第5章　最小作用の原理

光学におけるフェルマーの原理のように, 物理現象はなんらかの物理量を最小化するように状態が決まる, との観点をもつと新たな性質を見出すことができる。本章では, 前に導出したラグランジュの運動方程式を最小化問題の手法として物理学を解釈する。

5.1　オイラーの方程式

第 4 章で導出したラグランジュの運動方程式は, 変分法における最小化問題の解を与える微分方程式である。本節では, 実際に変分法を定式化し, ラグランジュの運動方程式と同形の方程式を導出し, 運動方程式の意味を考察する。

5.1.1　最小化問題の解法

物理学で最小化の対象といえば, エネルギーが第 1 候補にあがるだろう。本節ではエネルギーに限ったことではないが, 現時点ではエネルギーを最小化するといえばイメージしやすいだろう。エネルギーは, 大まかに, ポテンシャルエネルギーと運動エネルギーの和であると考えよう。ポテンシャルエネルギーは位置 x に依存し, 運動エネルギーは速度 $\dot{x}$ に依存する。瞬時的なエネルギーに相当する関数として $F(t, x, \dot{x})$ を考えよう。ここで, 関数 F は三つの変数 t, x, $\dot{x}$ をとるように見えるが, それほど単純ではない。変数 x と $\dot{x}$ は t の関数である。この関数をある時間的な区間 $[a, b]$ で積分し,

$$I = \int_a^b F(t, x, \dot{x})\,\mathrm{d}t, \tag{5.1}$$

なる量を評価しよう。積分 I は x の汎関数である。ここで, 積分 I が最小値をとるような x を決定しよう。一般の関数の極値と同様, 積分 I を最小にする条件は, x を微小変化させたときの変化量がゼロに近いと考える。関数 x を変化させたときの汎関数 I の変化量は**変分**と呼ばれ, δI なる記号で記述される。汎関数 I を最小化する x を見つける問題, いわゆる, 最小化問題の解は, 最小値で変分がゼロになるはずだという観点にしたがう。つまり, $\delta I = 0$ となるように x を決定するのだ。そのような解法は**変分法**と呼ばれる。

変分法を解くにあたり, x を $x+\delta x$ に変化させた場合を考える。それに伴い, $\dot{x}$ は $\dot{x}+\delta\dot{x}$ に変化したとする。このとき, 関数 $F(t,x,\dot{x})$ は,

$$F(t,x+\delta x,\dot{x}+\delta\dot{x}) = F(t,x,\dot{x}) + \frac{\partial F}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\delta\dot{x},$$

のように変化すると考えられる。その考察に基づくと, 変分 δI は,

$$\begin{aligned}\delta I &= \int_a^b F(t,x+\delta x,\dot{x}+\delta\dot{x})\,\mathrm{d}t - \int_a^b F(t,x,\dot{x})\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b \left[F(t,x+\delta x,\dot{x}+\delta\dot{x}) - \int_a^b F(t,x,\dot{x})\right]\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\delta\dot{x}\right)\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

となるはずだ。この数式の右辺がゼロになるように x を決定すればよい。ここで, $\delta\dot{x}$ が δx の時間微分だと考え, 右辺の第 2 項の積分に部分積分を適用すると,

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\delta\dot{x}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\delta x\right]_a^b - \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\delta x\,\mathrm{d}t, \tag{5.2}$$

のように計算できる。ここで, 一つだけ制約事項を設ける。積分区間で最小解からのずれ δx はどのようなずれでもよいとした。しかし, 積分区間の両端 $t=a,b$ では $\delta x=0$ とする。この条件を設けなければ, 何が真値かわからなくなるからだ。その制約条件のもとで (5.2) はゼロとなるので, 変分 δI は,

$$\delta I = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)\delta x\,\mathrm{d}t,$$

となる。最小化問題の解 x からの逸脱度 δx は任意であるので, それに対して変分が $\delta I=0$ となるためには,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \tag{5.3}$$

とならなければならない。この微分方程式を解いて, x を決定すればよい。導出された方程式 (5.3) が**オイラーの方程式**である。

5.1.2　オイラーの方程式の変形

オイラーの方程式 (5.3) を解けば最小化問題の解が得られるのだが, 被積分関数 F の形によっては, 問題を簡略化できることがある。本項では最小化問題を簡略化するテクニックについて説明する。

簡略化のためのヒントとしてオイラーの方程式の変形版を紹介しよう。オイラーの方程式 (5.3) において, 時間による微分 $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ には, 明示的に含まれる t の依存性についての偏微分 $\partial/\partial t$ と, x や $\dot{x}$ の中に隠れた t の依存性についての微分の和である。明示的な依存性による偏微分 $\partial/\partial t$ がわかるような形でオイラーの方程式を書くと,

$$\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(F - \dot{x}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) = 0, \tag{5.4}$$

のようになる。この関係式は次のようにして導出される。

この表現を得るには, 隠れた t の依存性も含めて微分した結果 $\mathrm{d}F/\mathrm{d}t$ を書いてみるとよい。その微分係数は,

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial F}{\partial t} + \dot{x}\frac{\partial F}{\partial x} + \ddot{x}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}, \tag{5.5}$$

となる。一方, オイラーの方程式の両辺に $\dot{x}$ を乗じると,

$$\dot{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} - \dot{x}\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \tag{5.6}$$

が得られる。ここで,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{x}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) = \ddot{x}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} + \dot{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}},$$

であることに注意しながら, (5.5) を利用して (5.6) から $\dot{x}\cdot\partial F/\partial x$ を消去すると, 変形した公式 (5.4) が得られる。¶

前項で導出した公式 (5.3) よりも少し複雑に見えるかもしれないが, 変形公式 (5.4) は, 関数 F が明示的に t への依存性を含まない場合に有用である。その場合, (5.4) の左辺の第 1 項がゼロであるので,

$$F - \dot{x}\,\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = \mathrm{const}, \tag{5.7}$$

のように公式が簡略化されるのだ。ここまで簡略化できれば公式を変形した甲斐があった。簡略化した効果を示すため, 後に実際に最小化問題を解いてみよう。

最短経路　最小化問題の簡単な例として, 最短経路を特定する問題を解いてみよう。カルテシアン座標 $[x, y]$ をとり, 経路が $y(x)$ のように y 座標を x の関数で表す。経路の始点を $[0, 0]$, 終点を $[x_1, y_1]$ であるとする。このとき, 経路長は,

$$I = \int_0^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x,$$

で計算できる。この積分を最小化するわけだ。ただし, $y' \equiv \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ である。前に示した定式化では媒介変数が t だったが, この問題では x を媒介変数とする。そのため, 解くべきオイラーの方程式は,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0,$$

である。ところが, $F = \sqrt{1+y'^2}$ のように y を含まないので, オイラーの方程式は,

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \mathrm{const},$$

まで簡略化できる。この微分方程式は簡単な計算で, $y' = C_1$ (C_1 は定数) に変形できる。その変形された微分方程式を積分すると, $y = C_1 x + C_0$ (C_0 は積分定数) が得られるわけだが, 既に始点と終点の座標が与えられているので, 定数が特定でき,

$$y = \frac{y_1}{x_1}\, x,$$

なる最短経路が得られる。つまり, 2 点間を結ぶ最短経路は直線である。

最急降下線　与えられた点 A と点 B を結ぶ斜面をつくって物体を滑らせる目的において, 到達時間を最短にするための斜面を特定したい。図 5.1 のように, 水平方向に x, 垂直下方に y なる座標をとって, 斜面の垂直座標を $y(x)$ のように x の関数で表す。斜面での摩擦がないと仮定すると, 垂直座標 $y = 0$ で物体を離した場合, 物体の速さは $v = \sqrt{2gy}$ となる。ここで, g は重力加速度である。このとき, 斜面を滑る速度の x 成分は,

$$v_x = \frac{v\,\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}} = \sqrt{\frac{2gy}{1+y'^2}},$$

となるはずだ。ここで, $y' \equiv \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ とした。点 A と点 B の x 座標を, それぞれ, x_A と x_B とすると, 物体がその 2 点間を移動する時間は,

$$t_\mathrm{AB} = \int_{x_\mathrm{A}}^{x_\mathrm{B}} \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\,\mathrm{d}x,$$

なる積分で計算できる。被積分関数 $F = \sqrt{(1+y'^2)/2gy}$ は x についての依存性を明示的に含んでいないので, オイラーの方程式は (5.7) を使うのが便利だ。簡単な計算によって, オイラーの方程式は,

$$y\,(1+y'^2) = 2a,$$

なる形で表現できる。ここで, a は任意の定数である。この数式を y' について解くと,

$$y' = \sqrt{\frac{2a-y}{y}},$$

が得られる。この微分方程式を解けば最急降下線が得られるのだが, y を x の関数として導出するのは難しい。その代りに, x と y を媒介変数で表示することを考えよう。 垂直座標は下方を正にとっているので, $y > 0$ でなければならないし, さらに, y' が実数になるように条件を加えると, $0 \le y \le 2a$ が満たすべき条件である。この条件を満たす関数として,

$$y = a\,(1-\cos\theta),$$

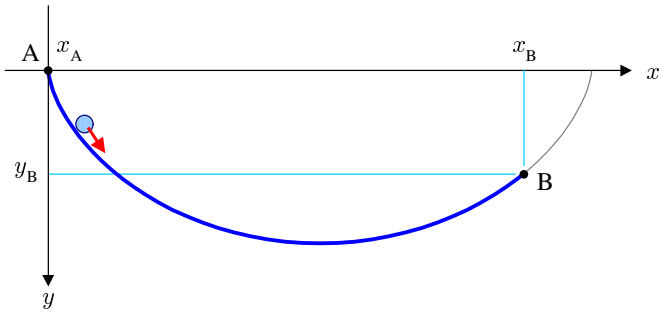

図 5.1: 最急降下線

を仮定しよう。ここで, θ が媒介変数である。この関数形は, 単に, $0 \leq y \leq 2a$ を満たす関数ということで仮定した。条件を満たせば, 他の関数形で媒介変数表示してもよいのだが, その設定次第で問題の解きやすさが左右される。解きやすい設定をしたのか不明のまま計算を進めてみよう。この仮定に基づき, y' を計算すると,

$$y' = a \sin\theta \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x},$$

が得られる。仮定された y と y' を微分方程式に代入すると,

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = a\,(1 - \cos\theta),$$

が得られる。これを θ について積分すると, $x = a\,(\theta - \sin\theta) + C$ が導出される。ここで, C は積分定数である。かなり簡単に関数が特定できたことを考えると, 仮定した媒介変数表示は正解だったということだ。改めて結果を書くと,

$$x = a\,(\theta - \sin\theta), \quad y = a\,(1 - \cos\theta), \tag{5.8}$$

である。得られた曲線はサイクロイド曲線だ。物体の初期位置として, $\theta = 0$ のとき $x = x_A = 0$ となるように積分変数を選んだ。また, 定数 a は始点と終点の位置関係によって決まる。例えば, 終点の位置が $[x_B, 0]$ の場合, $a = x_B/2\pi$ となる。

サイクロイド曲線は, 平面上で車輪を転がしたときの外周上の点の動きを表す曲線だ。車輪の外周の特定の点の動きは, 図 5.2 のように描くことができる。この図は半径 a の車輪を転がし, 移動距離が $1.3a$ 間隔となるように描いている。車輪が $1.3a$ 移動する間に, 角度にして $1.3\,\mathrm{rad} \simeq 74.5°$ 回転する。そのように回転する車輪の外周上の特定の点はサイクロイドを描いているのだ。 円が平面の設置している瞬間, 点は停止状態にある。一方, 点が最も高い位置に回転したとき, 点は車輪の移動速度の 2 倍の速さで水平方向に移動する。それは, 車輪の移動速度と回転速度が加算された状態だからだ。その後, 再び, 点は地面に接地する。

サイクロイド曲線でつくられた斜面に物体を滑らせると, 最下点を挟んで物体は往復運動をする。サイクロイド曲線では, 始点の位置に関わらず, 往復運動の周期が一定である。

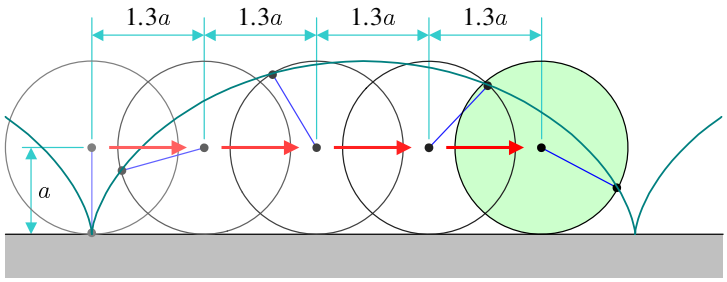

図 5.2: サイクロイドの幾何学的意味

始点の垂直座標を $y_0 = a\,(1-\cos\theta_0)$ とすると, 瞬時的な物体の速さは,

$$v = \sqrt{2ga\,(\cos\theta_0 - \cos\theta)},$$

なる数式で表される。この速度の水平成分は,

$$v_x = \frac{v}{\sqrt{1+y'^2}} = \sqrt{ga\,(\cos\theta_0 - \theta)(1-\cos\theta)},$$

のように計算される。ここで, $\mathrm{d}x = a\,(1-\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta$ であることに注意すると,

$$T = 4\cdot\sqrt{\frac{a}{g}}\int_{\theta_0}^{\pi/2}\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta_0-\cos\theta}}\,\mathrm{d}\theta,$$

によって周期が計算できることがわかる。右辺は, 物体が媒介変数 θ を θ_0 から $\pi/2$ まで変化する間を滑る時間の 4 倍である。媒介変数の区間 $[\theta_0, \pi/2]$ とは, 物体を離した場所からサイクロイドの最下点であるので, その移動に要する時間の 4 倍が周期というわけだ。積分を実行するにあたり,

$$\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1,$$

に注意すると,

$$T = 4\sqrt{\frac{a}{g}}\int_{\theta_0}^{\pi/2}\frac{\sin(\theta/2)}{\sqrt{\cos^2(\theta_0/2)-\cos^2(\theta/2)}}\,\mathrm{d}\theta,$$

が得られるので, さらに積分を実行するために,

$$\cos\frac{\theta}{2} = u\,\cos\frac{\theta_0}{2},$$

なる置きさえを適用する。ここで, u が新しい積分変数である。このとき, 積分範囲は u が 1 から 0 まで変化する区間ということになる。この置き換えによって, 周期 T は,

$$T = 8\sqrt{\frac{a}{g}}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,\mathrm{d}u = 4\pi\sqrt{\frac{a}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{4a}{g}},$$

のように計算できる。したがって, サイクロイド曲線のどの位置から物体を滑らせても, その振幅に関わらず周期は一定である。なお, その周期は長さ $4a$ の微小振幅の単振り子と同一周期である。

懸垂線　図 5.3 に示すように, 両端を固定し, 重力に任せて垂らした一様密度のひもが描く曲線を特定しよう。考え方として, ひもは位置エネルギーが最小となるように変形すると考えるのだ。ひもの密度 (単位長さあたりの質量) を ρ としよう。 水平方向に x 軸, 鉛

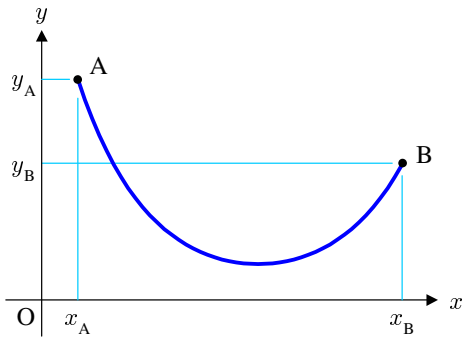

図 5.3: 重力に任せてたるませたひもの形状

直上方に y 軸をとったとする。ひもが曲線 $y(x)$ を描くとき, 水平方向の長さ $\mathrm{d}x$ あたりに, 質量 $\rho\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$ が含まれることを考えると, ひも全体の位置エネルギーは,

$$U = \int \rho y\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x,$$

となるはずだ。ここで, $F = \rho g y\sqrt{1+y'^2}$ と考えて積分 U を最小化するのだ。被積分関数 F は明示的に x の依存性を含んでいないので, 公式 (5.7) を利用するのが便利だ。代入すると,

$$\frac{\rho g\, y}{\sqrt{1+y'^2}} = C,$$

なる微分方程式が得られる。ここで, C は定数である。この微分方程式を変形すると,

$$y' = \sqrt{\frac{y^2}{A^2} - 1},$$

のように書き換えられる。ただし, $A \equiv C/\rho g$ とおいた。つまり, A は長さの次元をもつ任意の定数である。この微分方程式は, 容易に解くことができ,

$$y = A\cosh\frac{x-x_0}{A} + y_0,$$

なる解が得られる。ここで, x_0 と y_0 も任意の定数だ。得られた数式のように, 一様な密度のひもは重力によって双曲線余弦関数を描く。この関数は特に, **懸垂線**と呼ばれる。数式に含まれる未知数 (定数) は, 両端が固定される位置, ひもの長さによって決まる。

懸垂線の問題は最急降下線と同様, 変分法の例題として有名である。しかし, 変分法が必須ではなく, 力の釣り合いから懸垂線を導出できる。図 5.4 のように, 微小区間 $[x, x+\varDelta x]$ のひもに作用する力を考える。微小区間の質量は, 前に述べたように $\rho\sqrt{1+y'^2}\,\varDelta x$ だから,

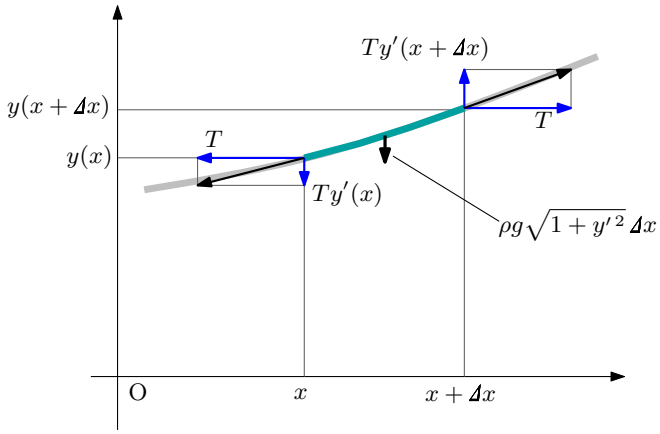

図 5.4: 力の釣り合いによる懸垂線の特定

鉛直下方に重力 $\rho g\sqrt{1+y'^2}\,\Delta x$ が作用する。 一方, 微小区間の左右には張力が作用している。微小区間が安定しているならば, 左右に作用する張力の水平成分が釣り合っているはずだ。その仮定から, 微小区間の左端の張力の x 成分が $-T$, 右端の張力の x 成分が T と考えるのが妥当だ。そのとき, 張力の y 成分は, 左端で $-Ty'(x)$, 右端で $Ty'(x+\Delta x)$ となるだろう。つまり, 張力の合力は y 成分のみをもち, その成分は,

$$-Ty'(x)+Ty'(x+\Delta x)=Ty''(x)\,\Delta x,$$

となる。張力の合力は鉛直下方に作用する重力と釣り合うはずなので, 微小区間に作用する力の釣り合いは,

$$y''=\frac{\rho g}{T}\sqrt{1+y'^2},$$

が成立する。この方程式を積分すると,

$$y'=\sinh\frac{\rho g}{T}(x-x_0),$$

が得られ, この数式をさらに積分すると, 重力にまかせて垂らしたひもの形状:

$$y=\frac{T}{\rho g}\cosh\frac{\rho g}{T}(x-x_0)+y_0,$$

が特定できる。当然, x_0 と y_0 は積分定数である。得られた数式は変分法で導出した結果と同一である。変分法で導出した結果における定数 A は, 力の釣り合いで解いた数式と比較すると, $A=\rho g/T$ であることがわかる。その関係から見かけ上, 力の釣り合いから導出した結果の方が積分定数が定まっているように見えるかもしれないが, それは気のせいである。なぜなら, 現時点で張力 T が特定できていないからだ。張力 T を特定するには他の物理条件が必要なのだ。そのことを考えると, $\rho g/T$ も単なる積分定数にすぎず, 変分法の結果は, 力の釣り合いが導出する数式と同一である。

5.2　ハミルトンの原理

第 4 章で導出したラグランジュの運動方程式は, 変分法におけるオイラーの方程式である。つまり, 物体の運動は最小化問題の解として決定されるということだ。本節ではその事実を分析する。

5.2.1　ラグランジュの運動方程式

一般化座標 q_k の系において, ポテンシャルを U, 運動エネルギーを K としたとき, 物体の運動はラグランジュの微分方程式で規定される。ラグランジュの運動方程式は, $L \equiv K - U$ なるラグランジアンを定義すると,

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0,$$

となる。ただし, 外力が存在しないものとする。明らかに, ラグランジュの運動方程式は変分法におけるオイラーの方程式である。例えば, n 次元の一般化座標において, ラグランジアンは,

$$L(q_1, q_2, \ldots, q_n,\ \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n),$$

なる関数である。ラグランジュの運動方程式は, 任意の積分区間 $[t_0, t_1]$ において,

$$I = \int_{t_0}^{t_1} L(q_1, q_2, \ldots, q_n,\ \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n)\,\mathrm{d}t$$

を最小にする問題に帰着する。ラグランジュの運動方程式は, いかなる時間帯においても成立するので, 積分区間 $[t_0, t_1]$ はどの時間帯でもよい。ラグランジュの運動方程式は, ニュートンの運動方程式と対応しているので, ニュートンの運動方程式は, 積分 I に停留値をとらせるように運動が決まるのだ。言い換えると, 現実の運動は,

$$\delta I = 0,$$

となるように定められるわけだ。この数学的性質は, 解析力学における基本原理として位置づけられ, **ハミルトンの原理**と呼ばれる。

外力が存在する場合, ハミルトンの原理が成立するか調べてみよう。一般化力 F_k が与えられたとき, ラグランジュの運動方程式は,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = F_k,$$

となる。この運動方程式は, 変分原理では,

$$\int \left[\delta L(q_1, \ldots, q_n,\ \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n) + \sum_k F_k \delta q_k\right] \mathrm{d}t = 0, \tag{5.9}$$

のように書き換えられる。この数式がラグランジュの運動方程式につながることを示そう。ラグラジアン L の変分が,

$$\delta L = \sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k}\delta q_k + \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\frac{\mathrm{d}(\delta q_k)}{\mathrm{d}t},$$

となるので, これを (5.9) に代入するのだが, 上式の第 2 項の積分に関して部分積分を適用する。その結果,

$$\int \sum_k \left[\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + F_k\right]\delta q_k \,\mathrm{d}t = 0, \tag{5.10}$$

が得られる。この数式が高騰的にゼロになるためには, ブラケットの中がゼロであること, すなわち,

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + F_k = 0,$$

が必要である。したがって, ラグランジュの運動方程式が変分法によって導出できた。

外力 F_k が保存力であれば, ポテンシャル U を用いて $F_k \equiv -\partial U/\partial q_k$ のように外力を定義できるので,

$$F_k\,\delta q_k = -\sum_k \frac{\partial U}{\partial q_k}\delta q_k = -\delta U,$$

のように変形できる。その場合, 積分 (5.10) は,

$$\int \sum_k [-\delta L - \delta U]\,\mathrm{d}t = 0, \tag{5.11}$$

のように単純な形にまとまるのだ。しかし, 外力 F_k が保存力でない場合, このような簡単な関係で書けないため, 微分方程式がすっきりした形に書けない。

5.2.2　最小作用の原理

変分法との比較によって, ラグランジュの運動方程式がラグランジアン L の時間積分を最小化する解を与えることを確認した。本項では, エネルギー保存則を考慮し, その最小化問題の物理的意味を考察する。

エネルギー保存則は, 運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和, すなわち, 全エネルギー $E = K + U$ が不変であることを規定する。この法則は既に第 1 章で示したとおりだ。エネルギー保存則に注意すると, ラグランジアンは,

$$L = K - U = K - (E - K) = 2K - E, \tag{5.12}$$

のように表現できる。ラグランジュの運動方程式がラグランジアンを最小化する解を与える事実から, 物体の運動は,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L\,\mathrm{d}t = 0,$$

なる停留条件を満たすように決定されているとの解釈ができる。ここで, 関係式 (5.12) に注目し, エネルギー保存則が $\delta E = 0$ であると考えると, ラグランジアン L に関する停留条件は,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L \,\mathrm{d}t = 2\delta \int_{t_1}^{t_2} K \,\mathrm{d}t = 0,$$

のように書き換えられるので, 結果的に,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} K \,\mathrm{d}t = 0, \tag{5.13}$$

が得られるのだ。この結果によると, 運動エネルギーの時間積分が停留条件を満たす, つまり, 運動エネルギーの時間積分が最小となるように運動が決定されるということである。しかし, これでは少なくとも自由落下が説明できないではないか。どのようなポテンシャル分布においても, 運動エネルギーさえ最小化すればよいのなら, その場に静止している解に落ち着くからだ。

得られた結論 (5.13) は正しいのだが, 途中の仮定を単純化しすぎているため, この数式を考える上での注意事項が欠落している。最小化問題 (5.13) を取り扱うには, 考慮すべき条件があるのだ。次の段落で, 考慮すべき条件を考察する。

一様重力場での自由運動　例として, 一様な重力加速度 g における重力場での運動を考えてみよう。ラグランジアン L を最小化する立場に立った場合,

$$L = K - U = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy,$$

が最小化の対象だ。ラグランジュの運動方程式によると,

$$m\ddot{x} = 0, \qquad m\ddot{y} + mg = 0,$$

なる微分方程式が得られる。この微分方程式を解くと,

$$x = v_x t, \qquad y = v_y t - \frac{1}{2}gt^2,$$

なる放物運動が得られるのだ。ここで, v_x と v_y は初速度を表す積分定数であり, $t = 0$ において $[x, y] = [0, 0]$ となるように他の積分定数を選んだ。ところが, 運動エネルギー K のみを最小化の対象にすると, y 軸方向における運動方程式が $m\ddot{y} = 0$ となるため, 放物運動が導出できないのだ。この不整合は, 積分 (5.13) に関して考察すべき事項が欠落しているからだと考えられる。

実際に, 放物運動と, わずかに違う経路をとる運動を比較してみよう。図 5.5 に描くような放物運動をして, 水平方向から 30° 上方に物体を投げ上げる場合を考えよう。地上の点 A から投げ出される物体の初速を v_0 とすると, x 方向の初速度は $\sqrt{3}\,v_0/2$, y 方向の初速度

は v_0 である。時刻 $t=0$ で物体を投げ上げたとすると, 時刻 $t=v_0/2g$ で物体は放物線の頂点 C を通過し, $t=v_0/g$ で地上の点 B に着地する。このような放物運動の経路を L としよう。

経路 L_0 との比較のため, 二つの経路に沿って物体を運動させたときを考えよう。第一の経路は, 点 A から 30° の斜度を上り, 点 C の鉛直上方に位置する点 C′ で向きを変え, 30° の斜度で点 B まで下る経路である。これを経路 L_+ としよう。 なお, 点 C′ の高さは $v_0^2/4g$

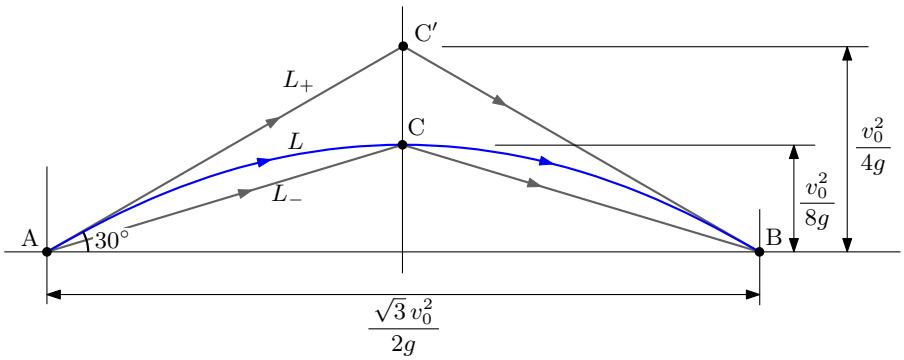

図 5.5: 一様重力場における物体の運動軌跡

である。第二の経路は, 点 A から放物線の頂点 C まで直線的に斜面を上り, その後, 直線的に点 B まで斜面を下る経路である。これは経路 L_- としよう。放物線 L と, 斜面 L_+ と L_- について, 点 A から点 B までの移動時間と, 運動エネルギーの時間積分を表 5.1 にまとめた。すべての経路とも初速度 v_0 で物体が出発しているが, 経路によって所要時間が異なる。当然, 大まわりになるほど所要時間が長くなる。一方, 運動エネルギーの時間積分

表 5.1: 経路に沿った所要時間と運動エネルギーの時間積分

経路	$\overline{\mathrm{AB}}$ 所要時間 $\times v_0/g$	運動エネルギー時間積分 $\times mv_0^3/2g$
放物線 L	1.0000	0.5833
斜面 L_+	1.1716	0.8619
斜面 L_-	0.9661	0.8425

は他の二つに比べ経路 L が大差で小さい数値を出している。これだけのデータでは L があらゆる経路の最小値をであることは検証できないが, 十分に小さい数値であることは確かだ。

運動エネルギーの時間積分　上の考察を参考に, 点 A から点 B まで移動するときの運動エネルギー K の停留条件を考察しよう。停留条件を満たす運動軌跡が $x_k(t)$ で与えられるとする。これを経路 L と呼ぶことにする。その軌跡から少しずれた軌跡を $x'_k(t')$ とする。

こちらは経路 L' としよう。ここで時間の変数を t としなかったのは, L と L' では点 A から点 B への移動時間がわずかに異なるため, その差を吸収するように少しずつ異なる時刻を対応させる目的で異なる変数 t' を用いた。つまり, 差分を計算するときに異なる時刻の点での差分をとるので, L と L' で対応する点の選び方は自由度があるのだが, 時刻も位置もなるべく近い組み合わせで比較するものする。

経路 L と経路 L' の双方とも, 物体はエネルギー保存則にしたがって運動する。経路 L における速度は $\dot{x}_k$, 経路 L' における速度は $\dot{x}'_k$ であるとする。このとき, 位置の差分 $\delta x_k(t)$ と速度の差分 $\delta\dot{x}_k(t)$ は,

$$\delta x_k(t) = x'_k(t') - x_k(t), \quad \delta\dot{x}_k(t) = \dot{x}'_k(t') - \dot{x}_k(t) = \frac{\mathrm{d}x'_k}{\mathrm{d}t'} - \frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}t},$$

のように定義される。速度の差分 $\delta\dot{x}_k$ をさらに計算すると,

$$\begin{aligned}\delta\dot{x}_k &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\Big[x_k(t) + \delta x_k\Big] - \frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[x_k(t) + \delta x_k\Big] - \frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}t} \\ &= \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} - 1\right)\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\delta x_k(t), \end{aligned} \tag{5.14}$$

が得られる。ここで, $t' = t + \delta t$ とおくと, その微分は $\mathrm{d}t' = \mathrm{d}t + \mathrm{d}(\delta t)$ となるのだから,

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t + \mathrm{d}(\delta t)} = 1 - \frac{\mathrm{d}(\delta t)}{\mathrm{d}t},$$

が成立するはずだ。ここで, $|\mathrm{d}(\delta t)/\mathrm{d}t| \ll 1$ を仮定した。この関係式を (5.14) に代入すると,

$$\delta\dot{x}_k(t) = -\dot{x}_k\frac{\mathrm{d}(\delta t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta x_k(t), \tag{5.15}$$

が得られる。この数式を得るにあたり, 高次の微小量を無視した。また, $\mathrm{d}/\mathrm{d}t'$ か $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ に置き換わ定るのも高次の微小量を無視したことによる。

時刻 t_1 から t_2 にわたって運動エネルギーを時間積分した結果について, 経路 L と L' の差分を評価しよう。具体的には,

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} K\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t'_2} K'\,\mathrm{d}t' - \int_{t_1}^{t_2} K\,\mathrm{d}t,$$

を評価するのだ。ここで, 点 A は双方の経路とも時刻 t_1 に出発したと仮定する。ただし, 点 B への到着時刻が経路 L では t_2, 経路 L' では t'_2 とする。右辺の第 1 項で積分変数が t' だが, 取り扱いやすいように, 積分変数を t にしておこう。そのためには, $\mathrm{d}t' = \mathrm{d}t + \mathrm{d}(\delta t)$ なる変換を利用する。さらに, $K' = K + \delta K$ とすると,

$$\begin{aligned}\delta\int_{t_1}^{t_2} K\,\mathrm{d}t &= \int_{t_1}^{t_2}(K + \delta K)[\mathrm{d}t + \mathrm{d}(\delta t)] - \int_{t_1}^{t_2} K\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{t_1}^{t_2} K\,\mathrm{d}(\delta t) + \int_{t_1}^{t_2}\delta K\,\mathrm{d}t, \end{aligned} \tag{5.16}$$

が得られる。当然ながら, ここでも高次の微小量は無視した。左辺等辺の関係は, 積になった関数の微分 ($(fg)' = f'g + fg'$) と同様の関係である。

簡単のため, カルテシアン座標系を考え, 具体的に運動エネルギーの差分を計算してみよう。カルテシアン座標系において, 複数の質点 m_k で構成される系の運動エネルギーは,

$$K = \frac{1}{2}\sum_k m_k \dot{x}_k^2,$$

である。このエネルギーの差分は,

$$\delta K = \sum_k m_k \dot{x}_k \delta \dot{x}_k,$$

となるはずだ。この数式に (5.15) を代入すると,

$$\delta K = -\sum_k m_k \dot{x}_k^2 \frac{\mathrm{d}(\delta t)}{\mathrm{d}t} + \sum_k m_k \dot{x}_k \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta x_k \cdot \mathrm{d}t,$$

が得られる。これを t について積分すると,

$$\int_{t_1} t_2 \delta K \,\mathrm{d}t = -\int_{t_1}^{t_2} 2K \,\mathrm{d}(\delta t) + \sum_k \int_{t_1}^{t_2} m_k \dot{x}_k \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta x_k \cdot \mathrm{d}t,$$

となるのだが, 右辺の第 2 項について部分積分を実行すると,

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta K \,\mathrm{d}t = -\int_{t_1}^{t_2} 2K \,\mathrm{d}(\delta t) + \sum_k \Big[m_k \dot{x}_k \delta x_k\Big]_{t_1}^{t_2} - \sum_k \int_{t_1}^{t_2} m_k \ddot{x}_k \delta x_k \,\mathrm{d}t,$$

が得られる。ここで, 経路の両端において, 位置に関する差分がゼロ ($\delta x_k(t_1) = \delta x_k(t_2) = 0$) であること, $m_k \ddot{x}_k = f_k$ が系に作用する力の成分であることに注意すると, 計算結果は,

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta K \,\mathrm{d}t = -\int_{t_1}^{t_2} 2K \,\mathrm{d}(\delta t) - \sum_k \int_{t_1}^{t_2} f_k \,\delta x_k \,\mathrm{d}t, \tag{5.17}$$

のように書き換えられることになる。系に作用する力 f_k が保存力であるとの仮定にしたがうと,

$$\sum_k f_k \mathrm{d}x_k = -\sum_k \frac{\partial U}{\partial x_k}\delta x_k = -\delta U,$$

となるはずだ。ここで, エネルギー保存則の登場だ。エネルギー保存則では $\delta E = \delta K - \delta U = 0$ が成立するので, $\delta U = \delta K$ となるのだ。したがって, (5.17) は,

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta K \,\mathrm{d}t = -\int_{t_1}^{t_2} 2K \,\mathrm{d}(\delta t) - \int_{t_1}^{t_2} \delta K \,\mathrm{d}t,$$

のように書き換えれれる。この数式を整理すると,

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta K \,\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2} 2K \,\mathrm{d}(\delta t) = 0,$$

が得られる。この数式を (5.16) と比較すると, (5.13) が得られるのだ。公式の導出から明らかになったように, (5.13) は始点と終点が想定されたうえでの最小問題である。言い換えると, 時間に依存しないホロノミックな束縛を課した最小化問題である。しかも, 物体に作用している力が保存力であるとの仮定で (5.13) を使うのだ。なお, 運動エネルギーの 2 倍を時間積分した量:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} 2K \, \mathrm{d}t,$$

は**作用積分** (または, **作用**[1]) と呼ばれる。その名称ゆえに, (5.13) によって運動が決定されることを原理として取り扱い, **最小作用の原理**と呼ぶ。

5.2.3 フェルマの原理

最小作用の原理が, 始点と終点を指定したうえでの運動エネルギーの時間微分を最小化する問題であることが前項で明らかになった。その最小化問題の形態は光学におけるフェルマの原理に類似している。本項では, 最小作用の原理とフェルマの原理の関係を調べてみる。

保存力の作用を受けて運動する 1 個の質点を考えよう。運動軌跡に沿って測った長さをパラメータ s とすると, 質点の速さは $v = \partial s/\partial t$ と書ける。そのとき, エネルギー保存則は,

$$\frac{m}{2}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2 + U(\boldsymbol{r}) = E,$$

である。この等式を速度 $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$ について解くと,

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{2\left[E - U(\boldsymbol{r})\right]}{m}},$$

が得られる。この関係式は,

$$\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{m}{2\left[E - U(\boldsymbol{r})\right]}}\,\mathrm{d}s,$$

のように書き換えてもよい。最小作用の原理にこの関係を適用すると, 左辺は,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} 2K \, \mathrm{d}t = \delta \int_{t_1}^{t_2} 2\left[E - U(\boldsymbol{r})\right] \mathrm{d}t,$$

のように書き換えられる。ここで, $\mathrm{d}t$ を $\mathrm{d}s$ で書き換えるため, 積分変数の変換を適用すると,

$$\delta \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{2\left[E - U(\boldsymbol{r})\right]}\,\mathrm{d}s = 0, \tag{5.18}$$

[1] ラグランジアン L の時間積分を作用と呼ぶテキストもある。例えば, 潮秀樹, “よくわかる力学の基本と仕組み,” 秀和システム, ISBN4-7980-1361-7, p. 306, 2006.

のように数式が書き換えられる。なお, m は定数であるので, 数式から省略した。さらに, s_1 と s_2 は, それぞれ, 始点と終点の長さ座標であるとする。このように, 最小作用の原理は, 運動エネルギーの平方根を経路長について積分した結果を最小化する問題であるとの解釈も可能だ。

作用積分は光学の分野におけるフェルマの原理に類似している。フェルマの原理は, 始点 A と終点 B を指定したとき, 光の伝搬経路は, それらの点を最短で結ぶ光の軌跡を決定するされるという原理である。例えば, 真空中の光の伝搬速度を c, 位置 $\boldsymbol{r}$ における媒質の屈折率を $n(\boldsymbol{r})$ としよう。そのとき, 位置 $\boldsymbol{r}$ における媒質中の光の伝搬速度は $c/n(\boldsymbol{r})$ となるので, 微小距離 $\mathrm{d}s$ を光が伝搬する時間は $n(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}s/c$ となる。したがって, 光の経路の決定は,

$$T = \frac{1}{c}\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} n(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}s,$$

なる到達時間の最小化問題に帰着する。つまり, 方程式:

$$\delta\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} n(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}s = 0,$$

によって, $\boldsymbol{r}$ を決定することになるわけだ。この方程式を (5.18) と比較すると, $\sqrt{2\,[E-U(\boldsymbol{r})]}$ がフェルマの方程式における $n(\boldsymbol{r})$ に相当する。最小作用の原理は, 運動エネルギーの積分を最小化する問題であり, この平方根はエネルギーの大きさに対応する。一方, フェルマの原理は光の伝搬時間を最小化する問題であり, $n(\boldsymbol{r})$ は伝搬時間を長くするため, 最小作用の原理と似ているのだ。

5.3　対称性と保存則

力学は座標の平行移動と回転, さらに, 時間発展に対して対称である。対象とは, 力学法則がそのまま成り立つということだ。言いかえると, 平行移動, 回転, 時間発展に対して, 運動方程式が形を変えることなく成立するということだ。そのような対称性は, 運動量, 角運動量, エネルギーの保存則と関係があることが解析力学から導かれる。

5.3.1　力学の対称性

本項では平行移動, 回転, 時間発展についてニュートンの運動方程式が不変であることを示す。つまり, 力学が平行移動, 回転, 時間発展に関して対象であることを示すのだ。

平行移動　平行移動に関する対称性は, 宇宙のどこに行っても物理法則が形を変えることなく成立することを示唆している。その対称性を示すのは簡単だ。カルテシアン座標系の x 軸, y 軸, z 軸を, それぞれ, 図 5.6 に描くように a, b, c だけ平行移動する。平行移動された座標軸を, それぞれ, x' 軸, y' 軸, z' 軸として設定する。 空間中の任意の点 P について,

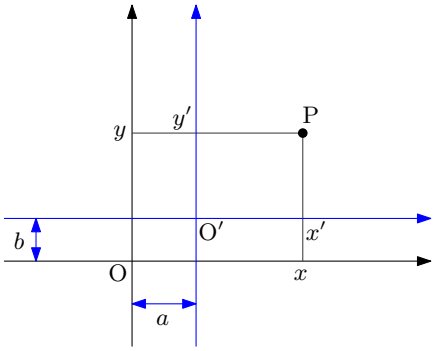

図 5.6: 座標の平行移動

当初の座標 $[x, y, z]$ と, 座標軸を平行移動した後の座標 $[x', y', z']$ との間には,

$$x' = x - a, \qquad y' = y - b, \qquad z' = z - c,$$

なる関係が成立する。平行移動量, a, b, c は定数だ。変換後の座標のうち, x' を時刻 t について微分すると,

$$\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial x}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x},$$

が得られる。もう 1 回だけ t について微分すると,

$$\frac{\mathrm{d}^2x'}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2},$$

が得られることは明らかだ。他の座標 y と z についても同様である。したがって, 運動方程式は,

$$m\ddot{x}' = F_{x'}, \qquad m\ddot{y}' = F_{y'}, \qquad m\ddot{z}' = F_{z'}, \tag{5.19}$$

のように書くことができる。得られた方程式 (5.19) の右辺に関して, $F_{x'}$ は力 $\boldsymbol{F}$ の x' 成分だ。なお, x' 軸が x 軸と平行なので, $F_{x'} = F_x$ が成立する。他の成分 (y' と z') についても同様だ。これらの成分をまとめ, ベクトル形式で記述すると,

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}' = \boldsymbol{F}',$$

となる。なお, 右辺は $\boldsymbol{F}$ と等しいのだが, 新たな座標系で記述したことを明記するため $\boldsymbol{F}'$ と書いた。この数式は, 平行移動した先の座標系 $[x', y', z']$ における運動方程式だ。この結果から明らかなように, 平行移動しても運動方程式は形を変えることなく成立する。これが平行移動に関する対称性だ。

座標回転　座標回転に関する対称性は, 向きに関係なく同一の物理法則が成立することを意味する。確かに, 北を向いているときと東を向いているときで物理法則が変わるのは不適当だ。その性質を示そう。前回と同様にカルテシアン座標 $[x, y, z]$ を考えよう。図 5.7 に描くように, 座標系を z 軸まわりに角度 θ だけ回転させる。回転された x 軸と y 軸を, それぞれ, x' 軸と y' 軸と名づける。さらに, z 軸はそのままだが, z' 軸と名づける。そうすると, 新たな座標 $[x', y', z']$ が設定されたわけだ。 このような座標軸の回転によって, 点 P の

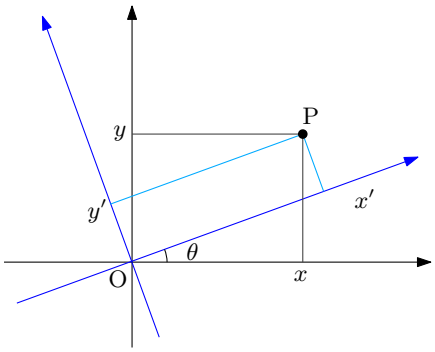

図 5.7: 座標の回転

座標 $[x, y, z]$ が, 回転によって $[x', y', z']$ に変化する。回転前後の座標の関係は,

$$x = x' \cos\theta + y' \sin\theta, \qquad y = -x' \sin\theta + y' \cos\theta, \qquad z = z',$$

のように記述される。これらの座標を t について 2 階微分すると,

$$\ddot{x} = \ddot{x}' \cos\theta + \ddot{y}' \sin\theta, \qquad \ddot{y} = -\ddot{x}' \sin\theta + \ddot{y}' \cos\theta, \qquad \ddot{z} = \ddot{z}',$$

が得られることから, 平行移動のように簡単ではなさそうだ。物体に作用する力 $\boldsymbol{F}$ の成分 F_x, F_y, F_z を用いて, ニュートンの運動方程式を書き換えると,

$$m\left(\ddot{x}' \cos\theta + \ddot{y}' \sin\theta\right) = F_x, \qquad m\left(-\ddot{x}' \sin\theta + \ddot{y}' \cos\theta\right) = F_y, \qquad m\ddot{z}' = F_z,$$

が得られる。これらの数式を見ると, z' については運動方程式が形を変えずに成立しているが, x' と y' については形が変わっているように見える。ところが,

$$F_{x'} = F_x \cos\theta - F_y \sin\theta, \qquad F_{y'} = F_x \sin\theta + F_y \cos\theta, \qquad F_{z'} = F_z,$$

を定義すると, 運動方程式は,

$$m\ddot{x}' = F_{x'}, \qquad m\ddot{y}' = F_{y'}, \qquad m\ddot{z}' = F_{z'}, \tag{5.20}$$

のように簡潔な形で記述できる。新たに定義された $F_{x'}$, $F_{y'}$, $F_{z'}$ は, 逆変換として書くと,

$$F_x = F_{x'} \cos\theta + F_{y'} \sin\theta, \qquad F_y = -F_{x'} \sin\theta + F_{y'} \cos\theta, \qquad F_z = F_{z'},$$

のように, 座標変換と同形の数式になる。つまり, $F_{x'}$, $F_{y'}$, $F_{z'}$ は, それぞれ, 力 $\boldsymbol{F}$ の x' 成分, y' 成分, z' 成分であるので, (5.20) は単なるつじつま合わせの数式ではなく, 新たな座標系において意味のある数式である。したがって, この場合も運動方程式が $m\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{F}'$ と書けるので, 座標回転に対して, ニュートンの運動方程式は対称である。

時間発展　時間発展に関する対称性は, いかなる時刻でも同一の物理法則が成立することを意味する。現時点で成立する物理法則は, 1 秒後であっても, 1 万年後であっても同一の方程式で記述できるということだ。例えば, 定数 a を用い, 時刻 $t' = t + a$ で物理量を観測することを考えよう。この時間の変換が示すように, 時間発展は時間軸における平行移動だ。観測を実行する時刻 t' における時間微分の演算子は,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}(t' - a) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t},$$

となる。この結果を利用すると, 2 階の時間微分の演算子は,

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t'^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2},$$

のように計算できる。この結果から, 時間発展において, 時間微分の演算子が対称性を示すことがわかる。したがって, 運動方程式は, 時間発展した時刻 $t' = t + a$ においても,

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t'^2} = \boldsymbol{F},$$

が成立する。得られた方程式は, $m\,\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t^2 = \boldsymbol{F}$ と同形であるので, 運動方程式は時間発展に対しても対称である。少なくとも 1665 年あたりで提唱された運動方程式が現代でも成立しているのだから, 人間の歴史の範囲では時間発展に対して対称であることは間違いない。

ニュートンの運動方程式は, 本項で示したように, 平行移動, 座標回転, 時間発展に関して対称である。解析力学を用いると, それらの対称性が運動量, 角運動量, エネルギーの保存則と関係があることが示せる。次項以降でその事実を示す。

5.3.2　ネーターの定理

既に宣言したように, 解析力学を用いると, 平行移動, 座標回転, 時間発展に関する力学の対称性が保存則と関係があることが導かれる。対称性と保存則の関係を結び付けるのがネーターの定理だ。ネーターの定理は作用積分が対称であれば, それに対応する保存則が存在することを主張する。

ネーターの定理を導出し, その後, 対称性と保存則の関係を確認することにしよう。取り扱う系が一般化座標 q_j で記述されることを仮定しよう。その座標におけるラグランジアン $L(q, \dot{q}; t)$ によって力学が記述されている。このラグランジアンに対し, 作用積分:

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}; t)\,\mathrm{d}t,$$

を考察する。この作用積分に関し, 座標を $q \mapsto q + \delta q$ のように書き換えたとする。この書き換えは, 作用積分を適用するための物体の運動経路を図 5.8 に描くように, わずかに変化させたと考えればよい。このように数式を書くと, 変分法の停留条件の導出のように見えるかもしれないが, 基本的な考え方が異なる。 停留条件を求める場合, 積分路の始点と終

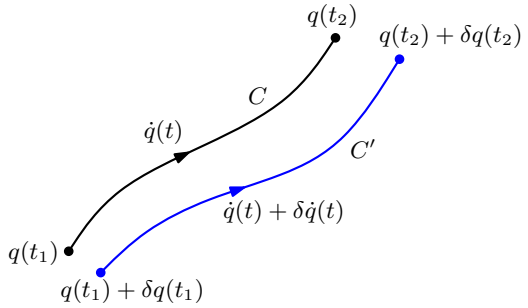

図 5.8: 作用積分の積分経路

点は変化させず, 途中の経路をわずかに変化させていた。つまり, $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ を制約条件としていた。本項では, 始点と終点もずらしてよいものとする。つまり, $\delta q(t_1) \neq 0$, $\delta q(t_2) \neq 0$ を許容するのだ。

積分経路が $q + \delta q$ のように変化することによって, 一般化速度が $\dot{q} + \delta\dot{q}$ となる。このとき, 作用積分が I から $I + \delta I$ に変化したとしよう。この変化量 δI は,

$$\begin{aligned}
\delta I &= \int_{t_1}^{t_2} L(q + \delta q, \dot{q} + \delta\dot{q}; t)\,\mathrm{d}t - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}; t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_j}\delta q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta\dot{q}_j \right) \mathrm{d}t \\
&= \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j \right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \mathrm{d}q_j\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

のように計算できる。第 2 行目への数式変形は, 解析学における微分公式を利用した。第 3 行目への数式変形では, 第 2 行目の被積分関数での第 2 項に部分積分を適用した。第 3 行目の数式の第 2 項は, ラグランジュの運動方程式のため, 必ず, ゼロになる。ここで, 一般化運動量 $p_j = \partial L / \partial \dot{q}_j$ に注意すると,

$$\delta I = \sum_{j=1}^{n} \left[p_j(t_2)\,\delta q_j(t_2) - p_j(t_1)\,\delta q_j(t_1) \right], \tag{5.21}$$

が成立することがわかる。この計算結果によると, 作用積分の変化は, その積分経路に依存することなく, 積分区間の両端での一般化座標の変分 $\delta q(t_1)$ と $\delta q(t_2)$ に依存している。

一般的な経路の変更の場合, 作用積分の変分 δI はゼロにならないが, $\delta q(t_1)$ と $\delta q(t_2)$ を選べば $\delta I = 0$ にすることができる。ましてや, 任意の $\delta q(t_1)$ と $\delta q(t_2)$ において $\delta I = 0$ が可能であれば,

$$\sum_{j=1}^{n} p_j(t)\,\delta q_j(t) = \mathrm{const}, \tag{5.22}$$

が成立するのだ。これがネーターの定理だ。この数式をうまく使えば保存則がつくれるというわけだ。いくつか例を挙げて保存則をつくってみよう。

循環座標　一般座標のうち, 第 k 成分, すなわち, q_k が循環座標である場合を考えよう。循環座標はラグランジアンに寄与しないので, 確実に, $\partial L/\partial q_k = 0$ が成立する。そのため, 第 k 成分に関するラグランジュの運動方程式は,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 0,$$

となる。この方程式は, 一般が運動量 $p_k = \partial L/\partial \dot{q}_k$ を用いると,

$$\frac{\mathrm{d}p_k}{\mathrm{d}t} = 0,$$

のように書き換えられる。つまり, 循環座標に対応する一般化運動量の成分は保存するわけだ。これをネーターの定理で説明しよう。循環座標 q_k がラグランジアンに寄与しないため, q_k を変化させても作用積分は不変であるはずだ。そこで, $\delta q_j = \epsilon\delta_{jk}$ としよう。これは, 一般化座標の第 k 成分だけがゼロでない値 ϵ をもつ状態を表している。そのときの作用積分が不変であるので,

$$\delta I = \epsilon \sum_{j=1}^{n} \Big[p_j(t_2)\delta_{jk} - p_j(t_1)\delta_{jk}\Big] = \epsilon\,\Big[p_k(t_2) - p_k(t_1)\Big] = 0,$$

なる等式を満たすはずだ。この等式からただちに, $p_k(t_2) = p_k(t_1)$ が得られる。時刻 t_1 と t_2 の任意性を考えると,

$$p_k(t) = \mathrm{const},$$

が結論づけられる。したがって, 一般化運動量の第 k 成分が保存することが証明された。

運動量保存則　作用積分の積分経路を $\delta q_j = \epsilon n_j$ のように平行移動した場合を考えよう。ここで, n_j は時刻 t に依存しない定数であり, 平行移動する方向を表すベクトル成分だ。既に検証したように, 平行移動に関してニュートンの運動方程式が対称であるので, 当然, ラグランジアンも対称のはずだ。つまり, 平行移動に対して $\delta L = 0$ となるわけだ。した

がって, 明らかに作用積分の変分がゼロ, すなわち, $\delta I = 0$ となる。そのとき, ネーターの定理よって,

$$\sum_{j=1}^{n} n_j p_j(t) = \text{const}, \tag{5.23}$$

が成立する。ここで, 座標系 q をカルテシアン座標系とし, p_j と n_j が, それぞれ, n 次元空間のベクトル $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{n}$ の成分としよう。さらに, 変分 $\delta I = 0$ を仮定すれば,

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{p}(t) = \text{const}, \tag{5.24}$$

が導かれる。これは $\boldsymbol{n}$ の方向における運動量保存則を意味している。例えば, $\boldsymbol{n}$ が x 方向の単位ベクトルならば, $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{p}$ は運動量の x 成分であるので, ネーターの定理が運動量の x 成分の保存則に相当するのだ。ただし, (5.23) が (5.24) と解釈できるのは, $\boldsymbol{p}$ が n 次元空間中のベクトルである場合だ。

三次元空間中の多粒子系で解釈してみよう。ここで, 系に含まれる粒子の個数を N とし, $n = 3N$ が成立すると仮定する。このとき, 第 k 番目の粒子の運動量を $\boldsymbol{p}^{(k)}$ と書くことにしよう。このベクトルの成分表示が,

$$\boldsymbol{p}^{(k)} = \left[\ p_{3k-2},\quad p_{3k-1},\quad p_{3k}\ \right],$$

であるとし, 一般座標の変分が,

$$\left[\ \delta q_{3k-2},\quad \delta q_{3k-1},\quad \delta q_{3k}\ \right] = \left[\ \epsilon n_x,\quad \epsilon n_y,\quad \epsilon n_z\ \right] = \epsilon\, \boldsymbol{n},$$

となるように設定されていれば, (5.23) は,

$$\sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{p}^{(k)}(t) = \text{const}, \tag{5.25}$$

なる解釈ができる。この数式は, N 個の粒子からなる多粒子系の $\boldsymbol{n}$ 方向における運動量保存則だ。この結果から, 平行移動に関する対称性が運動量保存則と関連していることがわかった。

角運動量保存則　定ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ を用いて, 積分経路の変分が $\delta\boldsymbol{q} = \epsilon\, \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{q}$ となる例を考えよう。この例において, 一般化座標 q は 3 次元のカルテシアン座標とする。変分 $\delta\boldsymbol{q}$ は, 軸まわりに位置ベクトル $\boldsymbol{q}$ を回転させる状況を与える。その回転軸は, 原点 O を通り, $\boldsymbol{\omega}$ に平行な軸である。その状態は図 5.9 を見れば理解しやすい。ベクトル $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{q}$ は, $\boldsymbol{\omega}$ と $\boldsymbol{q}$ の双方に直交するベクトルだ。まず, $\boldsymbol{\omega}$ にと直交することから, $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{q}$ は, 回転軸まわりに回転する $\boldsymbol{q}$ が描く平面上のベクトルだ。さらに, $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{q}$ は $\boldsymbol{q}$ とも直交することから, 回転によって描く円の接線方向に向かうベクトルとなる。 したがって, $\delta\boldsymbol{q} = \epsilon\, \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{q}$ は $\boldsymbol{q}$ が回

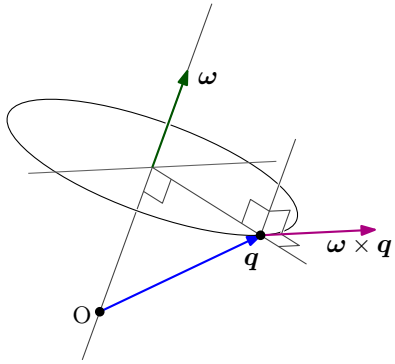

図 5.9: 座標の回転

転によって円を描く際の微小変位となるはずだ。つまり, $\delta\boldsymbol{q}$ は微小の回転変換だ。

既に示したように, 回転変換に関してニュートンの運動方程式が対称であるため, この場合も作用積分の変分は $\delta I = 0$ となるはずだ。設定した一般化座標が 3 次元のカルテシアン座標系の場合, ネーターの定理は,

$$\sum_{j=1}^{n} p_j \delta q_j = \sum_{j=1}^{n} p_j \left(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{q}\right)_j = \boldsymbol{p} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{q}) = \boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}) = \mathrm{const},$$

となる。この数式は, $\boldsymbol{\omega}$ 方向における角運動量の保存に相当する。

粒子数 N の多粒子系 $(n = 3N)$ への対応も可能だ。回転軸の方向を $\boldsymbol{\omega} = [\omega_x, \omega_y, \omega_z]$, 第 k 番目の粒子の位置と運動量を, それぞれ, $\boldsymbol{q}^{(k)} = [q_x^{(k)}, q_y^{(k)}, q_z^{(k)}]$, $\boldsymbol{p}^{(k)} = [p_x^{(k)}, p_y^{(k)}, p_z^{(k)}]$ とする。この仮定に対応し, 一般化座標の変分 δq_j を,

$$\delta q_{3k-2} = \omega_y q_z^{(k)} - \omega_z q_y^{(k)}, \qquad \delta q_{3k-1} = \omega_z q_x^{(k)} - \omega_x q_z^{(k)}, \qquad \delta q_{3k} = \omega_x q_y^{(k)} - \omega_y q_z^{(k)},$$

のように定義し, さらに, 一般化運動量の変分を,

$$p_{3k-2} = p_x^{(k)}, \qquad p_{3k-1} = p_y^{(k)}, \qquad p_{3k} = p_z^{(k)},$$

のように定義すれば, ネーターの定理は,

$$\sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{q}^{(k)} \times \boldsymbol{p}^{(k)}) = \mathrm{const},$$

のように記述できる。この数式は N 粒子系における角運動量保存則だ。したがって, 座標回転に関する対称性が角運動量保存則と関連していることがわかった。

5.3.3　時間発展とエネルギー

エネルギー保存則は時間発展に関する対称性と関連がある。それを証明するには, 作用積分の経路の変化だけでなく, 積分時間も微小変化をネーターの定理を適用しなければならない。

前項では作用積分の時間範囲を $[t_1, t_2]$ としたが, その範囲を微小変化させ, $[t_1 + \delta t_1, t_1 + \delta t_2]$ としよう。そのように変化させたときの作用積分の変分 δI を評価してみるのだ。積分経路は前項と同様に, $q + \delta q$ を適用することにする。そのとき, 作用積分の変分は,

$$
\begin{aligned}
\delta I &= \int_{t_1+\delta t_1}^{t_2+\delta t_2} L(q+\delta q, \dot{q}+\delta\dot{q}; t)\,\mathrm{d}t - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}; t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{t_1+\delta t_1}^{t_2+\delta t_2} \left[L(q, \dot{q}; t) + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_j}\delta q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta\dot{q}_j \right) \right] \mathrm{d}t - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}; t)\,\mathrm{d}t \\
&= \left(\int_{t_1+\delta t_1}^{t_2+\delta t_2} L(q, \dot{q}; t)\,\mathrm{d}t - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}; t)\,\mathrm{d}t \right) + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_j}\delta q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta\dot{q}_j \right) \mathrm{d}t,
\end{aligned}
$$

のように計算できる。ここで, 総和記号を伴う被積分関数の積分区間が $[t_1 + \delta t_1, t_2 + \delta t_2]$ であるはずだが, 微小量の 2 次以上の項を無視したため, 積分区間が $[t_1, t_2]$ となった。この計算を進めるため, 右辺の第 1 項, すなわち, 括弧内の二つの積分の差に注目しよう。それら積分の差は,

$$
\begin{aligned}
\text{1st term of RHS} &= \int_{t_1+\delta t_1}^{t_2+\delta t_2} L(q, \dot{q}; t)\,\mathrm{d}t - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}; t)\,\mathrm{d}t \\
&= \left(\int_{t_1+\delta t_1}^{t_1} + \int_{t_1}^{t_2} + \int_{t_2}^{t_2+\delta t_2} \right) L(q, \dot{q}; t)\,\mathrm{d}t - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}; t)\,\mathrm{d}t \\
&= \left(\int_{t_2}^{t_2+\delta t_2} - \int_{t_1}^{t_1+\delta t_1} \right) L(q, \dot{q}; t)\,\mathrm{d}t = L(q, \dot{q}; t_2)\,\delta t_2 - L(q, \dot{q}; t_1)\,\delta t_1,
\end{aligned}
$$

のように計算できる。この結果を, 計算途中だった δI に代入すると,

$$
\begin{aligned}
\delta I &= L(q, \dot{q}; t_2)\,\delta t_2 - L(q, \dot{q}; t_1)\,\delta t_1 + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_j}\delta q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta\dot{q}_j \right) \mathrm{d}t \\
&= L(q, \dot{q}; t_2)\,\delta t_2 - L(q, \dot{q}; t_1)\,\delta t_1 + \sum_{j=1}^{n} \Big[p_j(t_2)\,\delta q_j(t_2) - p_j(t_1)\,\delta q_j(t_1) \Big] \\
&= L(q, \dot{q}; t_2)\,\delta t_2 - L(q, \dot{q}; t_1)\,\delta t_1 + \sum_{j=1}^{n} \Big[-p_j(t_2)\,\dot{q}_j(t_2)\,\mathrm{d}t_2 + p_j(t_1)\,\dot{q}_j(t_1)\,\delta t_1 \Big] \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n} p_j(t_1)\dot{q}_j(t_1) - L(q, \dot{q}; t_1) \right) \delta t_1 - \left(\sum_{j=1}^{n} p_j(t_2)\dot{q}_j(t_2) - L(q, \dot{q}; t_2) \right) \delta t_2 \\
&= H(t_1)\,\delta t_1 - H(t_2)\,\delta t_2,
\end{aligned}
$$

のように計算できるのだ。第 2 行目への変形には, 前項で取り扱った時間を含まない作用積分の変分を利用した。第 3 行目への数式変形には, $\delta q_j(t_1) = -\dot{q}_j\,\delta t_1$ を利用した。この関係式は, 積分開始時刻を δt_1 だけ遅らせたため, それに合わせて位置 q_j を時間にして δt_1

相当だけ遅らせたことに起因する。当然, 時刻 t_2 については, 同様に, $\delta q_j(t_2) = -\dot{q}_j\,\delta t_2$ が成立する。さらに, 最終行への数式変形には,

$$H = \sum_{j=1}^{n} p_j \dot{q}_j - L(q, \dot{q}; t),$$

なる記号を導入した。実は, この H は次章で導入するハミルトニアンという物理量だ。次章で説明するように, ハミルトニアンは系全体のエネルギーの意味をもつ。

特別な場合として, $\delta t_1 = \delta t_2$ を考えよう。この条件は, 積分の開始時間を遅らせた分と同じだけ終了時間を遅らせるということだ。言い換えると, これは積分時間の平行移動, すなわち, 時間発展による差分を注目している。既に説明したように, 物理現象は時間発展に対して対称であるため, $\delta I = 0$ となるべきだ。その場合, 必ず, $H(t_1) = H(t_2)$ が成立する。これを一般化すると,

$$H(t) = \mathrm{const},$$

と書くことができる。上で述べたように, ハミルトニアンは系全体のエネルギーを意味するので, 得られた性質はエネルギー保存則に相当する。物理的な考察によって, 既に, エネルギー保存則が成立することがわかっているので, ここで仮定したように, 時間の平行移動に対して作用積分が一定でなければならないことが導かれる。その性質は, 「作用積分が時間発展に関して対称である」と表現される。時間発展に関する対称性はエネルギー保存則に対応するわけだ。