}(u+2K) = -\,\mathrm{cn}\,u$ であることに注意すると, $\mathrm{cn}(u+2K+2iK') = \mathrm{cn}\,u$ を導くことができる。基本周期を導くことに関し, $4K$ と $4iK'$ の整数倍の和から $2K+2iK'$ を作ることはできない。しかし, $4K$ と $2K + 2iK'$ の整数倍の和から $4iK'$ を作ることは可能である。よって, $\mathrm{cn}\,u$ の基本周期は $4K$ と $2K + 2iK'$ である。それに対し, dn 関数は, cn 関数のような変則的ではなく, $2K$ と $4iK'$ を基本周期とする。

楕円関数の二重周期性を示すため, 図 3.1 に変数 $z\ (= u + iv)$ の複素平面状に楕円関数の実部を描く。濃い色が負の値, 薄い色が正の値を表す。また, 図中の白枠で描いた長方

形や平行四辺形が, 楕円関数の基本周期である。これらの長方形や平行四辺形は, 基本周期平行四辺形と呼ばれる。さらに, 白と黒が互いに接している場所は, 絶対値が大きな正から負の値に切り替わる場所, すなわち, 楕円関数の極である。この極の位置は, 上に述べたように, $z = iK'$ を中心とし, 楕円関数の周期に従って分布している。

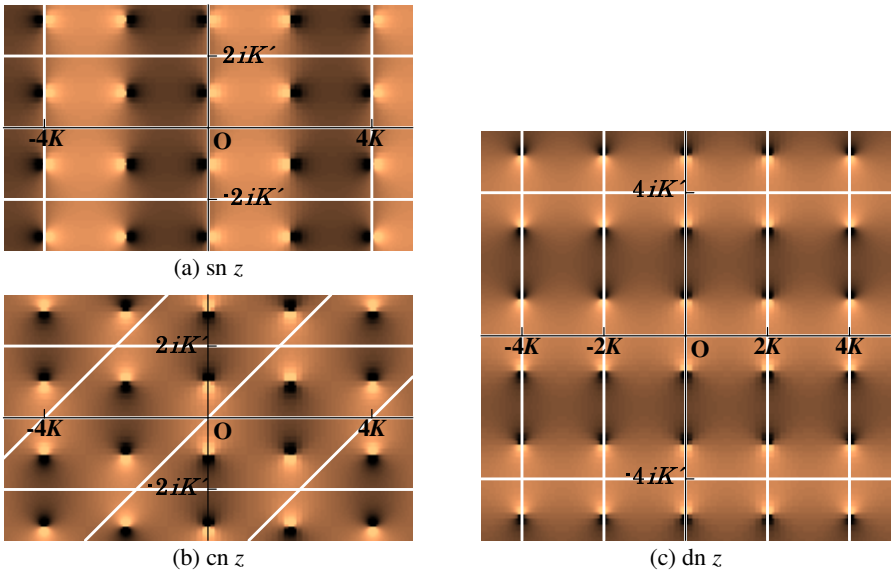


図 3.1: ヤコビの楕円関数の実数部

3.2　楕円関数の性質

前節でヤコビの楕円関数が二重周期関数であることを述べた。そのような二重周期関数を一般的に楕円関数と呼ぶことにし, それから導かれる楕円関数の性質を導出してみよう。

性質 1　第一に, 同一周期をもつ楕円関数どうしから四則演算によって得られる関数は, 同一周期をもつ楕円関数である。例えば, $f(z)$ と $g(z)$ が, 独立する 2 つの周期 ω_1 と ω_2 を共有するならば,

$$f(z) \pm g(z), \qquad f(z)\,g(z), \qquad \frac{f(z)}{g(z)},$$

も周期 ω_1 と ω_2 をもつ楕円関数である。さらに, 導関数 $f'(z)$ も周期 ω_1 と ω_2 をもつ楕円関数である。

証明　ここで, ω_1 と ω_2 が基本周期とは限らないことに注意しよう。例えば, $f(z+\omega/2) = -f(z)$ が成立するならば, $f(z+\omega) = f(z)$ となるので, $f(z)$ は

ω を周期とする。この関数どうしを乗じた積 $f(z)^2$ は, $f(z+\omega/2)^2 = f(z)^2$ であるため $\omega/2$ を周期とする。しかし, 上に記載した周期 ω_1 と ω_2 が基本周期とは限らないので, 性質 1 は正しい。その性質は, $f(z) = f(z+\omega_1) = f(z+\omega_2)$, $g(z) = g(z+\omega_1) = g(z+\omega_2)$ である事実から容易にわかる性質である。¶

楕円関数の性質を調べる上で, 楕円関数の位数を用いることがある。楕円関数の位数は, 基本周期平行四辺形の中に存在するすべての極の位数の和である。例えば, cn 関数は基本周期 $4K$ と $2K+2K'$ が張る基本周期平行四辺形の中に, $z = K+iK', 3K+iK'$ に 1 位の極をもつので, cn 関数の位数は 2 である。

楕円関数の性質として, リウヴィル (Liouville) が提示した 4 つの定理がある。それらの定理を紹介しよう。また, 後の説明のため, 境界を含む基本周期平行四辺形の内部領域を D とする。

リウヴィルの第 1 定理　二重周期をもつ整関数は定数である。言い換えると, 0 位の楕円関数は定数である。

証明　第 1 定理を証明しよう。関数 $f(z)$ が二重周期をもつとしよう。この関数が整関数であるので, 領域 D で連続関数であるので, 十分に大きな正の実数 M を選べば, 領域 D で $|f(z)| \leq M$ とすることができる。関数 $f(z)$ が周期関数であるので, この関係は複素平面全体で成立する。

複素平面の原点を中心とする半径 R の円 $Re^{i\theta}$ を描いたとしよう。半径 R を大きくとれば任意の z を内部に含むことができる。その円周を C と書くと, コーシーの積分定理によって,

$$\begin{aligned} f(z) - f(0) &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \left(\frac{f(u)}{u-z} - \frac{f(u)}{u}\right)\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{z\,f(u)}{u\,(u-z)}\mathrm{d}u = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{z\,f(Re^{i\theta})}{Re^{i\theta}-z}\mathrm{d}\theta, \end{aligned}$$

のように表すことができる。ここで, $|f(Re^{i\theta})| \leq M$, $|Re^{i\theta} - z| \geq R - |z|$ を用いると,

$$\begin{aligned} |f(z) - f(0)| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\frac{z\,f(Re^{i\theta})}{Re^{i\theta}-z}\right|\mathrm{d}\theta \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{M\,|z|}{R-|z|}\mathrm{d}\theta = \frac{M\,|z|}{R-|z|}, \end{aligned}$$

なる不等式が導かれる。ここで, $R \to \infty$ の極限をとると右辺がゼロに近づくので, $f(z) = f(0)$ となるべきことがわかる。したがって, $f(z)$ は定数である。¶

リウヴィルの第 2 定理　周期平行四辺形 D の内部に存在するすべての極における留数の和はゼロに等しい。

証明　楕円関数が有理形の関数であるので, 領域 D に存在する極は有限個である。そのため, 境界線が極を通過しないように領域 D を選ぶことができる。そのように領域 D を選び, その境界線上で周回積分すると,

$$\int_{\partial D} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{p\in D} \operatorname*{Res}_{z=p} f(z),$$

となることが留数定理から導かれる。基本周期が ω_1, ω_2 であるならば, $z=\alpha$ を基点とした周回積分は,

$$\int_{\partial D} f(z)\,\mathrm{d}z = \left(\int_{\alpha}^{\alpha+\omega_1} + \int_{\alpha+\omega_1}^{\alpha+\omega_1+\omega_2} + \int_{\alpha+\omega_1+\omega_2}^{\alpha+\omega_2} + \int_{\alpha+\omega_2}^{\alpha}\right) f(z)\,\mathrm{d}z,$$

である。ここで, $f(z)$ が ω_1 と ω_2 を周期とすることを考えると,

$$\int_{\alpha+\omega_1+\omega_2}^{\alpha+\omega_2} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{\alpha}^{\alpha+\omega_1} f(z)\,\mathrm{d}z,$$
$$\int_{\alpha+\omega_1}^{\alpha+\omega_1+\omega_2} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{\alpha+\omega_2}^{\alpha} f(z)\,\mathrm{d}z,$$

が成り立つはずである。この関係式を適用すると, 領域 D の境界線に沿った周回積分がゼロであることが導かれる。その積分結果は,

$$\sum_{p\in D} \operatorname*{Res}_{z=p} f(z) = 0,$$

すなわち, 領域 D に存在するすべての極における留数の和がゼロであることを意味する。したがって, リウヴィルの第 2 定理が証明された。¶

第 2 定理の系として, 1 位の楕円関数が存在しないことがわかる。なぜなら, 1 位の楕円関数は, 基本周期平行四辺形の内部に 1 位の極が 1 つだけ存在することを意味する。その場合, 第 2 定理を満足することができないからである。

リウヴィルの第 3 定理　領域 D に存在する楕円関数 $f(z)$ の零点の個数は $f(z)$ の位数に等しい。ただし, 2 位の零点は 2 個分, 3 位の零点は 3 個分のように, 零点ひとつにつき零点の位数だけ個数を加算するものとする。

証明　この定理の証明では, 境界線が $f(z)$ の零点と $f'(z)$ の極を通過しないように領域 D を選ぶものとする。さらに, $F(z) \equiv f'(z)/f(z)$ を定義しよう。こ

の新たな関数 $F(z)$ は本節で説明した**性質 1** により楕円関数であり, その周期は $f(z)$ と共通の周期をもつ。さらに, 関数 $f(z)$ が領域 D で極 $a_1, a_2, \ldots, a_m$ をもち, その位数を $p_1, p_2, \ldots, p_m$ とする。また, 零点を $b_1, b_2, \ldots, b_n$, その位数を $q_1, q_2, \ldots, q_n$ とする。まず, j 番目の極 a_j に注目すると, 関数 $f(z)$ は,

$$f(z) = \frac{\phi_j(z)}{(z-a_j)^{p_j}}, \qquad \phi_j(z) \neq 0, \infty,$$

と書くことができる。この場合, 関数 $F(z)$ は,

$$F(z) = -\frac{p_j}{z-a_j} + \frac{\phi_j'(z)}{\phi_j(z)},$$

となるので, $z = a_j$ で 1 位の極をもち, その留数を p_j とすることがわかる。一方, k 番目の零点 b_k に注目すると, 関数 $f(z)$ は,

$$f(z) = (z-b_k)^{q_k}\psi_k(z), \qquad \psi_k(z) \neq 0, \infty,$$

となるので, 関数 $F(z)$ は,

$$F(z) = \frac{q_k}{z-b_k} + \frac{\psi_k'(z)}{\psi(z)},$$

のように書ける。よって, 関数 $F(z)$ は $z = b_k$ で 1 位の極をもち, その留数を q_k とする。したがって, $F(z)$ を領域 D の境界に沿って周回積分すると,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} F(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{m} \operatorname*{Res}_{z=a_j} f(z) + \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=b_j} f(z) = -\sum_{j=1}^{m} p_j + \sum_{k=1}^{n} q_k = 0,$$

が得られる。右辺がゼロであるのはリウヴィルの第 2 定理に基づく。よって, 領域 D に存在する $f(z)$ の零点の個数 N は,

$$N = \sum_{k=1}^{n} q_k = \sum_{j=1}^{m} p_j,$$

となる。この式の右辺は $f(z)$ の極の位数の総和, すなわち, 楕円関数 $f(z)$ の位数である。したがって, 第 3 定理が証明できた。¶

リウヴィルの第 4 定理　領域 D に存在する楕円関数 $f(z)$ の極にあたる複素数 a_j の和と, 零点にあたる複素数 b_k の和の差は, 楕円関数 $f(z)$ の周期に等しい。なお, 複素数の和は, 極や零点の位数だけ重複するものとする。

証明　この定理の証明には, 第 3 定理の証明に用いた $F(z)$ に z を乗じた被積分関数 $zF(z)$ を考えればよい。この被積分関数の周回積分は,

$$\begin{aligned}\int_{\partial D} zF(z)\,\mathrm{d}z = &\left(\int_{\alpha}^{\alpha+\omega_1} + \int_{\alpha+\omega_1+\omega_2}^{\alpha+\omega_2}\right) zF(z)\,\mathrm{d}z \\ &+ \left(\int_{\alpha+\omega_1}^{\alpha+\omega_1+\omega_2} + \int_{\alpha}^{\alpha+\omega_2}\right) zF(z)\,\mathrm{d}z \\ &= -\omega_2 \int_{\alpha}^{\alpha+\omega_1} F(z)\,\mathrm{d}z + \omega_1 \int_{\alpha}^{\alpha+\omega_2} F(z)\,\mathrm{d}z,\end{aligned}$$

なる関係を満たす。この関係を得るには, 第 1 行目の前半の積分に対して周期性 $F(z+\omega_2) = F(z)$ を, 後半の積分に対して周期性 $F(z+\omega_1) = F(z)$ を適用した。前半の積分のみを書いてみると,

$$\begin{aligned}\left(\int_{\alpha}^{\alpha+\omega_1} + \int_{\alpha+\omega_1+\omega_2}^{\alpha+\omega_2}\right) zF(z)\,\mathrm{d}z &= \int_{\alpha}^{\alpha+\omega_1} zF(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\alpha+\omega_1}^{\alpha} (z+\omega_2)F(z+\omega_2)\mathrm{d}z \\ = \int_{\alpha}^{\alpha+\omega_1} zF(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\alpha+\omega_1}^{\alpha} (z+\omega_2)F(z)\mathrm{d}z &= -\omega_2 \int_{\alpha}^{\alpha+\omega_1} F(z)\,\mathrm{d}z,\end{aligned}$$

となるからである。後半の積分も同様である。次に, $F(z) \equiv f'(z)/f(z)$ のように定義されていたことを思い出そう。すると, $F(z)$ の積分は,

$$\int_{\alpha}^{\alpha+\omega_1} F(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\alpha}^{\alpha+\omega_1} \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z = \oint \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta},$$

のように書くことができる。この式の右辺への変形には, $\zeta \equiv f(z)$ の置き換えを適用した。関数 $f(z)$ は変数 z が α から $\alpha+\omega_1$ まで変化する間に一周期するので, 右辺の積分を周回積分としての記号を用いて書いた。ただし, この周回が複素平面の原点を何回周回するかを特定できない。仮に $f(z)$ が原点を ν 回周回するならば,

$$\int_{\alpha}^{\alpha+\omega_1} F(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i\,\nu,$$

のように書くことができる。この事実を利用すると,

$$\int_{\partial D} zF(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i\,(\nu\omega_1 - \mu\omega_2),$$

となる。ここで, ν と μ は整数であるとする。

次に, 第 3 定理の証明のように, $f(z)$ が $z = a_j$ で p_j 位 $(j = 1, 2, \ldots, m)$ の極をもち, $z = b_k$ で q_k 位 $(k = 1, 2, \ldots, n)$ の零点をもつとする。その場合, 被積分関数 $zF(z)$ は,

$$zFz = -\frac{a_j p_j}{z - a_j} - 1 + \frac{\phi_j'(z)}{\phi_j(z)} = \frac{b_k q_k}{z - b_k} + 1 + \frac{\psi_k'(z)}{\psi_k(z)},$$

のように書くことができる。ここで, $\phi_j(z)$ と $\psi_k(z)$ は第 3 定理の証明で用いたゼロにも無限大にもならない関数である。この極と零点を用いた表記よって, 領域 D の境界に沿った周回積分は,

$$\int_{\partial D} zF(z)\,\mathrm{d}z = -2\pi i\left(\sum_{j=1}^{m} a_j p_j - \sum_{k=1}^{n} b_k q_k\right),$$

と書くことができる。上で計算した結果と等号で結ぶと,

$$\sum_{j=1}^{m} a_j p_j - \sum_{k=1}^{n} b_k q_k = -\nu\omega_1 + \mu\omega_2,$$

なる関係が得られる。この式の右辺において, ν と μ を特定することができないが, ともに整数[1]であるので, 右辺は確かに楕円関数 $f(z)$ の周期である。つまり, 位数の分だけ重複加算した楕円関数 $f(z)$ 極の位置の和と, 零点の位置の和の差は楕円関数 $f(z)$ の周期となる。よって, 第 4 定理が証明された。¶

すべての極と, その極を中心とするローラン展開における主要部が特定できれば, 楕円関数は定数項を除き, 一意的に定まる。また, 極と零点の位置, および, 位数が特定できれば楕円関数は定数倍の範囲で一意的に定まる。これらの性質を, **性質 2**, **性質 3** としよう。

性質 2　独立な周期 ω_1 と ω_2 を共有する楕円関数 $f(z)$ と $g(z)$ について, すべての極と, その極を中心とするローラン展開における主要部が一致すれば, $f(z) - g(z)$ は定数である。

証明　関数 $f(z)$ の極の一つを z_0 とするとき, 上記条件を満足する関数形として,

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k} + f_1(z), \qquad g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k} + g_1(z),$$

を仮定しよう。これは極 z_0 を中心とするローラン展開であり, 双方の主要部が一致する級数としている。このとき, $f_1(z)$ と $g_2(z)$ は整関数である。両者の差をとると,

$$f(z) - g(z) = f_1(z) - g_1(z),$$

となり, 整関数となる。まず, **性質 1** より $f(z) - g(z)$ は楕円関数である。また, リウヴィルの第 1 定理により, 整関数が楕円関数となるためには定数でなければならない。したがって, $f(z) - g(z)$ は定数である。¶

[1]どちらともゼロになる場合もある。

性質 3　独立な周期 ω_1 と ω_2 を共有する楕円関数 $f(z)$ と $g(z)$ について, すべての極と零点が一致し, 位数も等しければ, 定数因子 c を用いて, $f(z) = cg(z)$ の関係が成立する。

証明　二つの関数の比 $f(z)/g(z)$ を考えよう。この比は, $f(z)$ の極, または, $g(z)$ の零点を極とする。まず, $z = z_0$ を $f(z)$ の p 位の極とする。そのとき, z_0 は $g(z)$ の p 位の極となる。つまり, ゼロ以外の有限値をとる $f_1(z)$ と $g_1(z)$ を用いて,

$$f(z) = \frac{f_1(z)}{(z-z_0)^p}, \qquad g(z) = \frac{g_1(z)}{(z-z_0)^p},$$

と書くことができる。このとき, 両者の比は,

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f_1(z)}{g_1(z)},$$

であることから, 正則な関数である。一方, $g(z)$ の零点に関しても同様に考えればよい。具体的には,

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{1/g(z)}{1/f(z)},$$

を考えればよい。つまり, $g(z)$ の零点は $1/g(z)$ の極であるので, 上の考察と全く同様である。したがって, $f(z)/g(z)$ は正則であるので, リウヴィルの第 1 定理によって定数でなければならない。したがって, 定数因子 c を用いて $f(z) = cg(z)$ と書くことができる。¶

3.3　リーマン面と関数の周期性

本章で議論したように楕円関数は二重周期をもつことがわかった。楕円関数の二重周期性は, 逆関数である楕円積分から導くことも可能である。本節で, 楕円積分から楕円関数の二重周期を考察しよう。

3.3.1　リーマン面

複素平面上の任意の点 z に対応する関数値が与えられているとしよう。複素平面に等高線, または, カラーマップの形で関数値が描かれている状態を想像すればよいだろう。その関数が 1 価であれば, 等高線やカラーマップの表現は一意的に定まる。しかし, 多価関数は一意的に定まらない。

多価関数の例として, 複素数 z の平方根を与える関数 $z^{1/2}$ を考えよう。複素数 z の平方根は, $z^{1/2} = \pm\sqrt{z}$ のように符合が異なる 2 つの関数値をとる 2 価関数である。そこで, 複

素平面 S_+ の上では, 平方根が $z^{1/2} = \sqrt{z}$ のように一方の値だけをとるように制限しよう。同様に, 複素平面 S_- では平方根が $z^{1/2} = \sqrt{z}$ のようにもう一方の値だけをとるものとする。つまり, 複素平面 S_+ と S_- で平方根関数 $z^{1/2}$ は 1 価関数となっている。

上に定義した複素平面 S_+ と S_- ように, 多価関数の関数値を一つずつ割り当てた複素平面を**リーマン面**と呼ぶ。平方根関数に関するリーマン面 S_+ と S_- が互いに無関係な平面でないことを図 3.2 を用いて説明しよう。任意の複素数が $z \equiv re^{i\theta}$ のように書けるとしよう。その表現において, 平方根の一方が $\sqrt{z} \equiv \sqrt{r}\, e^{i\theta/2}$ であるように平方根が定義されているとする。ただし, $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。平方根関数の変数 z を, 図 3.2 に示すようにリーマン面 S_+ 上の原点の周りを 1 回転した場合を考えよう。その回転によって, z は $z = re^{i\,(\theta+2\pi)}$ となる。これを平方根関数に代入すると,

$$z^{1/2} = \sqrt{r}\, e^{i\,(\theta+2\pi)/2} = \sqrt{r}\, e^{i\theta/2} e^{\pi i} = -\sqrt{z},$$

が成立する。変数 z が原点を周回してもとの位置に戻っているにも関わらず, その平方根は符号が逆になっているのだ。言い換えると, 複素平面 S_+ の上の点 z は, 原点を中心に 1 回転すると複素平面 S_- に遷移している。さらに 1 回転して $z = re^{i\,(\theta+4\pi)}$ とすれば,

$$z^{1/2} = \sqrt{r}\, e^{i\,(\theta+2\pi)/2} = \sqrt{r}\, e^{i\theta/2} e^{2\pi i} = \sqrt{z},$$

となるので, 再び複素平面 S_+ に戻る。 つまり, 平方根関数 $z^{1/2}$ を取り扱う場合, 変数 z を

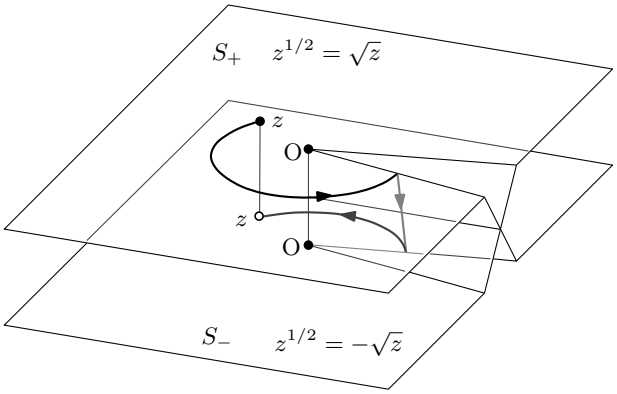


図 3.2: 平方根関数におけるリーマン面

原点の周りに 2 回転させなければ変数 z はもとのリーマン面上の同一点に戻れないのだ。メビウスの輪を連想させるリーマン面の振る舞いは, これから議論しようとする周期関数の解釈に有用である。なお, この例における原点のように, その周りを周回することによって異なるリーマン面に移る点を**分岐点**と呼ぶ。例えば, 上の平方根関数を平行移動した関数 $(z-a)^{1/2}$ の場合, $z = a$ が分岐点となる。

平方根関数におけるリーマン面に関して, 原点の右側の切り込みを通過したときにリーマン面 S_+ と S_- の遷移が発生する。リーマン面の境界となる切り込みを**分岐線**と呼ぶ。

リーマン面の切り替わりは概念的であるので, 分岐線を厳密に決めることに意味はない。しかし, 分岐線の選択に関して偏角を考えることは有効である。偏角とは, 複素平面において複素数が実軸となす角度のことである。例をあげると, $z \equiv re^{i\theta}$ としたとき, θ が偏角である。図 3.2 の例では, 偏角 $2n\pi \leq \theta < 2(n+1)\pi$ において, 整数 n が偶数のときリーマン面 S_+, n が奇数のときリーマン面 S_- をとるように平方根関数 $z^{1/2}$ のリーマン面が設定されている。

3.3.2　三角関数の周期

楕円関数の周期を取り扱う前に, リーマン面を利用して三角関数の周期を考察することは有益である。三角関数の周期を考察するには,

$$u = \int_0^z \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1-z^2}} = \int_0^z \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(1-z)(1+z)}}, \tag{3.7}$$

を利用するとよい。右辺の積分を実行すると $u = \arcsin z$ となる。この等式の逆関数をとると, $z = \sin u$ となる。被積分関数が正則関数であれば, 積分結果は, 積分変数が 0 から z まで移動する積分路の選び方に無関係である。いや, それは正確な説明ではない。被積分関数が極をもつ場合, 積分路が極を周回するかどうかによって積分値が異なるのだ。事実, (3.7) の被積分関数は ± 1 を極にもつ。この積分を実行する積分路として, 図 3.3 のような 4 つの経路を考えよう。 そのうち, 積分路 C_1 と C_2 に沿った積分は等しくなる。しかし,

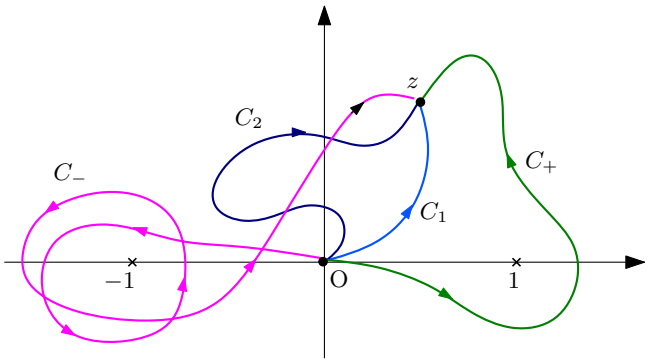


図 3.3: 逆正弦関数の積分値を得る積分の積分路

積分路 C_+ は極 $z = 1$ を反時計回りに 1 回だけ回るため, 積分値が前の 2 つとは異なる。積分路 C_- は極 $z = -1$ を反時計回りに 2 回転するので, 積分値が前の 3 つとは異なる。積分路 C_1 と C_2 に沿った積分が等しいのと同様に, 極 $z = 1$ を反時計回りに 1 回転する経路であれば, その積分路の選び方とは無関係に, C_+ に沿った積分と等しくなる。

上で述べたように, 積分路が極を周回する回数とその回転方向が定まれば, 積分路の経

路に選択に無関係である。つまり, 積分 (3.7) を調べるには, 図 3.4 に示す 3 種類の積分路を考えればよい。その積分路を説明すると, 次のようになる。

積分路 1 図に示す L のように, 分岐点を周回せず z に到達する経路。

積分路 2 原点から実軸上を正の方向にたどり, 分岐点 1 を微小半径で周回した後, 実軸をたどって原点に戻り, 経路 L をたどって z に到達する経路。すなわち, $P_{01}+C_1+\bar{P}_{01}+L$.

積分路 3 原点から実軸上を負の方向たどり, 分岐点 -1 を微小半径で周回した後, 実軸をたどって原点に戻り, 経路 L をたどって z に到達する経路。すなわち, $P_{0,-1}+C_{-1}+\bar{P}_{0,-1}+L$

なお, 積分路 C_1 と C_{-1} は, それぞれ, 分岐点 1, -1 を反時計回りに周回する経路である。また, 経路 P_{01} と $P_{0,-1}$ は, それぞれ, 実軸上を 0 から 1 へたどる経路と, 0 から -1 にたどる経路である。さらに, 経路 $\bar{P}_{01}$ と $\bar{P}_{0,-1}$ は前記の経路を逆にたどる経路である。

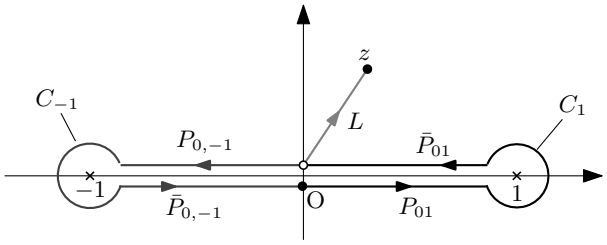


図 3.4: 逆正弦関数の積分値を得る積分の積分路

特に, 経路 C_1 と C_{-1} に沿った積分は, 経路の半径が十分に小さいため, その円弧に沿った積分はゼロとみなすことができる。それは次のようにして証明できる。

証明　被積分関数を $1/\sqrt{(z-\alpha)\,f(z)}$ であるとしよう。ただし, $f(z)$ は α の近傍で正則であり, かつ, ゼロでないとする。この被積分関数に対して, α の周囲を, 半径 ε で, 偏角にして θ_1 から θ_2 までの円弧 C を積分路として積分しよう。つまり, 積分路の上では $z-\alpha=\varepsilon e^{i\theta}$ が成立する。そのとき, 対象とする積分は,

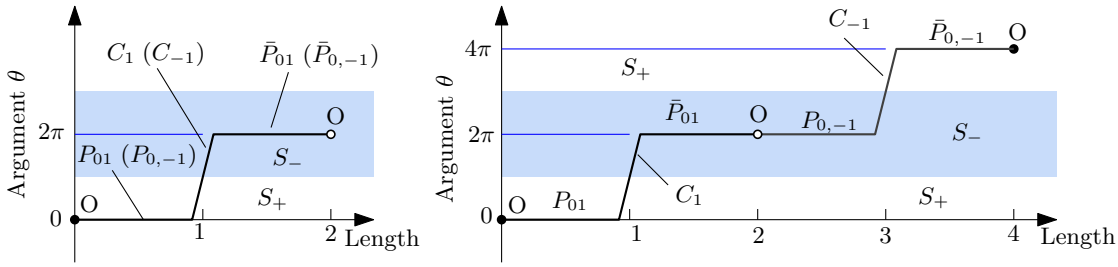
$$I(\theta_1,\theta_2)=\int_C \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(z-\alpha)\,f(z)}}=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{i\sqrt{\varepsilon}\,e^{i\theta/2}\,\mathrm{d}z}{\sqrt{f(z)}},$$

となるのだが, ここで $\varepsilon\to 0$ の極限をとると,

$$\left|\lim_{\varepsilon\to 0} I(\theta_1,\theta_2)\right| \le \lim_{\varepsilon\to 0}\sqrt{\frac{\varepsilon}{f(\alpha)}}\,(\theta_2-\theta_1)=0,$$

のように計算できるので, 極を周回する微小円弧を積分路とする積分はゼロにに近づく。¶

続いて, 積分路 2 と積分路 3 に沿った積分を計算しよう。積分を評価するには, 積分路に沿ってリーマン面をどのように推移するか調べておくとよい。そのためには被積分関数の分母である平方根関数に含まれる $(1-x)(1+x)$ の偏角を調べるのが有効である。ここで, $1-x=r_1e^{i\theta_1}$, $1+x=r_2e^{i\theta_2}$ としよう。そのとき, $(1-x)(1+x)=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$ である。したがって, $(1-x)(1+x)$ の偏角は $1-x$ と $1+x$ の偏角の和である。そのようにして, 積分路 2, または, 積分路 3 たどったときの $(1-x)(1+x)$ の偏角の変化 (a) と, 積分路 2 と積分路 3 を連続でたどったときの偏角の変化を図 3.5 に示す。 この図は, 積分路の長



(a) For either Path 2 or Path 3.　　(b) For Path 2 and Path 3 taken subsequently.

図 3.5: 積分に含まれる $(1-x)(1+x)$ の偏角の変化とリーマン面

さを横軸に, 偏角を縦軸にとったグラフである。積分路 2 か積分路 3 のいずれかをとると偏角は, 図 3.5 (b) のように変化する。ここで, 初期状態で原点 O がリーマン面 S_+ 上に存在すると仮定する。このグラフにおいて, 積分路 3 における各区間を括弧の中に記している。積分路 2 をとったとき, 偏角は 1 を周回する間に偏角が 2π だけ変化し, リーマン面が S_- に遷移する。積分路 3 をとったとき, 偏角は -1 を周回する間に偏角が 2π だけ変化し, 同様に, リーマン面が S_- に遷移する。積分路 2 と積分路 3 を立て続けにたどったときの偏角は図 3.5 (b) のように変化する。その内容は, 積分路 2 をたどると偏角が 2π だけ増加し, リーマン面が S_+ から S_- に遷移する。続いて, 積分路 3 をたどると偏角がさらに 2π だけ増加し, リーマン面が S_+ に戻る。

それでは, 具体的に積分を評価しよう。積分を評価するにあたり, 上で示した事実により, 分岐点を周回する経路 C_1 と C_{-1} に沿った積分はゼロとみなす。まず, 積分路 2 に沿った積分は,

$$\int_{\substack{0_+\\(P_{\mathrm{II}})}}^{0_-}\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1-z^2}}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}+\int_1^0\left(-\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}\right)=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi,$$

のように計算できる。左辺の積分記号は, リーマン面 S_+ の 0 から積分路 2 (P_{II}) に沿ってリーマン面 S_- の 0 まで積分することを意味する。数式変形によって, 積分変数を x に変更したのは, その積分変数が実数であることを意図する。さらに, 右辺の第 2 項の被積分関数に負の符号が付加されているのは, 積分路がリーマン面 S_- に遷移したからである。開始時点で積分路はリーマン面 S_+ に存在していた, 分岐点 1 を周回した時点で積分路は

リーマン面 S_- に遷移する。リーマン面 S_- では平方根関数である被積分関数の符号が負に切り替わるのだ。積分路 C_+ の開始点をリーマン面 S_- 上の 0 とすると, その終端はリーマン面 S_+ 上の 0 となる。被積分関数は符号が逆転するため, 積分結果は,

$$\int_{\substack{0_- \\ (P_{\mathrm{II}})}}^{0_+} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1-z^2}} = -\pi,$$

のように, 符号反転した結果となる。この積分結果から, 積分路 P_2 を 2 回たどって積分すると,

$$\int_{(P_{\mathrm{II}}+P_{\mathrm{II}})} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1-z^2}} = \int_{\substack{0_+ \\ (P_{\mathrm{II}})}}^{0_-} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1-z^2}} + \int_{\substack{0_- \\ (P_{\mathrm{II}})}}^{0_+} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1-z^2}} = 0,$$

のように打ち消しあってしまう。

引き続き, 積分路 3 (P_{III}) に沿った積分を考えよう。被積分関数が偶関数であり, 積分路 P_{III} が P_{II} と対称であるので, 特に新たな計算をすることもなく,

$$\int_{\substack{0_+ \\ (P_{\mathrm{III}})}}^{0_-} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1-z^2}} = -\pi, \qquad \int_{\substack{0_- \\ (P_{\mathrm{III}})}}^{0_+} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1-z^2}} = \pi,$$

が得られる。積分路 P_3 を 2 回まわる積分は P_2 の場合と同様にゼロになる。これに対して, リーマン面 S_+ 上の 0 を起点として C_+, C_- の順にたどる積分路に沿った積分は,

$$\int_{(P_{\mathrm{II}}+P_{\mathrm{III}})} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1-z^2}} = \int_{\substack{0_+ \\ (P_{\mathrm{II}})}}^{0_-} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1-x^2}} + \int_{\substack{0_- \\ (P_{\mathrm{III}})}}^{0_+} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1-x^2}} = 2\pi,$$

のようになる。逆に, リーマン面 S_+ 上の 0 を起点として P_{III}, P_{II} の順にたどる積分路に沿った積分は,

$$\int_{(P_{\mathrm{III}}+P_{\mathrm{II}})} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1-z^2}} = \int_{\substack{0_+ \\ (P_{\mathrm{III}})}}^{0_-} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1-z^2}} + \int_{\substack{0_- \\ (P_{\mathrm{II}})}}^{0_+} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1-z^2}} = -2\pi,$$

のように書くことができる。

ここまでの考察を応用すると, リーマン面 S_+ 上の 0 から任意の積分路を通って同一のリーマン面上の 0 に戻るまでの積分は,

$$\int_0^0 \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1-z^2}} = 2\pi n, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

となる。この数式に書いたように n は任意の整数である。前に示した図 3.4 に描くように, 原点 0 からリーマン面 S_+ 上の任意の点までの積分路 L とする。ただし, その積分路は被積分関数の極を周回しない。その積分路 L に沿った積分を,

$$\int_{\substack{0 \\ (L)}}^{z} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1-z^2}} \equiv u,$$

と定義すると, 積分路を特に規定しない積分では,

$$\int_0^z \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1-z^2}} = u + 2\pi n,$$

となるはずである。右辺に含まれる整数 n は, その積分経路の選び方によって決まる。本節の冒頭で説明したように, この数式の左辺は $\arcsin z$ である。それを利用して両辺の逆関数をとると,

$$\sin(u + 2\pi n) = \sin u,$$

が得られる。つまり, 正弦関数は周期 2π の周期関数である。

3.3.3　ヤコビの楕円関数の周期

前節で三角関数の周期を調べた方法と同様にして楕円関数の周期を調べよう。ヤコビの楕円関数 (sn 関数) の逆関数は,

$$u = \int_0^z \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

なる楕円積分である。この積分の逆関数をとると, $z = \mathrm{sn}\, u$ となる。この積分の被積分関数は, ± 1 と $\pm 1/k$ を極にもつ。つまり, 前節で取り扱った被積分関数よりも極が多いのだ。前節と同じ考え方で, 積分路の基本形を作ると, 図 3.6 に示す積分路 L, $C_\pm$, $D_\pm$ となる。積分路 L は極を周回しない経路であり, $C_\pm$ は極 ± 1 を周回する経路, さらに, $D_\pm$ は極 ± 1 と $\pm 1/k$ を周回する経路である。積分路 $D_\pm$ について, 積分路の基本形とするなら極 $\pm 1/k$ のみを周回する経路にしたほうがよいと思うかもしれない。その経路については, 後に説明することにする。

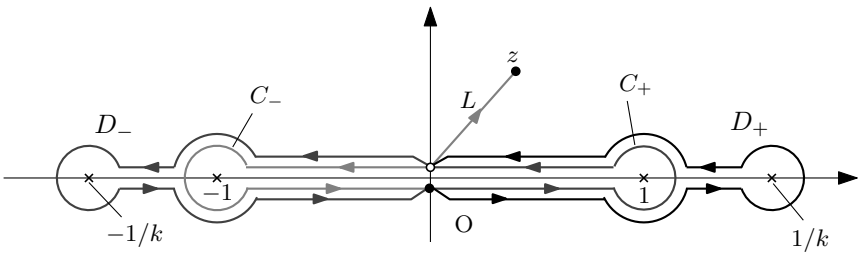
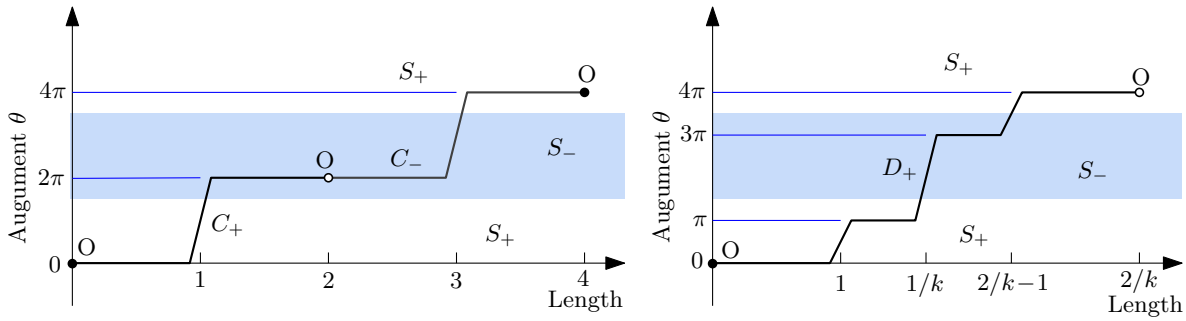


図 3.6: 楕円積分の積分路

楕円積分も平方根関数を積分関数に含むため, 積分路をたどるとリーマン面が切り替わると予想できる。積分路をたどったときの $(1-z^2)(1-k^2z^2)$ の偏角と, 被積分関数のリーマン面は図 3.7 のようになる。まず, 積分路 C_+ と C_- を連続でたどったときのリー満面の遷移 (図 3.7 (a)) を説明しよう。開始点をリーマン面 S_+ の原点 O であるとする。積分

路 C_+ をたどると, 極 1 を周回したところでリーマン面 S_- に遷移する。原点に戻った後に C_- をたどると, 極 -1 を周回したところでリーマン面 S_+ に戻る。この経路をたどると, 2 つの極を反時計回りに周回しているため偏角は 4π だけ増加する。



(a) For C_+ and C_- linked subsequently.　(b) For either D_+ or D_-.

図 3.7: 楕円積分の積分路に沿ったリーマン面の遷移

積分路 D_+ をたどった場合のリーマン面の遷移 (図 3.7) を説明しよう。リーマン面 S_+ の原点 O を出発し, 極 1 を半回転する。その時点ではリーマン面は遷移しない。そのまま積分路をたどると, 極 $1/k$ を周回したときリーマン面は S_- に遷移する。積分路を引き返す途中, 極 1 を半回転し, そのときにリーマン面は S_+ に戻る。この経路をたどった場合も, 2 つの極を反時計回りに周回しているため偏角は 4π だけ増加する。積分路 D_- をたどった場合のリーマン面の遷移も同様である。

それでは, 各積分路に沿った積分を評価しよう。そのための基本的な積分値として, リーマン面 S_+ 上で区間 $[0,1)$ と $(1,1/k)$ での積分を評価しよう。前者を $I(0,1)$, 後者を $I(1,1/k)$ と書こう。すると, $I(0,1)$ は完全楕円積分であるので,

$$I(0,1) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = K,$$

となる。続いて, $I(1,1/k)$ は,

$$I(1,1/k) = \int_1^{1/k} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = i\int_1^{1/k} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(z^2-1)(1-k^2z^2)}},$$

と書くことができる。この数式の右辺のように変形するために, 分子と分母に i を乗じた。さらに, $k'^2y^2 = 1-k^2z^2$ によって新たな変数 y を用いた数式に変換すると,

$$\begin{aligned} I(1,1/k) &= \int_1^{1/k} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \\ &= i\int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = iK', \end{aligned}$$

のように積分計算できる。この数式から分かるように, 変換後の数式は完全楕円積分になっている。なお, K' は $K' \equiv K(k')$ で定義されるように, 母数が k' $(= \sqrt{1-k^2})$ である完全楕円積分を意味する。

積分路 C_+ に沿った積分について, 極 1 を周回する円弧の半径をゼロに近づけると, 前節で説明したように, 円弧に沿った積分はゼロに近づく。そのとき, C_+ に沿った積分は,

$$\begin{aligned}
&\int_{\substack{0_+ \\ (C_+)}}^{0_-} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \\
&\qquad = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} + \int_1^0 \left(-\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \right) = 2K,
\end{aligned}$$

のように計算できる。この数式変形において, 第 2 項はリーマン面 S_- における積分を意味している。積分路 C_+ をたどった直後, 積分変数がリーマン面 S_- の上に存在するため, リーマン面 S_+ の上に存在する積分路 L に接続できない。積分路 L に接続するためには, もう一度 C_+ か C_- をたどる必要がある。その場合の積分は, 前節で計算した逆正弦関数と同様に,

$$\int_{\substack{0 \\ (C_+ + C_+)}}^{0} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = 0, \qquad \int_{\substack{0 \\ (C_+ + C_-)}}^{0} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = 4K,$$

となる。この積分値のうち, 第 1 の積分値は, 積分路 C_+ をとどって原点に戻るとリーマン面が S_- となっているため, 続いて同じ経路を積分しても, 被積分関数が符号反転しているため積分結果が相殺されるのだ。逆に, C_+ の後に C_- をたどると, 積分結果は 2 倍になる。

続いて, 積分路 D_+ に沿った積分を計算しよう。その積分経路をたどる間のリーマン面の遷移に注意しながら積分を実行すると,

$$\begin{aligned}
&\int_{\substack{0_+ \\ (D_+)}}^{0_+} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \\
&\quad = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} + i \int_1^{1/k} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \\
&\qquad + i \int_{1/k}^1 \left(-\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \right) + \int_1^0 \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \\
&\quad = I(0,1) + I(1,1/k) + I(1,1/k) - I(0,1) = 2iK',
\end{aligned}$$

のように計算できる。計算途中の第 3 項がリーマン面 S_- での積分, それ以外の項がリーマン面 S_+ での積分である。この積分路をたどって原点 O に戻ってきたとき, 積分変数はリーマン面 S_+ に存在する。つまり, そのまま積分路 L への接続が可能である。

リーマン面 S_+ の原点から z までの積分は, 任意の積分路をとった場合,

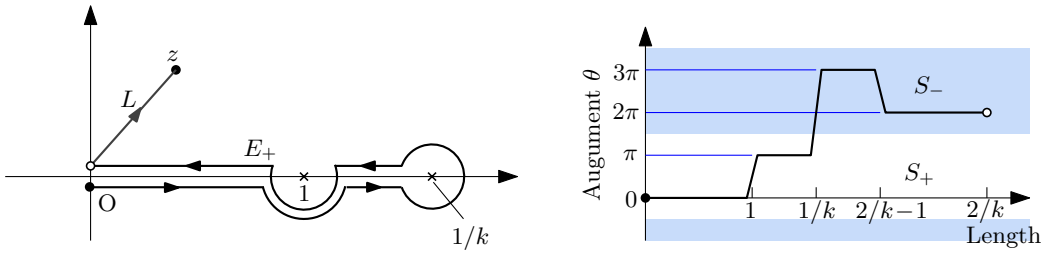
$$\int_0^z \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = \int_{\substack{0\\(L)}}^z \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} - 4mK - 2inK',$$

となる。ここで, m と n は任意の整数である。当然, 負の値でもゼロでも構わない。左辺の積分の積分路が極を周回しなければ, m と n はともにゼロとなる。左辺を u とおき, 右辺の第 1 項が $\operatorname{invsn} z$ であるので, 逆関数をとると,

$$\operatorname{sn}(u + 2mK + 2inK') = \operatorname{sn} u,$$

が得られる。つまり, sn 関数の二重周期性が証明できたことになる。同時に, sn 関数には $4K$ と $2iK'$ を除く基本周期成分が存在しないことも示されている。

積分路の基本形について　周期性を考察するための積分路の基本形として分岐点 $1/k$ のみを周回する経路について考察してみよう。その経路 E_+ を図 3.8 (a) に, その経路をたどったときの $(1-z^2)(1-k^2z^2)$ の偏角の変化を図 3.8 (b) に示す。その偏角の変化から, 積分変数が位置するリーマン面を追跡すると, 原点を出発するときリーマン面 S_+ だったが, 分岐点 $1/k$ を周回した時点でリーマン面は S_- に遷移する。その後, リーマン面が遷移することなく原点に戻る。



(a) Path of integral encircling $1/k$ alone.　(b) Argument of $(1-z^2)(1-k^2z^2)$ along the path.

図 3.8: 分岐点 $1/k$ のみを周回する経路

積分路に沿ったリーマン面の遷移がわかったので積分が実行しやすい。リーマン面の遷移に注意しながら, 積分路 E_+ に沿って積分を実行すると,

$$\begin{aligned}
&\int_{\substack{0_+\\(E_+)}}^{0_+} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \\
&\quad= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} + i\int_1^{1/k} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \\
&\qquad + i\int_{1/k}^1 \left(-\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}\right) + \int_1^0 \left(-\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}\right) \\
&\quad= I(0,1) + I(1,1/k) + I(1,1/k) + I(0,1) = 2K + 2iK',
\end{aligned}$$

が得られる。つまり, E_+ に沿った積分は, C_+ に沿った積分と D_+ に沿った積分の和である。よって, 積分結果を考える上で, E_+ よりも D_+ を基本形と考えたほうが都合がよかったのである。

3.3.4　補助関数の周期

ヤコビの楕円関数の補助関数 cn 関数の周期について, リーマン面を用いて考察しよう。補助関数 cn 関数が $4K$ と $2iK'$ の二重周期をとることを再確認しよう。

$$u = -\int_1^z \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(k'^2 + k^2 z^2)(1 - z^2)}},$$

を考えるとよい。この積分は $\operatorname{invcn} z$ となるので, 両辺の逆関数をとれば $z = \operatorname{cn} u$ となる。被積分関数の分岐点が ± 1 と $\pm k'/k$ であるので積分路の基本形として, 図 3.9 に示す経路を考えればよいだろう。具体的には, 次のような積分路を基本形として設定する。

積分路 1 分岐点 1 の近傍から分岐点を周回することなく複素数 z に到達する L をとる経路。

積分路 2 分岐点 1 の近傍から実軸上を負の方向にたどり, 原点を超え, 分岐点 -1 を周回し, 実軸上を正の方向にたどり, 分岐点 1 を周回して開始点に戻る経路。

積分路 3 分岐点 1 の近傍から実軸上を負の方向にたどり, 原点で虚軸上の正の方向に曲がり, 分岐点 ik'/k を周回し, それまでの道を逆にたどった後, 分岐点 1 を周回し開始点に戻る経路。

積分を実行するため, 1 から 0 を実軸に沿った積分と, 0 から ik'/k を虚軸に沿った積分を計算しておこう。なお, 積分路はリーマン面 S_+ に存在すると仮定する。まず, 前者に関して, $y \equiv \sqrt{1 - z^2}$ なる y を用いると,

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{(1 - y^2)(1 - k^2 y^2)}} = K,$$

のように変形でき, 計算できる。つまり, この積分は完全楕円積分に変形できたということである。後者についても, $y \equiv \sqrt{1 - z^2}$ なる y を用いると,

$$I_2 = \int_1^{1/k} \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{(1 - y^2)(1 - k^2 y^2)}} = iK',$$

のように計算できる。変数変換によって, この場合も実軸に沿った積分に変換できるのだ。しかも, この積分は前節で計算した積分と同一であるので, 容易に積分値できたのだ。

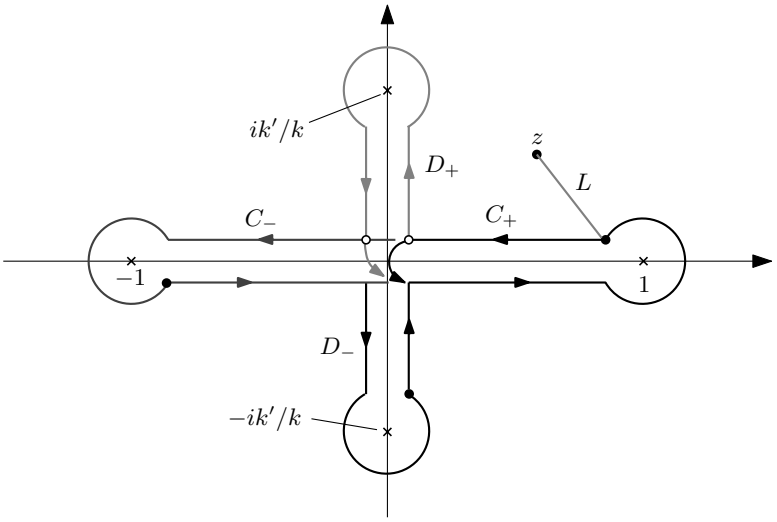


図 3.9: ヤコビの補助関数の周期のための積分路

まず, 積分路 1 に沿った積分を考えよう。この積分は, 特に計算することもなくゼロであることが分かる。なぜなら, 原点は分岐点でないので, その場所で折り返しても $(k'^2 + k^2z^2)(1-z^2)$ の偏角が変化しないので, 折り返した後の積分が前半の積分を打ち消すからである。

積分路 2 は, 分岐点 1 の近傍を出発して実数の負の方向へ延びる積分路が原点で折り返さず, 分岐点 -1 まで延びる。その後, 分岐点 -1 を周回し実数軸上を逆に戻り, 分岐点 1 を周回するまでの経路である。まず, 1 から -1 まで実軸をたどる経路で積分は $2K$ となる。分岐点 -1 を周回すると $(k'^2 + k^2z^2)(1-z^2)$ の偏角が 2π 増加するのでリーマン面が S_+ から S_- に遷移する。したがって, 実軸を -1 から 1 までたどる経路で前半の積分値は打ち消されず, さらに加算されるその結果, 積分路 2 をたどった積分は $4K$ となる。なお, 分岐点 1 を周回した時点で積分路はリーマン面 S_+ に戻る。

積分路 3 は, 分岐点 1 の近傍から実軸をたどって原点に達した後, 虚軸をたどって分岐点 ik'/k まで延びる。その後, 分岐点 ik'/k を周回し, 虚軸を負の方向にたどり, 原点で直角に曲がり, 実軸上を正の方向にたどり分岐点 1 を周回する。その積分路において, 分岐点 ik'/k に達するまでの前半に積分値は $2K + 2iK'$ となる。それは, 既に計算した結果から容易に分かる事実である。分岐点 ik'/k を周回すると, 積分路はリーマン面 S_+ から S_- に遷移するので, それまでの経路を逆にたどる積分で, 積分値は打ち消されずに加算される。その結果, 積分路 3 の終端で積分値は $2K + 2iK'$ となる。また, 積分路の終端で分岐点 1 を周回しているため, 積分路はリーマン面 S_+ に戻っている。

積分路 2 と積分路 3 は, その終端でリーマン面 S_+ に戻っているので, 積分路 L に接続す

ることができる。よって, 積分路を特定しなければ,

$$\int_1^z \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(k'^2+k^2z^2)(1-z^2)}} = u + 4mK + 2n(K+iK'),$$

となるのである。ここで, m と n は積分路の選択によって決まる整数である。したがって, 前節と同様に考えれば, cn 関数の周期に関する性質:

$$\mathrm{cn}(u+4mK+2n(K+iK')) = \mathrm{cn}\, u,$$

が導かれる。つまり, $\mathrm{cn}\, z$ は周期 $4K$ と $2K+2iK'$ の二重周期をもつ関数であることが逆関数の積分から導かれるのである。

他の積分路についての考察　分岐点 1 の近傍を始点と終端とし, しかもリーマン面 S_+ に戻る可能な積分路があと 3 つある。どの経路も双方とも分岐点 $-ik'/k$ を周回する。第 1 の経路は, 正の実軸と負の虚軸を通る経路。第 2 の経路は, 正の実軸, 正の虚軸, 負の実軸, 負の虚軸を通る経路である。さらに, 第 3 の経路は, 正の実軸をたどって原点に到達した後, 虚軸を往復して分岐点 ik'/k と $-ik'/k$ を周回して原点に戻った後, 実軸上をたどって分岐点 1 の近傍に戻る。ただし, その終端で分岐点 1 を周回しない。第 1 の積分路での積分値は $2K-2iK'$, 第 2 の積分路での積分値は $4K+4iK'$, 第 3 の積分路での積分値は $4iK'$ となる。これらの積分値はすべて, $4K$ と $2K+2iK'$ の 1 次結合によって作ることができる。