第7章　複数質点の微小振動

解析力学の応用として振動現象を取り扱おう。本章で扱う振動現象は, 二重振り子のように複数の振動子が連なった運動だ。複数の振動子が連なった構造は, 物質内部の熱運動の解析や, 連続体における歪みの伝搬などに応用される。複数の振動子が津習った構造では, 個々の振動子に作用する力の特定が難しいためニュートンの記述が容易ではない。そのような問題は, 解析力学を用いると比較的容易に解析できる。

7.1　二重振り子

二重振り子の問題は複数の振動子を取り扱う問題の基本となる題材だ。振動子が 1 個の場合に比べ, 2 個になっただけで問題はかなり複雑になる。一般的な二重振り子は解析的な手法での評価が困難であるので, 本節では, 微小振動に限定して解析することにする。限定された条件での取り扱いであるが, 二重振り子で取り扱う解析的な手法は, 本章の意向で取り扱う振動解析の基礎となる。

図 7.1 に示すように, 原点 O に支点を設け, 長さ l_1 のひもに質量 m_1 のおもりを取り付ける。さらに, そのおもりに, 質量 m_2 のおもりを取り付けた長さ l_2 のひもを接続する。これらのおもりを自由に運動させた系が二重振り子だ。ここでは簡単のため, 二重振り子を鉛直辺面内で小さく振動させる場合を考察する。

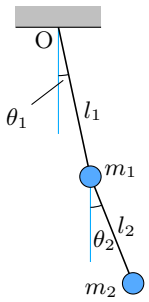


図 7.1: 二重振り子の条件設定

おもりに取り付けられたひも l_1 と l_2 が, それぞれ, 鉛直下方となす角を θ_1 と θ_2 とする。これらを一般座標とする。ひもの長さ l_1 と l_2 が一定であるなら, その長さが束縛条件とな

り, おもりの位置は l_1 と l_2 の組み合わせで確定する。このとき, 二重振り子全体の運動エネルギーは,

$$K = \frac{1}{2}m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 \left(l_1\dot{\theta}_1 + l_2\dot{\theta}_2\right)^2,$$

となるはずだ。右辺の第 1 項がおもり m_1 の運動エネルギー, 第 2 項がおもり m_2 の運動エネルギーだ。

二重振り子のポテンシャルエネルギーを考えよう。ポテンシャルエネルギーは, $\theta_1 = \theta_2 = 0$ の場合を基準 $(U = 0)$ と考えると,

$$U = m_1 g l_1 (1 - \cos\theta_1) + m_2 g \left[l_1 \left(1 - \cos\theta_1\right) + l_2 \left(1 - \cos\theta_2\right)\right],$$

となる。取り扱いを簡単にするため, 角度 θ_1 と θ_2 が微小な場合に限定しよう。とはいえ, 上の式は 1 次の項がないので 2 次近似をする。その結果, ポテンシャルエネルギーは,

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}m_1 g l_1 \theta_1^2 + \frac{1}{2}m_2 g \left(l_1\theta_1^2 + l_2\theta_2^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right) g l_1 \theta_1^2 + \frac{1}{2}m_2 g l_2 \theta_2^2, \end{aligned}$$

なる形で書かれる。これでラグランジアンを決定する材料がそろった。微小振動をする二重振り子のラグランジアン $L\ (= K - U)$ は,

$$\begin{aligned} L = \frac{1}{2}\Big[&\left(m_1 + m_2\right) l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + 2m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 \\ &- \left(m_1 + m_2\right) g l_1 \theta_1^2 - m_2 g l_2 \theta_2^2\Big], \end{aligned} \tag{7.1}$$

のように定義できる。ラグランジアンが定義できれば, 各質点に作用する力を特定しなくてもよいのが解析力学の利点だ。この場合, ラグランジュの運動方程式:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_j} = \frac{\partial L}{\partial \theta_j} \qquad (j = 1, 2),$$

から具体的な運動方程式を導けばよい。ラグランジアンの運動方程式から得られる方程式は,

$$\begin{aligned} &(m_1 + m_2) l_1 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 = -(m_1 + m_2) g \theta_1, \\ &l_1 \ddot{\theta}_1 + l_2 \ddot{\theta}_2 = -g\theta_2, \end{aligned} \tag{7.2}$$

となる。この微分方程式を解けば, 微小振動の条件で, 二重振り子の問題を解析できるわけだ。

本項ではさらに簡略化し, $m_1 = m_2 = m$, $l_1 = l_2 = l$ のように限定しよう。その条件のもとでは, 上に示した運動方程式は,

$$\begin{aligned} &2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 = -2\gamma\theta_1, \\ &\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 = -\gamma\theta_2, \end{aligned} \tag{7.3}$$

のように書き換えられる。ただし, $\gamma \equiv g/l$ とおいた。この方程式を解くには, ラグランジュの未定乗数法を利用しよう。第 2 式に未定乗数 λ を乗じて, 第 1 式に加算するのだ。そのようにすると,

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left[(2+\lambda)\,\theta_1 + (1+\lambda)\,\theta_2\right] = -\gamma\,(2\theta_1 + \lambda\theta_2),$$

なる方程式が得られる。現時点で, λ は未知だが, 成立する方程式の一次結合をとっただけなので, その結果の等式も成立するという考えに基づく。ここで, 左辺の被微分関数が右辺の定数倍になるように λ を選んでみよう。つまり,

$$\frac{2+\lambda}{1+\lambda} = \frac{2}{\lambda},$$

を満たす λ を選べばよい。この方程式は容易に解くことができ, $\lambda = \pm\sqrt{2}$ が特定できるので, 運動方程式は,

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left[\sqrt{2}\,\theta_1 \pm \theta_2\right] = -(2 \mp \sqrt{2})\,\gamma\,\left[\sqrt{2}\,\theta_1 \pm \theta_2\right],$$

のように書き換えられる。ここで, 複合同順とする。このような形になると, 方程式の解は容易にわかる。ここで,

$$\omega_1 \equiv \sqrt{(2-\sqrt{2})\,\gamma}, \qquad \omega_2 \equiv \sqrt{(2+\sqrt{2})\,\gamma},$$

なる角速度を定義すると, 運動方程式の一般解は,

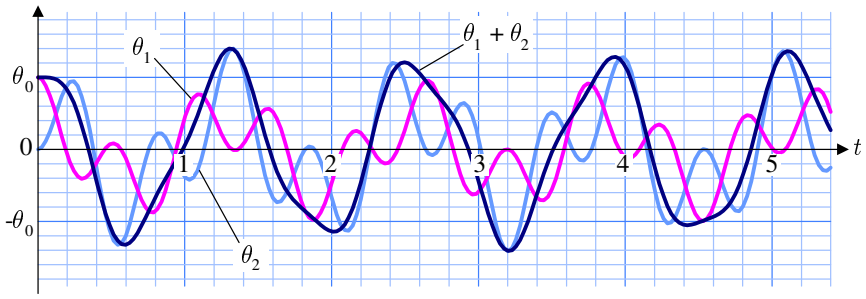
$$\begin{aligned} \sqrt{2}\,\theta_1 + \theta_2 &= A\cos(\omega_1 t + \alpha), \\ \sqrt{2}\,\theta_1 - \theta_2 &= B\cos(\omega_2 t + \beta), \end{aligned} \tag{7.4}$$

と書くことができる。これらを組み合わせて θ_1 と θ_2 を特定すると,

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[A\cos(\omega_1 t + \alpha) + B\cos(\omega_2 t + \beta)\right], \\ \theta_2 &= \quad\frac{1}{2}\left[A\cos(\omega_1 t + \alpha) - B\cos(\omega_2 t + \beta)\right], \end{aligned} \tag{7.5}$$

が得られる。ここで, A, B, α, β は積分定数であり, 初期条件を与えれば決定できる。ここでは, 条件を簡略化したが, 一般的な条件としての m_1, m_2, l_1, l_2 についても同様の解法で解が決定できる。

二重振り子の運動は, 概して, 複雑な運動になる。微小振動に限定したとしても, 異なる周波数の振動の重ね合わせになる。さらに, 数式を見ると, 下のおもりの振れ角 θ_2 は, 上のおもりの振れ角 θ_1 の $\sqrt{2}$ 倍になることもわかる。二重振り子の解の一例として, 図 7.2 に描くような関数が得られる。この例では, $l = 0.25\,\mathrm{m}$ の振り子において, 初期条件とし



初期条件: $\theta_1(0)=\theta_0$, $\theta_2(0)=0$, $\dot\theta_1(0)=\dot\theta_2(0)=0$.

図 7.2: 二重振り子の解 ($l=0.25\,\mathrm{m}$)

て質点 1 を θ_0 の変角で固定し, 質点 2 をその下に静止状態でぶら下げた状態を想定した。つまり, $t=0$ において, $\theta_1=\theta_0$, $\theta_2=0$ であり, $\dot\theta_1=\dot\theta_2$ となるように定数を選んだ。 二重振り子の運動を構成する二つの振動は, ω_1 が周期 1.31 秒, ω_2 が周期 0.54 秒に相当する。それらの振動を合成し, 二重振り子の運動が表現される。質点 2 の変角 θ_2 は, 質点 1 の鉛直下方に対する角度である。一方, 振り子の支点に対する質点 2 の位置は, 偏角が十分に小さい条件において, 近似的に $\theta_1+\theta_2$ である。

上で示したように, 二重振り子は複雑に運動するのだが, $\sqrt{2}\,\theta_1\pm\theta_2$ が (7.4) に示すように単振動になることが興味深い。解析力学の手法として, この特徴を利用するなら,

$$Q_1=\sqrt{2}\,\theta_1+\theta_2,\qquad Q_2=\sqrt{2}\,\theta_1-\theta_2,$$

を一般化座標として定義するのがよい。このような一般化座標を用いると, 時間についての 2 階微分が,

$$\ddot Q_1=-\omega_1^2Q_1,\qquad \ddot Q_2=-\omega_2^2Q_2, \tag{7.6}$$

のように単純な形で書けるはずだ。確認のため, 上で記述した数式を変形して (7.6) が得られることを検証してみよう。一般化座標の定義から,

$$\theta_1=\frac{1}{2\sqrt{2}}(Q_1+Q_2),\qquad \theta_2=\frac{1}{2}(Q_1-Q_2),$$

を取り出しておく。これらの記号を, ラグランジアン:

$$L=\frac{ml^2}{2}(2\dot\theta_1^2+2\dot\theta_1\dot\theta_2+\dot\theta_2^2)-\frac{mgl}{2}(2\theta_1^2+\theta_2^2),$$

に代入すると,

$$L=\frac{ml^2}{8}\left[(2+\sqrt{2})\,\dot Q_1^2+(2-\sqrt{2})\,\dot Q_2^2\right]-\frac{mgl}{4}(Q_1^2+Q_2^2),$$

が得られる。このラグランジアンについて, ラグランジュの運動方程式を評価すると,

$$\ddot Q_1=-(2-\sqrt{2})\,\frac{g}{l}Q_1,\qquad \ddot Q_2=-(2+\sqrt{2})\,\frac{g}{l}Q_2,$$

が導出できる。確かに, (7.6) が得れることが確認できた。既に述べたように, 一般化座標 Q_1 と Q_2 は, 角周波数が ω_1 と ω_2 であるような単振動である。そのような運動の簡略化は, 本来の座標を特別な比率で重ね合わせた結果であり, そのような単振動は, **基準振動**, あるいは, **ノーマル モード**と呼ばれる。また, 基準振動が記述される座標 Q_1 と Q_2 は**基準座標**と呼ばれる。

7.2 振動解析の数学処方

振動は物体の復元力によって発生する。安定に釣り合って静止している物体に力を加え, 釣り合いの状態から変位を与えると, その変位を戻して釣り合いの状態に戻そうとする復元力が発生する。とはいえ, 復元力に任せると, 物体は慣性の法則のため釣り合いの位置を通り過ぎ, 反対側へ変位してしまう。すると, その変位を打ち消そうするため, 逆方向に復元力が発生し, 振動が発生するのだ。

7.2.1 振動の定式化

自由度が n' であるような系を考え, 運動を記述する一般化座標を $q_1, q_2, \ldots, q_{n'}$ とする。前節で取り扱った θ_1 と θ_2 は一般化座標の一例である。この系でのラグランジアン $L\ (= K - U)$ は t を直接含まず, ポテンシャル U は q のみの関数であり, 速度 $\dot{q}$ に依存しないもとする。すなわち,

$$K = K(q, \dot{q}), \qquad U = U(q),$$

である。ここで, 座標系が静止していると仮定する。すなわち, $\dot{q} = 0$ のとき $K = 0$ でなければならない。その制約事項は, 運動エネルギー K は $\dot{q}$ の 1 次の項を含まず, 2 次の同次式:

$$K = \frac{1}{2} \sum_{j,k} K_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k, \tag{7.7}$$

なる形式で記述されなければならないことを意味している。なぜなら, 運動エネルギー K は非負なので, $K = 0$ がエネルギーの最小値だからだ。そのとき, $\dot{q} = 0$ において $\partial K / \partial \dot{q}_k = 0$ でなければならない[1] ので, K に $\dot{q}$ の 1 次の項が含まれてはならないのだ。さらに, 上の数式は $\dot{q}_j$ と $\dot{q}_k$ を交換しても不変であるべきなので, $K_{jk} = K_{kj}$ でなければならない。

[1] これを満たさなければ, 運動エネルギー K が $\dot{q} = 0$ において滑らかでない特性をもつので原理として都合が悪いと考えるのだ。

ラグランジュの運動方程式が静止状態を解とする場合を考えてみよう。つまり, 運動方程式:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial L}{\partial q_j} \qquad (j = 1, 2, \ldots n'),$$

が静止状態に相当する特別な解:

$$q_j = q_j^{(0)} = \mathrm{const} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n'),$$

をもつ場合を考えるのだ。これは, $\dot{q} = 0$, $q = q^{(0)}$ のとき,

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n'), \tag{7.8}$$

を満たすことに相当する。これは次のように説明できる。ラグランジアンと運動エネルギーは $\dot{q}$ の微分に対して同形式:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j},$$

である。この量を t について微分すると, $\dot{p}_j$ が得られるわけだが, その値は $\dot{q} = 0$, $\ddot{q} = 0$ においてゼロになってしまう。これが, 数式 (7.8) が成立する理由だ。その方程式から特定できる解 $q_j^{(0)}$ が平衡の位置を与えるのだ。

平衡状態をとる位置 $q_j^{(0)}$ が原点となるように座標変換しよう。具体的には, $q_j - q_j^{(0)} \mapsto q_j$ なる変換をすればよい。その平衡の位置 (新しい原点) の近くで, 運動を解析することにして, ポテンシャル:

$$U = U_0 + \sum_j b_j q_j + \frac{1}{2}\sum_{j,k} c_{jk} q_j q_k,$$

を使うことにしよう。このポテンシャルは原点を中心とするテイラー級数だと考えればよい。なお, U_0 は原点でのポテンシャルだ。運動エネルギー (7.7) に含まれる係数 K_{jk} も q_j のべき級数で記述できるが, 数式 (7.7) において 2 次の微小量 $\dot{q}_j\dot{q}_k$ が乗じられるので, 係数 K_{jk} はゼロ次の項だけを考えればよいだろう。その理由で, 係数 K_{jk} は q に依存しない定数と考えても差し支えない。そのように考えると, $\partial K/\partial q_j = 0$ になるので, 数式 (7.8) は,

$$\left(\frac{\partial U}{\partial q_j}\right)_0 = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n'),$$

を満たす。ここで, $(\cdot)_0$ は原点における関数値を意味する。得られた数式によると, ポテンシャル U は q に関する 1 次の項をもたないことになるから,

$$U = U_0 + \frac{1}{2}\sum_{j,k} c_{jk} q_j q_k, \tag{7.9}$$

なる形で表される。当然, q_j と q_k を交換してもポテンシャルは不変であるべきなので, c_{jk} は K_{jk} と同様に対称である。

言うまでもなく, 平衡の位置はポテンシャル U が極小となる位置だ。そのためには, ポテンシャル (7.9) は正値 2 次形式でなければならない。正値 2 次形式とは, 原点以外で, 必ず, 正の値になる 2 次の同次式を意味する。

既に述べたように, 運動エネルギーも非負であるので, $\dot{q}$ に関する正値 2 次形式である。したがって, 原点で平衡となる系は,

$$L = K - U = \frac{1}{2}\sum_{j,k} K_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k - \frac{1}{2}\sum_{j,k} c_{jk}q_jq_k, \tag{7.10}$$

のように, 二つの正値 2 次形式によって記述される。

7.2.2　永年方程式

複数の質点が振動する系では, 複数の基準振動が発生する。振動解析の最初のステップは基準振動を特定することだ。本稿では, 基準振動を特定する手段として永年方程式を紹介する。

解析力学の開始はラグランジュの方程式だ。複数の質点による振動のラグランジアンは前項で定式化した。そのラグランジアンから, ラグランジュの運動方程式をつくると,

$$\sum_{k=1}^{n'} K_{jk}\ddot{q}_k - \sum_{k=1}^{n'} c_{jk}q_k = 0, \tag{7.11}$$

が得られる。ここで, 系の自由度を n' とした。この運動方程式から基準振動を解析しよう。基準振動が発生しているとき, すべての q_k が共通の角速度 ω で振動しているので,

$$q_k = A_k\cos(\omega t + \alpha),$$

なる解を仮定する。この解を運動方程式 (7.11) に代入すると, 運動方程式は,

$$\sum_{k=1}^{n'}(K_{jk}\,\omega^2 - c_{jk})\,A_k\cos(\omega t + \alpha) = 0,$$

のように書き換えられるので, 係数だけを取り出し,

$$\sum_{k=1}^{n'}(-K_{jk}\,\omega^2 + c_{jk})\,A_k = 0, \tag{7.12}$$

なる方程式が得られる。この問題では未知数が A_k なので, この方程式は,

$$\begin{bmatrix} K_{11}\omega^2 - c_{11} & K_{12}\omega^2 - c_{12} & \cdots & K_{1n'}\omega^2 - c_{1n'} \\ K_{21}\omega^2 - c_{21} & K_{22}\omega^2 - c_{22} & \cdots & K_{2n'}\omega^2 - c_{2n'} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ K_{n'1}\omega^2 - c_{n'1} & K_{n'2}\omega^2 - c_{n'2} & \cdots & K_{n'n'}\omega^2 - c_{n'n'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_{n'} \end{bmatrix} = 0, \tag{7.13}$$

のように行列を用いて記述することができる。

方程式 (7.13) は未知数と方程式の数がともに n' 個であるので, 問題なく解けるように思えるかもしれない。しかし, それでは都合が悪い。すべての振幅 A_k が一意的に決まるということは, 物理現象として, その振幅でなければ許容されないということだ。言い換えると, 限りなくゼロに近い振幅が許されず, いきなり, 有限値の振幅の振動しか許されないということだ。そう考えると, 都合が悪そうだ。むしろ, A_1 は自由に選べ, 他の振幅 $A_2, A_3, \ldots$ は A_1 との関係で決まる方が違和感がない。そのように考えると, 未知数の数は $n'-1$ 個であり, 方程式 (7.13) は冗長であるべきだ。そのような条件を満たすには,

$$\begin{vmatrix} K_{11}\omega^2 - c_{11} & K_{12}\omega^2 - c_{12} & \cdots & K_{1n'}\omega^2 - c_{1n'} \\ K_{21}\omega^2 - c_{21} & K_{22}\omega^2 - c_{22} & \cdots & K_{2n'}\omega^2 - c_{2n'} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ K_{n'1}\omega^2 - c_{n'1} & K_{n'2}\omega^2 - c_{n'2} & \cdots & K_{n'n'}\omega^2 - c_{n'n'} \end{vmatrix} = 0, \tag{7.14}$$

のように, 係数行列の行列式がゼロになっていればよい。実は, 基準振動の角速度 ω が未知数なので, この条件を満たすように ω が決定されるのだ。方程式 (7.14) は, ω^2 について $n'-1$ 次の方程式なので, ω^2 の解として, 重根を含め, $\omega_1^2, \omega_2^2, \ldots, \omega_{n'-1}^2$ のように $n-1$ この解をもつ。しかも, K と U が正値 2 次形式であるならば, 得られる n' この解はすべて正でなければならない。実際の角周波数 $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n'}$ は得られた解の平方根であり, 数学的には正と負の値をとることができる。とはいえ, 実数解のみを考えるのであれば, 双方とも物理的意味が同じなので, 慣習として正の平方根のみをとる。得られる角速度 $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n'}$ は, **固有振動数**と呼ばれる。また, 方程式 (7.14) は**永年方程式**と呼ばれる。

永年方程式で固有振動を特定する問題は固有値問題と等価だ。その事実を示してみよう。運動エネルギーの係数行列を $\hat{K} \equiv [K_{jk}]$, ポテンシャルエネルギーの係数行列を $\hat{C} \equiv [c_{jk}]$ なる記号で書くことにしよう。その記号を用いると, (7.13) は,

$$(\omega^2\hat{K} - \hat{C})\boldsymbol{A} = 0,$$

のように書くことができる。この数式に, 左から $\hat{K}^{-1}$ を乗じると, $(\omega^2 I - \hat{K}^{-1}\hat{C})\boldsymbol{A} = 0$ が得られる。ここで, I は単位行列である。この関係式は,

$$\hat{K}^{-1}\hat{C}\,\boldsymbol{A} = \omega^2\boldsymbol{A}, \tag{7.15}$$

のように書き換えられる。この数式によると, 固有振動数の自乗 ω^2 は, 行列 $\hat{K}^{-1}\hat{C}$ の固有値であり, 振幅 $\boldsymbol{A}$ は固有ベクトルである。したがって, 永年方程式による固有振動の特定は, 固有値問題と等価なのだ。

7.2.3 基準振動の特定

永年方程式を解いて固有振動数 $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n'}$ が決定できたら, (7.13) を解くことによって振幅を決定する。ただし, 永年方程式が満足されているので, (7.13) のランクは n' より小さくなっている。とりあえず, $A_1 = 1$ として解を決めると考えよう。当然, 方程式 (7.13) は, 異なる固有振動数 $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n'}$ ごとに異なる解が得られるべきだ。例えば, m 番目の固有振動数 ω_m に対して, 振幅が $A_1^{(m)}$, $A_2^{(m)}$, …, $A_{n'}^{(m)}$ のように特定できるとしよう。それを数式で表現すると,

$$\sum_{k=1}^{n'} (K_{jk}\omega_m^2 - c_{jk})\, A_k^{(m)} = 0, \tag{7.16}$$

となる。一方, 他の固有振動数 $\omega_{m'}$ に関しても, 同様に,

$$\sum_{j=1}^{n'} (K_{kj}\omega_{m'}^2 - c_{kj})\, A_j^{(m')} = 0, \tag{7.17}$$

が成立する。ここで, さりげなく添え字 j と k を交換していることが重要だ。さらに, K_{jk} と c_{jk} の対称性を利用しつつ, (7.16) に $A_j^{(m')}$ を乗じて j について和をとる。一方, (7.17) に $A_k^{(m)}$ を乗じて k について和をとる。そのようにすると,

$$\sum_{j=1}^{n'} \sum_{k=1}^{n'} (K_{jk}\omega_m^2 - c_{jk})\, A_k^{(m)} A_j^{(m')} = 0,$$

$$\sum_{j=1}^{n'} \sum_{k=1}^{n'} (K_{jk}\omega_{m'}^2 - c_{jk})\, A_k^{(m)} A_j^{(m')} = 0,$$

が得られる。これらの数式の差をとると, c_{jk} が相殺されるので,

$$(\omega_m^2 - \omega_{m'}^2) \sum_{j=1}^{n'} \sum_{k=1}^{n'} K_{jk} A_k^{(m)} A_j^{(m')} = 0,$$

となるが, $\omega_m \neq \omega_{m'}$ であるので,

$$\sum_{j=1}^{n'} \sum_{k=1}^{n'} K_{jk} A_k^{(m)} A_j^{(m')} = 0, \tag{7.18}$$

なる重要な関係式が得られる。この関係式は, 固有振動数 ω_m と $\omega_{m'}$ における解 $A_k^{(m)}$ と $A_k^{(m')}$ の**直交関係**を表す。実際には, A_k は 3 次元空間のベクトル成分であるとは限らず, 複数の質点からなる系の成分である。例えば, 第 j 番目の粒子の x 方向の振幅が A_{3j-2} のように表される場合も考えられる。そのような場合も含め, 多数の質点の振幅を n' 個の成分として取り扱うのは, 数学的に n' 次元空間のベクトルを取り扱うことと同じだ。仮に, $K_{jk} = \delta_{jk}$ であれば, n' 次元のカルテシアン空間としてベクトルを取り扱えばよい。それ以外の一般の K_{jk} の (定数の) 場合は, 斜交座標系と考えればよい。

前段落で導出した (7.18) の左辺をベクトルの内積とみなし, ベクトル解析において自分自身の内積がノルムの自乗であることに倣って,

$$\sum_{j=1}^{n'}\sum_{k=1}^{n'} K_{jk}A_j^{(m)}A_k^{(m)} = 1, \tag{7.19}$$

を満たすように振幅 $A_j^{(m)}$ を規定しよう。この規定によって, ベクトルのノルムを 1 にするように振幅が調整されるため, このような手続きは**正規化**, あるいは, **規格化**と呼ばれる。また, $m = m'$ も許容するように, 添え字を一般化すると, (7.18) と (7.18) は,

$$\sum_{j=1}^{n'}\sum_{k=1}^{n'} K_{jk}A_j^{(m)}A_k^{(m')} = \delta_{mm'}, \tag{7.20}$$

のように書くことができる。この数式は $A_k^{(m)}$ の規格直交化条件を表す。

振幅 $A_j^{(m)}$ をもつ振動は, 系の含まれる任意の変位 $q_k(t)$ に寄与する。その変位の一般解は,

$$q_k(t) = \sum_{m=1}^{n'} A_k^{(m)} a_m \cos(\omega_m t + \alpha_m), \tag{7.21}$$

のように表されるはずだ。この解は, 複数の固有振動数 ω_m による寄与の重ね合わせで表現されている。振幅 $A_k^{(m)}$ は正規化されているので, 任意の振幅を与えるため, a_m なる係数を導入した。また, 位相に加算される定数 α_m も固有振動数ごとに個別に与えられる。これらのパラメータ a_m と α_m は初期条件などによって決まる定数だ。一般解 (7.21) は二重振動のモデルの応用だと考えればよい。

数式 (7.21) に, $\sum_j K_{kj}A_j^{(p)}$ を乗じ, k について総和をとると,

$$\sum_{k=1}^{n'}\sum_{j=1}^{n'} K_{jk}A_j^{(p)}q_k(t) = \sum_{k=1}^{n'}\sum_{j=1}^{n'}\sum_{m=1}^{n'} K_{kj}A_j^{(p)}A_k^{(m)}a_m\cos(\omega_m t + \alpha_m),$$

が得られる。この計算結果に, $A_k^{(m)}$ の正規直交化条件 (7.20) を適用すると,

$$\sum_{k=1}^{n'}\sum_{j=1}^{n'} K_{jk}A_j^{(p)}q_k(t) = a_p\cos(\omega_p t + \alpha_p),$$

のように右辺に $a_p\cos(\omega_p t + \alpha_p)$ だけが残る。得られた数式は, 二重振り子における (7.4) に相当する。ここで, この数式の左辺を基準座標 $Q_k(t)$ として定義しよう。すなわち,

$$Q_k(t) = \sum_{k=1}^{n'}\sum_{j=1}^{n'} K_{jk}A_j^{(p)}\, q_k(t), \tag{7.22}$$

が新たに定義された基準座標だ。ここで, $Q_k(t) = a_k\cos(\omega_k t + \alpha_k)$ に注意しながら (7.21) を書き換えると,

$$q_j(t) = \sum_k A_j^{(k)}Q_k(t), \tag{7.23}$$

なる関係式が導出される。一般化座標 q_k と基準座標 Q_k は, (7.23) と (7.22) によって, 互いに変換されるのだ。一般化座標 q_k では, 異なる角速度の振動が重ね合わされた状態だが, (7.22) によって基準座標 Q_k に変換すれば独立した単振動で運動を取り扱うことができるのだ。

振動状態の縮退　振動を特定する方程式 (7.11) が重根をもつ場合を考えよう。そのような状況は, 振動が**縮退**していると呼ばれる。複数の角振動数 ωk のうち, $\omega_1 = \omega_2$ であり, 他の角振動数 $\omega_3, \omega_4, \ldots$ はすべて異なる値であるとする。さらに, ω_k に対応する振幅 $A_1^{(k)}, A_2^{(k)}, \ldots$ をまとめてベクトル $\boldsymbol{A}^{(k)}$ なる記号で表現しよう。つまり,

$$\boldsymbol{A}^{(k)} \equiv \left[\ A_1^{(k)},\ \ A_2^{(k)},\ \ \ldots,\ \ A_{n'}^{(k)}\ \right],$$

のように定義したわけだ。なお, n' は系の自由度だ。何らかの手段で方程式 (7.11) を解き, $\omega_1 = \omega_2$ に対応する解が二つ得られたとする。それらの解を $\boldsymbol{A}'$, $\boldsymbol{A}''$ としよう。$\boldsymbol{A}'$ と $\boldsymbol{A}''$ は一次独立であり, 他の解 $\boldsymbol{A}^{(3)}, \boldsymbol{A}^{(4)}, \ldots$ と直交する。補足すると, $\boldsymbol{A}'$ と $\boldsymbol{A}''$ は一次独立だが直交するとは限らない。

解 $\boldsymbol{A}'$ と $\boldsymbol{A}''$ の位置次結合をつくり, $\boldsymbol{A}'$ と直交させることを考えよう。すなわち, $\boldsymbol{A}''' \equiv c_1\boldsymbol{A}' + c_2\boldsymbol{A}''$ なるベクトルを定義し, $\boldsymbol{A}'$ と $\boldsymbol{A}'''$ が直交するように, 展開係数 c_1 と c_2 を決めてやればよい。ベクトルの直交条件 $\boldsymbol{A}' \cdots \boldsymbol{A}''' = 0$ から, ただちに,

$$\frac{c_1}{c_2} = -\frac{\boldsymbol{A}' \cdot \boldsymbol{A}''}{\boldsymbol{A}' \cdot \boldsymbol{A}'},$$

が特定できる。この条件を満足する展開係数にてつくられる一次結合によって, ベクトル $\boldsymbol{A}', \boldsymbol{A}''', \boldsymbol{A}^{(3)}, \boldsymbol{A}^{(4)}, \ldots$ がすべて直交するのだ。さらに,

$$\boldsymbol{A}' \cdot \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A}''' \cdot \boldsymbol{A}''' = 1,$$

のように正規化すれば, $\boldsymbol{A}^{(1)} \equiv \boldsymbol{A}'$, $\boldsymbol{A}^{(2)} \equiv \boldsymbol{A}'''$ のようにベクトルを再定義する価値がある。そのように再定義されたベクトルを用いれば,

$$\boldsymbol{A}^{(j)} \cdot \boldsymbol{A}^{(k)} = \delta_{jk},$$

なる関係が成立する。最後に補足しておくと, 縮退した状態に対応する解 $\boldsymbol{A}^{(1)}$ と $\boldsymbol{A}^{(2)}$ は一意的ではない。例えば, $\boldsymbol{A}^{(1)} \equiv \boldsymbol{A}''$ としても同様に正規直交条件 $\boldsymbol{A}^{(j)} \cdot \boldsymbol{A}^{(k)} = \delta_{jk}$ を満足する解が構成できるのだ。

7.3　微小振動の解析例

前節までに定式化した微小運動の取り扱いにおける処方箋について, 例を挙げて解析していこう。第 1 の例は二酸化炭素分子の振動, 第 2 の例は 1 次元の格子振動である。

7.3.1　二酸化炭素分子

二酸化炭素 (CO_2) の分子は, 図 7.3 に示すように, 炭素原子 C を中心とし, その両側に酸素原子 O が一直線上に結合した構造である。炭素と酸素の距離は両側とも同じ値 a である。この分子の平衡状態における分子軸の方向を x 軸にとり, それと直交するように y 軸, z 軸をとる。中心に位置する炭素原子の平衡状態からの変位を X_0, Y_0, Z_0 とし, 両側に位置する酸素原子の変位をそれぞれ, X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2 と記述することにする。つまり, CO_2 分子の運動はこれら 9 個の座標成分によって記述される。

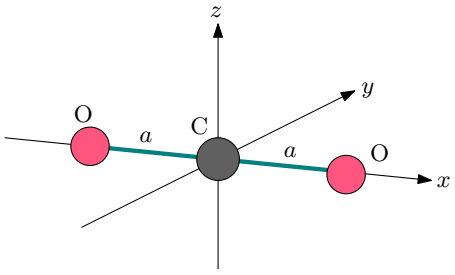


図 7.3: 平衡状態における CO_2 分子の構造モデル

構成原子の変位のうち x 座標成分は原子間の距離の伸縮である。ここでは, 簡単のため, 伸縮がないものとし, 原子の変位は分子軸からのずれのみとする。すなわち, 変位は y 成分と z 成分のみである。そのとき, 図 7.4 に示すように, 分子構造において変角 θ が現れる。その変角に依存して復元力が発生する。 変角が小さければ, 復元力のポテンシャルは,

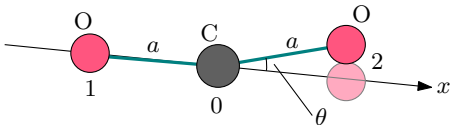


図 7.4: CO_2 分子の構成原子の変位と変角

$$U = \frac{\kappa}{2}\theta^2,$$

なる形で与えられるだろう。ここで, 比例係数 κ は変角に対してバネ定数としてはたらく。変角が θ ならば, 原子 1 から原子 0 への延長線上から原子 2 がずれている距離は $a\theta$ であるはずだ。その距離は, 原子の変位を用いて,

$$a\theta = \sqrt{(2Y_0 - Y_1 - Y_2)^2 + (2Z_0 - Z_1 - Z_2)^2},$$

と記述できる。新たなバネ定数 $k \equiv \kappa/a^2$ を定義すると, 分子構造の変形によるポテンシャルは,

$$U = \frac{k}{2}\left[(2Y_0 - Y_1 - Y_2)^2 + (2Z_0 - Z_1 - Z_2)^2\right]$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & \frac{k}{2}\left[4Y_0^2 - 4Y_0\left(Y_1+Y_2\right) + \left(Y_1+Y_2\right)^2\right] \\
& + \frac{k}{2}\left[4Z_0^2 - 4Z_0\left(Z_1+Z_2\right) + \left(Z_1+Z_2\right)^2\right],
\end{aligned}
$$

となる。この数式において, (Y_1+Y_2) と (Z_1+Z_2) を展開していない理由はこの後の計算の便宜のためだ。この先, 数式を変形していくと, この形で数式を書いている利点が見えてくるだろう。

分子構造が変形する途中, もしくは, 復元する途中は, 構成原子が運動をしているので, CO_2 分子は運動エネルギーをもっている。その運動エネルギーを定式化しておこう。運動エネルギーを記述するため, C 原子の質量を M, O 原子の質量を m とすると, 運動エネルギーは,

$$
\begin{aligned}
K &= \frac{M}{2}(\dot{Y}_0^2 + \dot{Z}_0^2) + \frac{m}{2}(\dot{Y}_1^2 + \dot{Z}_1^2 + \dot{Y}_2^2 + \dot{Z}_2^2) \\
&= \left[\frac{M}{2}\dot{Y}_0^2 + \frac{m}{2}(\dot{Y}_1^2 + \dot{Y}_2^2)\right] + \left[\frac{M}{2}\dot{Z}_0^2 + \frac{m}{2}(\dot{Z}_1^2 + \dot{Z}_2^2)\right]
\end{aligned}
$$

のように記述できる。面白いことに, ポテンシャル U も運動エネルギー K も, y 成分と z 成分の寄与が和の形で分離されている。この分離のおかげで, y 成分による寄与と z 成分を個別に取り扱ってもよい。そのような理由で y 成分の寄与だけ取り扱おう。数式から明らかなように, y と z の寄与は同じ形で表されるので, 後に y 成分の考察結果をまねて z 成分の寄与をつくり, 互いに重ね合わせ用という魂胆だ。その前提において, y 成分の寄与を表すラグランジアンは,

$$
L_y = \frac{M}{2}\dot{Y}_0^2 + \frac{m}{2}(\dot{Y}_1^2 + \dot{Y}_2^2) - 4Y_0^2 - 4Y_0\left(Y_1+Y_2\right) + \left(Y_1+Y_2\right)^2, \tag{7.24}
$$

なる形で記述できる。方程式 (7.24) を解くテクニックとして, 点変換:

$$
Y_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(Y_1+Y_2), \qquad Y_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(Y_1-Y_2), \tag{7.25}
$$

を利用してみよう。この点変換は, Y_1Y_2 平面で座標軸を 45° 回転することに相当する。逆に, Y_1 と Y_2 を, 新たな記号 Y_+ と Y_- を用いて記述すると,

$$
\begin{aligned}
Y_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(Y_+ + Y_-), \qquad & Y_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(Y_+ - Y_-), \\
\dot{Y}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\dot{Y}_+ + \dot{Y}_-), \qquad & \dot{Y}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\dot{Y}_+ - \dot{Y}_-),
\end{aligned}
$$

となるので,

$$
\dot{Y}_1^2 + \dot{Y}_2^2 = \dot{Y}_+^2 + \dot{Y}_-^2,
$$

であることがわかる。このことに注意すると, ラグランジアン L_y は,

$$L_y = \frac{M}{2}Y_0^2 + \frac{m}{2}Y_+^2 + \frac{m}{2}Y_-^2 - \frac{4k}{2}Y_0^2 + 2\sqrt{2}\,kY_0Y_+ - \frac{2k}{2}Y_+^2, \tag{7.26}$$

のように記述できる。このラグランジアンに対して,

$$q_0 = \sqrt{M}\,Y_0, \qquad q_1 = \sqrt{m}\,Y_+, \qquad q_2 = \sqrt{m}\,Y_-, \tag{7.27}$$

なる一般化座標を定義しよう。言うまでもなく, これらの時間微分は,

$$\dot{q}_0 = \sqrt{M}\,\dot{Y}_0, \qquad \dot{q}_1 = \sqrt{m}\,\dot{Y}_+, \qquad \dot{q}_2 = \sqrt{m}\,\dot{Y}_-,$$

である。新たに定義した一般化座標を用いてラグランジアンを記述すると,

$$L_y = \frac{1}{2}(\dot{q}_0^2 + \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \frac{4k}{2M}q_0^2 - \frac{2k}{2m}q_1^2 + \frac{2\sqrt{2}\,k}{\sqrt{Mm}}\,q_0q_1, \tag{7.28}$$

が得られる。得られたラグランジアンから, 永年方程式を構成するための要素 K_{jk}, c_{jk} は,

$$K_{jk} = \delta_{jk}, \qquad c_{00} = \frac{4k}{M}, \qquad c_{11} = \frac{2k}{M}, \qquad c_{01} = -\sqrt{\frac{2}{Mm}}\,2k,$$

であることがわかる。ただし, ここに挙げていない c_{jk} はすべてゼロである。

得られた情報を利用すると, ラグランジュの運動方程式は,

$$\ddot{q}_0 = -\frac{4k}{M}q_0 + 2k\sqrt{\frac{2}{Mm}}\,q_1, \qquad \ddot{q}_1 = 2k\sqrt{\frac{2}{Mm}}\,q_0 - \frac{2k}{m}q_1, \qquad \ddot{q}_2 = 0, \tag{7.29}$$

のように記述できる。この方程式から, q_0 と q_1 は連成振動を形成するが, 復元力がゼロである q_2 は振動しないことがわかる。不思議に感じるかもしれないので, 物理的イメージをつかむため, q_0, q_1, $q_2 \neq 0$ を仮定してみよう。その条件では,

$$Y_0 = 0, \qquad Y_1 + Y_2 = 0, \qquad Y_1 - Y_2 = 0,$$

となるので, $Y_1 = -Y_2$ が導かれる。この状態は, 中央の炭素原子が動かず, 両端の酸素原子が分子軸と垂直の方向に互いに逆方向に運動する状態である。すなわち, その運動は, 炭素原子を支点とした回転運動だ。この考察から, $q_2 \neq 0$ は回転運動にあたるのだ。そのまま回転すると, 微小運動 ($\theta \ll 1$) という仮定に反してしまうので, 以降の議論では $q_2 = 0$ に限定することにしよう。

上の考察のように, $q_2 = 0$ を束縛条件とすれば, 取り扱うべき自由度は q_0 と q_1 のみである。つまり, 自由度は 2 だ。この問題における永年方程式は,

$$\begin{vmatrix} \omega^2 - \dfrac{4k}{M} & 2k\sqrt{\dfrac{2}{Mm}} \\ 2k\sqrt{\dfrac{2}{Mm}} & \omega^2 - \dfrac{2k}{m} \end{vmatrix} = 0,$$

となる。この方程式の解 ω^2 として, 0 と $4k/M + 2k/m$ が得られるので,

$$\omega_1 = 0, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{4k}{M} + \frac{2k}{m}},$$

の二つの角速度を基準振動として考察しよう。特定された ω を永年方程式に代入し, 振幅 A_1 と A_2 の比を計算すると,

$$\begin{aligned}
&\text{For } \omega_1 = 0: && \frac{A_2^{(1)}}{A_1^{(2)}} = \sqrt{\frac{2m}{M}}, \\
&\text{For } \omega_2 = \sqrt{\frac{4k}{M} + \frac{2k}{m}}: && \frac{A_2^{(1)}}{A_1^{(2)}} = -\sqrt{\frac{M}{2m}},
\end{aligned}$$

が得られる。振幅ベクトルの内積は, $K_{jk} = \delta_{jk}$ であるので,

$$\boldsymbol{A}^{(1)} \cdot \boldsymbol{A}^{(k)} = A_1^{(1)} A_1^{(k)} + A_2^{(1)} A_2^{(k)},$$

のように簡単な関係で記述できる。この関係から, $\boldsymbol{A}^{(1)}$ と $\boldsymbol{A}^{(2)}$ が直交することがわかる。ベクトルを正規化すると,

$$\begin{aligned}
&\text{For } \omega_1 = 0: && A_1^{(1)} = \sqrt{\frac{M}{M+2m}}, \quad A_2^{(1)} = \sqrt{\frac{2m}{M+2m}}, \\
&\text{For } \omega_2 = \sqrt{\frac{4k}{M} + \frac{2k}{m}}: && A_1^{(2)} = \sqrt{\frac{2m}{M+2m}}, \quad A_2^{(2)} = -\sqrt{\frac{M}{M+2m}},
\end{aligned}$$

のように成分が特定できる。さらに, (7.22) の処方箋にしたがい, $Q_k(t) = \sum A_j^{(k)} q_j$ で定義される基準座標に変換すると,

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \sqrt{\frac{M}{M+2m}}\, q_0 + \sqrt{\frac{2m}{M+2m}}\, q_1, \\
Q_2 &= \sqrt{\frac{2m}{M+2m}}\, q_0 - \sqrt{\frac{M}{M+2m}}\, q_1,
\end{aligned} \tag{7.30}$$

が得られる。前節で述べたことだが, 基準座標 Q_k に変換するのは, 基準座標ごとに独立した単振動に分解できることを狙っている。この変換の逆変換は,

$$\begin{aligned}
q_0 &= \sqrt{\frac{M}{M+2m}}\, Q_1 + \sqrt{\frac{2m}{M+2m}}\, Q_2, \\
q_1 &= \sqrt{\frac{2m}{M+2m}}\, Q_1 - \sqrt{\frac{M}{M+2m}}\, Q_2,
\end{aligned} \tag{7.31}$$

となる。さらに, q_0, q_1 をもとの物理量 Y_0, Y_1, Y_2 に戻すと, 変換式は,

$$
\begin{aligned}
Q_1 &= \frac{MY_0 + m\,(Y_1 + Y_2)}{\sqrt{M+2m}}, \\
Q_2 &= \sqrt{\frac{Mm}{2\,(M+2m)}}\,\Big[2Y_0 - (Y_1 + Y_2)\Big],
\end{aligned}
\tag{7.32}
$$

なる形で書き換えられる。ここで, $q_2 = Q_2 = 0$ で, かつ, $Q_1 \neq 0$ を考えると, (7.32) の第 2 式をゼロとして, $Y_1 + Y_2 = 2Y_0$ がわかる。これを第 1 式に代入すると, $Q_1 = \sqrt{M+2m}\,Y_0$ が特定できる。この結果を (7.31) に代入すると, $q_0 = \sqrt{M}\,Y_0$ と $q_1 = \sqrt{2m}\,Y_0$ が導かれる。続いて, (7.27) に注目し, $q_2 = 0$ を第 3 式に適用すると, $Y_1 = Y_2$ が特定できる。これを第 2 式に代入すると, $q_1 = \sqrt{2m}\,Y_1$ が得られる。つい先ほどの考察で $q_1 = \sqrt{2m}\,Y_0$ が得られていたので, $Y_0 = Y_1$ であることがわかるのだ。したがって,

$$
Y_0 = Y_1 = Y_2,
$$

が結論できる。つまり, この解は y 方向に平行移動する運動を意味している。これでは復元力が発生せず, 当然, $\omega_1 = 0$ となるわけだ。

これまでに確認した解の候補は, 回転運動と平行移動であり, 振動しない運動だった。結局, 残された自由度は Q_2 のみであり, 変角の振動に対応する。ラグランジュの運動方程式は,

$$
\ddot{Q}_2 = -\omega_2^2 Q_2,
$$

となり, その角速度が,

$$
\omega_2 = \sqrt{\frac{4k}{M} + \frac{2k}{m}},
$$

で与えられる。ただし, $k = \kappa/a^2$ である。

ここまで, ラグランジアンから y に対応する成分のみを取り出して議論してきた。一方, z に対応する成分も同様であり, 回転と平行移動に相当する運動が解として得られる。それを取り除くと, 同一の角速度 ω_2 が得られる。二つの方向の振動について, 同一の角速度 ω_2 が基準振動であるので, 縮退しているわけだ。その運動を,

$$
q_0 = \sqrt{M}\,Y_0, \qquad q_1 = \sqrt{m}\,Y_+, \qquad q_2 = \sqrt{m}\,Y_-,
$$

$$
q_3 = \sqrt{M}\,Z_0, \qquad q_4 = \sqrt{m}\,Z_+, \qquad q_5 = \sqrt{m}\,Z_-,
$$

という 6 個の一般化座標で特定される 6 次元の位相空間のベクトルで表現されるものとする。基準振動に対する振幅ベクトル $\boldsymbol{A}^{(k)}$ を位相空間の成分として記述すると, (7.30) で記述したように,

$$
\boldsymbol{A}^{(2)} = \left[\ \sqrt{\frac{2m}{M+2m}},\ \ -\sqrt{\frac{M}{M+2m}},\ \ 0,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 0\ \right],
$$

となる。それに対して, z 方向の変角振動は,

$$\boldsymbol{A}^{(2')} = \left[\ 0,\quad 0,\quad 0,\quad \sqrt{\frac{2m}{M+2m}},\quad -\sqrt{\frac{M}{M+2m}},\quad 0\ \right],$$

のように記述できるはずだ。これらの成分表示から, 振幅ベクトルの直交性 $\boldsymbol{A}^{(2)}\cdot\boldsymbol{A}^{(2')}=0$ が明らかに成立する。実際の炭素分子の振動は, これらの基準振動の重ね合わせとなり, しかも, y 方向と z 方向は同一の角速度だが位相がずれているのが一般的だ。その結果, その振動は yz 平面上で楕円を描く。

7.3.2　格子振動

固体の結晶は熱によって振動する。固体振動は隣り合う原子, あるいは, 分子との間に一定の距離を保っているが, 振動によって歪み, その歪みが復元力を発生させ振動している。一般的な格子は 3 次元構造であるが, 本稿では基本的なモデルとして 1 次元格子の振動を取り扱う。

図 7.5 に示すように, 多数の質量 m の質点が, 長さ d でバネ定数 k のバネに数珠つなぎになっているとする。数珠つなぎになった質点の鎖を, 滑らかな水平面に置き, 長さ方向に微小振動させる場合を考えよう。

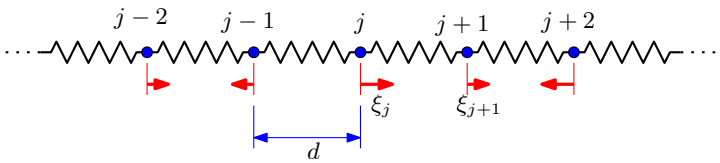


図 7.5: 1 次元の格子振動

数珠つなぎになった質点は左から順に番号づけされていて, 第 j 番目の質点の変位を ξ_j とする。この系の運動エネルギーは,

$$K = \frac{m}{2}\sum_j \dot{\xi}_j^2, \tag{7.33}$$

であり, バネのポテンシャルエネルギーの総和は,

$$U = \frac{k}{2}\sum_j (\xi_{j+1}-\xi_j)^2 = k\sum_j(\xi_j^2 - \xi_j\xi_{j+1}), \tag{7.34}$$

となる。したがって, ラグランジュの運動方程式は,

$$m\ddot{\xi}_j = -k\,(2\xi_j - \xi_{j+1} - \xi_{j-1}), \tag{7.35}$$

なる形で記述できる。仮に,

$$\xi_{j+1}(t) + \xi_{j-1}(t) \propto \xi_j(t),$$

であれば, 運動方程式 (7.35) は単振動の方程式に帰着するので, 簡単に解けるようになる。

この系の基準振動が特定できたとして, そのうちの第 n 番目の基準振動のみが励起されている場合を考えよう。その励起状態は, (7.21) において, $a_n \neq 0$ であり, その他の a_j がすべてゼロである状態である。混交での記号では, ξ_j が一般化座標 q_j に相当するので, (7.21) に倣って数式を記述すると,

$$\xi_j(t) = A_j^{(n)} a_n \cos(\omega_n t + \alpha_n) = A_j^{(n)} Q_n(t),$$

のように振動を表現できるわけだ。このとき,

$$A_{j+1}^{(n)} + A_{j-1}^{(n)} \propto A_j^{(n)},$$

であれば上記の過程に合致する。それに関して, 正弦関数の公式:

$$\sin(j+1)\eta + \sin(j-1)\eta = 2\cos\eta \sin j\eta,$$

との類似性を利用し, $A_j^{(n)} \propto \sin j\eta_n$ となるように振幅を設定すればよさそうだ。ここで, 規格化の定数 C_n を導入し, 変位を,

$$\xi_j(t) = C_n \sin j\eta_n \cdot Q_n(t), \tag{7.36}$$

のように定義してみよう。この定義を運動方程式 (7.35) に代入すると,

$$\ddot{Q}_2 = -\frac{2k}{m}(1 - \cos j\eta_n)\, Q_n,$$

なる微分方程式が得られる、この微分方程式から, 基準振動の角速度は,

$$\omega_n = \sqrt{\frac{2k}{m}(1 - \cos\eta_n)} = 2\sqrt{\frac{k}{m}}\, \sin\frac{\eta_n}{2},$$

のように特定できる。この数式には, まだ未知数 η_n が含まれている。続いて, η_n の特定を試みよう。

未知数 η_n を特定するために境界条件を利用しよう。質点が 0 から N まで番号づけされているとし, 両端の質点が固定されていると仮定する。つまり, $\xi_0 = \xi_N = 0$ である。既に導入した質点の変位の関数表現 (7.36) に関して, $j = 0$ のとき $\sin j\eta_n = 0$ であるので境界条件を満足する。同様に, $j = N$ で境界条件を満足するためには,

$$\eta_n = \frac{n\pi}{N} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

でなければならない。この系において, 自由度として使えるのは, $j = 1, 2, \ldots, N-1$ である。つまり, 自由度は $N-1$ ということだ。したがって, 系は $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{N-1}$ なる変位で記述され, それに対応する基準座標は $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{N-1}$ となる。

続いて, 規格化の定数 C_n を特定しよう。規格化定数は, $A_j^{(n)}$ が正規直交系をなすように設定される。これまでの考察から, $A_j^{(n)}$ が,

$$A_j^{(n)} = C_n \sin\frac{\pi jn}{N} \qquad (j = 1, 2, \ldots, N-1),$$

であることがわかっている。正規直交系をなすということは,

$$\sum_{j=1}^{N-1} \sin\frac{\pi jn}{N} \sin\frac{\pi jn'}{N} = \frac{N}{2}\delta_{nn'},$$

を利用すればよい。したがって,

$$C_n = \sqrt{\frac{2}{N}},$$

が導かれる。その結果,

$$A_j^{(n)} = \sqrt{\frac{2}{N}} \sin\frac{\pi jn}{N} \qquad (j = 1, 2, \ldots, N-1), \tag{7.37}$$

が得られる。振幅の関数形が特定できたので, 第 j 番目の質点の変位について, 第 n 番目の基準振動による寄与が,

$$\xi_j(t) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sin\frac{\pi jn}{N} \cdot Q_n(t), \tag{7.38}$$

であることがわかる。ただし, $Q_n(t) = a_n \cos(\omega_n t + \alpha_n)$ であり, その角速度は,

$$\omega_n = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin\frac{\pi n}{2N},$$

である。解 (7.38) は, 図 7.6 のような両端を節とする定在波である。この格子振動は, 本当は縦波なのだが, 見た目のわかりやすさを優先し横波として描いた。図中の太い曲線とその上にある格子点が定在波の振幅である。これに時間の関数 $Q_n(t)$ が乗算された積 (7.38) が, 網掛け部を振動するわけだ。ここで, 平衡状態におけるバネの長さが d であることがから, 系の左端から測った長さを x をすると, $x = jd$ なので,

$$\frac{\pi jn}{N} = \frac{\pi nx}{Nd},$$

である。さらに, ω_n に対応する波長が $\lambda_n = 2Nd/n$ であることに注意すると,

$$\frac{\pi jn}{N} = \frac{2\pi x}{\lambda_n},$$

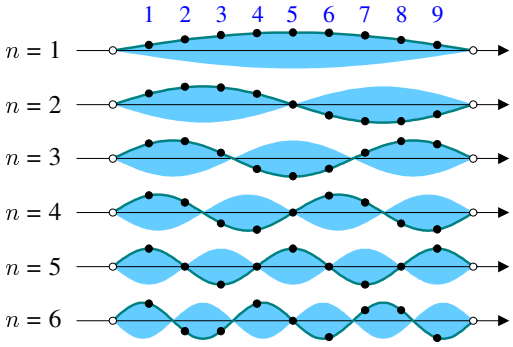


図 7.6: 1 次元の格子振動の基準振動

であることがわかるので, (7.38) は,

$$\xi_j(t) = \sqrt{\frac{2}{N}}\,\sin\frac{2\pi x}{\lambda_n}\cdot Q_n(t), \tag{7.39}$$

と書くことができる。通常の物質の結晶は 3 次元構造であるが, 格子状の構造であれば, ほぼ同様のアプローチによって解析が可能だ。

7.3.3　連続体の振動

前項で取り扱った格子振動について, 格子の間隔を小さくし, 質点の数を大きくすると連続体を取り扱えるようになる。連続体の振動と言えば, 弾性波や水面波などが代表例だ。

前項で取り扱った格子の間隔 d を小さくしよう。その際に, 格子点に存在する質点の質量が m である場合, 長さ d あたりの質量が m であるので, その 1 次元の系は $\rho = m/d$ なる密度をもつと考える。一方, バネ定数 k の代わりに, 長さの伸長率に対する比例係数 e でバネに作用する力を記述しよう。すなわち, 長さ d のバネを平衡状態から x だけ伸ばすのに必要な力は,

$$kx = e\frac{x}{d},$$

となるはずだ。この等式から, $k = e/d$ であることがわかる。パラメータ e はヤング率と物体の断面積の積だと考えればよい。新たに定義されたパラメータ ρ と e に注意してラグランジアンを書き換えると,

$$\begin{aligned}
L &= \frac{1}{2}\sum_j \left[m\dot{\xi}_j^2 - k\left(\xi_{j+1}-\xi_j\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\sum_j d\left[\frac{m}{d}\dot{\xi}_j^2 - kd\left(\frac{\xi_{j+1}-\xi_j}{d}\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\sum_j d\left[\rho\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2 - e\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2\right],
\end{aligned}$$

が得られる。ここで, ξ_j は, 位置と時間の関数 $\xi(x,t)$ とみなして数式を記述した。右辺の第 2 項を記述するにあたり,

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \lim_{d\to 0} \frac{\xi_{j+1} - \xi_j}{d},$$

なる関係を利用した。右辺の総和記号が, 系の長さ全体を対象にし, d が長さ方向の微小長さであることに注意すると, このラグランジアンは,

$$L = \frac{1}{2}\int \left[\rho\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 - e\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2\right] \mathrm{d}x, \tag{7.40}$$

のように書き換えることができる。なお, この数式の被積分関数:

$$\mathcal{L} = \frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 - \frac{e}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2, \tag{7.41}$$

は単位長さあたりのラグランジアンと解釈できるので, **ラグランジアン密度**と呼ばれる。このラグランジアン密度に基づき, オイラーの運動方程式を計算してみよう。ラグランジアン密度 $\mathcal{L}$ が ξ によって記述されているのだが, ξ が x と t の関数であることに注意が必要だ。その場合, オイラーの運動方程式は,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi'} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\xi}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi} = 0,$$

なる形となる。ここで, ξ の導関数のうち, ξ' は x についての微分, $\dot{\xi}$ は t についての微分である。オイラーの運動方程式を得るための微係数を計算すると,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi} = 0, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi'} = \rho\frac{\partial \xi}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\xi}} = -e\frac{\partial \xi}{\partial t},$$

が得られる。これらを利用してオイラーの運動方程式を計算すると,

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{e}{\rho}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0, \tag{7.42}$$

が導出される。導出された (7.42) は波動方程式だ。この波動方程式によると, 変位情報 $\xi(x,t)$ は速さ $c = \sqrt{\rho/e}$ で伝搬する。波動方程式 (7.42) の一般解は,

$$\xi = f(x \pm ct), \tag{7.43}$$

なる形をとる。ここで, f は任意の関数を意味する。この解のうち, 複号が正符号である解は x の負方向に伝搬する波, 負符号である解は x の正方向に伝搬する対応する。つまり, 波動方程式 (7.42) の一般解は, x の正方向と負方向に伝搬する波の重ね合わせだ。どのような比率で重なるかは境界条件によって決まる。

有限の長さ L をもつ 1 次元の連続体の振動について境界条件を適用しよう。座標 $x = 0, L$ が固定された条件, すなわち, $\xi(0,t) = \xi(L,t) = 0$ を境界条件とする。解 $\xi(x,t)$ を任意関

数とすると取り扱いが厄介なので, 角速度が ω である解に限定して解析しよう。一般的な解を得るには, 後に異なる角速度の解を重ね合わせればよい。角速度が ω であれば, 波の周期は $2\pi/\omega$ となる。その時間で波は $2\pi c/\omega$ の長さを伝搬する。これが波長 λ にあたるわけだ。つまり, 速さ c で伝搬する角速度 ω の波では,

$$\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c},$$

なる関係が成立する。ここで, $k \equiv 2\pi/\lambda$ なる波数を用いると,

$$x \pm ct = \frac{c}{\omega} = \left(\frac{\omega}{c} \pm \omega t\right) = \frac{c}{\omega},$$

であるので, 波動方程式の一般解は,

$$\xi(x,t) = A\cos(kx - \omega t + \alpha) + B\cos(kx + \omega t + \beta),$$

なる形で書くことができる。この後の取り扱いを考えるなら, 一般解は,

$$\xi(x,t) = A_1\cos(kx - \omega t) + A_2\sin(kx - \omega t) + B_1\cos(kx + \omega t) + B_2\sin(kx + \omega t),$$

と書いた方がよいだろう。この解に対して, 境界条件 $\xi(0,t) = 0$ が,

$$(A_1 + B_1)\cos\omega t - (A_2 - B_2)\sin\omega t = 0,$$

であることに注意しよう。この境界条件が, t に関わらず常に成立するためには, $A_1 = -B_1$, $A_2 = B_2$ でなければならない。その条件を反映させると, 一般解は,

$$\begin{aligned}\xi(x,t) &= A_1\left[\cos(kx - \omega t) - \cos(kx + \omega t)\right] + A_2\left[\sin(kx - \omega t) + \sin(kx + \omega t)\right] \\ &= 2\sin kx\,(A_1\sin\omega t + A_2\cos\omega t) \\ &= 2A\sin kx\cos(\omega t + \alpha),\end{aligned}$$

のように変形できる。第 2 行目への数式変形には, 三角関数の和と積の公式を利用した。第 3 行目への数式変形は, 単に, 記号を A_1 と A_2 から A と α に戻しただけだ。この計算結果によると, 時刻 t に関係なく $\xi(L,t) = 0$ であるためには, $kL = n\pi$ でなければならない。ただし, n は任意の整数だ。波数 k が $k = 2\pi/\lambda$ であるので, その条件は,

$$L = \frac{n\lambda}{2}, \tag{7.44}$$

のように書くことができる。つまり, 連続体の長さ L が半波長の整数倍となるような波長の波しか存在できないということだ。得られた解において, $2A\sin kx$ が振幅にあたり, その中を時間の関数 $\cos(\omega t + \alpha)$ の振動が発生している。振幅は時間に依存しない位置 x の関数であるので, 得られた解は定在波だ。

上で述べたように, 解 $\xi(x,t)$ には x の正方向に伝搬する解と負方向に伝搬する解が重ね合わされている。正方向に伝搬する解を $\xi_+(x,t)$, 負方向に伝搬する解を $\xi_-(x,t)$ なる記号で書くと,

$$\xi_+(x,t) = A_1\cos(kx-\omega t) + A_2\sin(kx-\omega t),$$
$$\xi_-(x,t) = B_1\cos(kx+\omega t) + B_2\sin(kx+\omega t),$$

となる。既に境界条件を検討して, $A_1 = -B_1$, $A_2 = B_2$ であることがわかっているので, それらの解は,

$$\xi_+(x,t) = \quad A_1\cos(kx-\omega t) + A_2\sin(kx-\omega t),$$
$$\xi_-(x,t) = -A_1\cos(kx+\omega t) + A_2\sin(kx+\omega t),$$

のように書き換えられる。記号 A_1, A_2 を A, α に戻すと, 解 $\xi_+(x,t)$ と $\xi_-(x,t)$ は,

$$\xi_+(x,t) = A\sin(kx-\omega t+\alpha), \qquad \xi_-(x,t) = A\sin(kx+\omega t-\alpha), \tag{7.45}$$

であることがわかる。この数式から $x=0, L$ での関数値を確認すると,

$$\xi_+(0,t) = -\xi_-(0,t), \qquad \xi_+(L,t) = -\xi_-(L,t),$$

となっている。得られた特徴の解釈として, 図 7.7 に示すように, 正方向に伝搬する $\xi_+(x,t)$ と負方向に伝搬する $\xi_-(x,t)$ を考えればよい。正方向に伝搬する $\xi_+(x,t)$ は $x=L$ で反射する際に位相が 180° 反転し, 反射波 $\xi_-(x,t)$ は負方向に伝搬し, $x=0$ で反射する際に位相が 180° 反転する。そのように往復する信号の重ね合わせが定在波 $\xi(x,t)$ を形成するのだ。反射するときに位相が 180° 反転する振る舞いは, 固定端反射と呼ばれ, 電磁波の反射

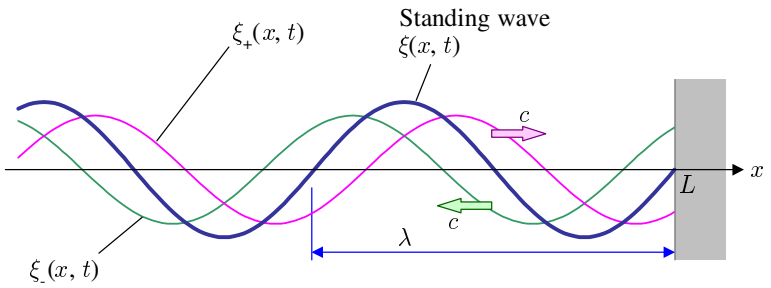


図 7.7: 境界での固定端反射によって形成される定在波

などの境界条件と同様である。図は $x=L$ での反射を描いているが, 同様の反射が $x=0$ でも起きている。上で書いた $L=n\lambda/2$ の条件が満たされていれば, 反射を繰り返す波が同一地点で同位相となり, 安定して定在波が形成される。仮に, $L \neq n\lambda/2$ であれば, 反射を繰り返すたびに, 同一地点で異なる位相が重なり合い, 波が相殺されてしまう。その理由で $L=n\lambda/2$ を満たす波しか存在できないのだ。