

レンズの物理学

2018年5月5日
Tokieda Yukinobu

顕微鏡, 望遠鏡, カメラなどに利用されるレンズは光の屈折現象を利用した光学部品である。屈折現象を利用することによって, 像の拡大, 明るさの確保が可能になる。本書ではレンズの原理やその応用機器の基礎について説明する。

1 レンズの原理

レンズは光の屈折現象を利用して光を集める光学部品である。レンズは, 屈折現象を利用して開口に照射された光を特定の一点に集結するように表面の曲率が設計されている。屈折現象はスネルの法則にしたがう。本節ではスネルの法則を紹介した後, レンズの基本原理について説明する。

1.1 スネルの法則

光が異なる媒質に入射されたとき, その媒質の境界線でスネルの法則にしたがい屈折する。スネルの法則は電磁気学の考察によって証明できるが, ここでは法則を紹介するだけでとどめておこう。

媒質Iと媒質IIの境界が zy 平面となるように座標軸が設定されている状況を考えよう。媒質Iと媒質IIの屈折率を, それぞれ, n_1 と n_2 とする。屈折率は媒質中での光の伝搬速度を与える係数であり, 媒質Iと媒質IIでは, それぞれ, $c_1 = c/n_1$, $c_2 = c/n_2$ なる速度で光は伝搬する。なお, c は真空中での光の伝搬速度である。スネルの法則によると, 図1に示すように, 入射面と同一面内で光の反射と屈折が発生する。入射面とは, 媒質境界の法線ベクトルと入射する光の経路をともに含む平面を意味する。つまり, 図1では入射面が xz 平面である。光の入射方向と媒質境界の法線ベクトルとなす角を入射角と定義する。同様に, 反射角と屈折角も法線ベクトルとなす角によって定義する。入射角が θ_1 であれば, 反射角は θ_1 となる。つまり, 反射角は入射角と等しい。一方, 屈折角 θ_2 は,

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2, \quad (1)$$

なる関係で決定される。この数式によると, 屈折率の大きな媒質に入ると屈折角は入射角より小さくなる。

スネルの法則は, 電磁気学によって厳密に証明することができるが, ホイヘンスの原理やフェルマの原理など直感的に説明することもできる。ホイヘンスの原理は, 波の伝達経

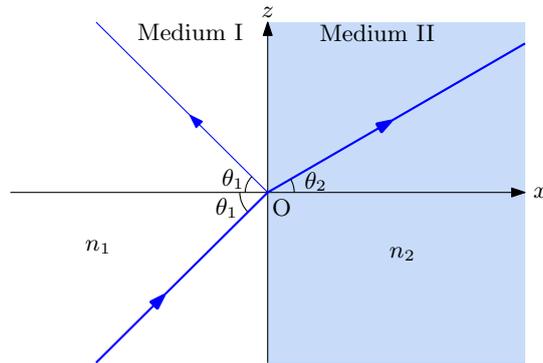


図 1: スネルの法則

路上の波面において2次的に波を放射し、それらの波が互いに干渉することによって新たな波面を形成するモデルである。波の回折現象の説明に適しているそのモデルは、光の屈折や反射を説明することができる。図2を用いてホイヘンスの原理によって屈折現象を説明しよう。媒質Iを伝搬している光が入射角 θ_1 で媒質に入り、屈折角 θ_2 で媒質IIを伝搬する状況を考えよう。光が図P₀に達したとき、光の波面は半直線P₀Q₀に存在する。その波面は、過去の波面から放射された無数の波の干渉によって形成されている。波面P₀Q₀の上の無数の点も、同様に、波を放射し、それらの干渉によって新たな波面が生成される。点Q₀から放射された波が点Q₁に到達した時点の波面を考えよう。この時点で、点Q₁か

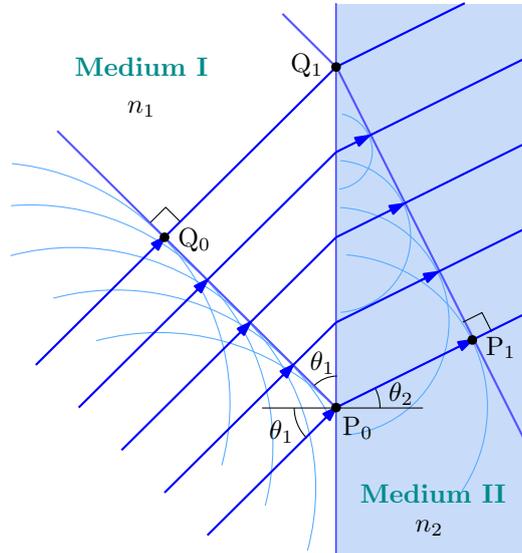


図 2: ホイヘンスの原理による屈折の説明

ら媒質IIへ光は放射されていない。一方、点P₀から放射されて光は媒質IIを拡散して伝搬している。線分P₀Q₀上から放射された光は、放射源の位置に依存し、媒質境界に盗撮する時刻が異なる。放射源がQ₀に近いほど、境界への到達時刻が遅くなる。その結果、媒質IIを伝搬する時間が短くなり、境界から遠くまで光が到達できない。そのように考えると、波面を形成する光は、図の媒質II内部における円弧上に到達した光である。それらが干渉して形成される波面は図に描いた半直線P₁Q₁となるはずだ。波の伝搬方向が波面と直交

することから、媒質境界で光は屈折することになる。例えば、媒質 I と媒質 II の屈折率を、それぞれ、 n_1 と n_2 とする。そのとき、媒質 I と媒質 II における光の伝搬速度は、それぞれ、 c/n_1 と c/n_2 となる。光が点 Q_0 から Q_1 まで伝搬する時間を τ とすれば、 $\overline{Q_0Q_1} = c\tau/n_1$ である。一方、 $\overline{P_0P_1} = c\tau/n_2$ となるはずだ。このとき、 $\overline{P_0Q_1} = L$ とすれば、

$$\frac{c\tau}{n_1} = L \sin \theta_1, \quad \frac{c\tau}{n_2} = L \sin \theta_2,$$

なる関係式が成立する。この関係式からただちに (1) が導かれる。つまり、ホイヘンスの原理からスネルの法則による屈折が説明できるわけだ。同様の考察で、反射についても説明ができる。

フェルマの原理によると、光の屈折は 2 点間を光が最小時間で到達できる経路である。その主張の正当性を検証してみよう。図 3 に示すように、媒質 I 内部の点 A から媒質 II 内部の点 B への光の伝搬経路を考える。媒質 I と媒質 II の屈折率は、それぞれ、 n_1 と n_2 である。点 A は媒質境界から x_1 の距離に、点 B は媒質境界から x_2 の距離に存在する。さら

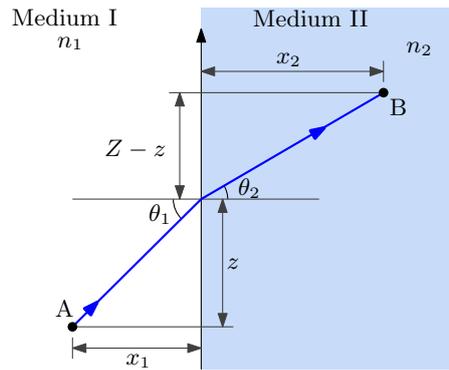


図 3: フェルマの原理の検証

に、点 A と点 B の距離を媒質境界に沿って測ると Z であるとする。光が点 A から媒質境界に沿って距離 z の場所で媒質境界を横切るとする。媒質 I と媒質 II での光の伝搬速度が c/n_1 , c/n_2 であることに注意すると、点 A から点 B までの光の伝搬時間は、

$$t = \frac{n_1}{c} \sqrt{x_1^2 + z^2} + \frac{n_2}{c} \sqrt{x_2^2 + (Z - z)^2},$$

となる。この伝搬時間が最小となる条件は $dt/dz = 0$ である。その条件にしたがって方程式を書くと、

$$n_1 \frac{z}{\sqrt{x_1^2 + z^2}} = n_2 \frac{Z - z}{\sqrt{x_2^2 + (Z - z)^2}},$$

が得られる。図 3 を見ると、

$$\sin \theta_1 = \frac{z}{\sqrt{x_1^2 + z^2}}, \quad \sin \theta_2 = \frac{Z - z}{\sqrt{x_2^2 + (Z - z)^2}},$$

であることが明らかなので、伝搬時間を最小とする条件は $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$ と等価である。したがって、スネルの法則による光の屈折は、2 点間を最短時間で結ぶ経路にしたが

う。ある媒質の伝搬経路の長さを l_μ , 屈折率を n_μ とすれば, $\sum n_\mu l_\mu$ を最小化する経路を伝搬することになる。なお, 総和記号 \sum は, 光の伝搬経路に存在するすべての媒質を対象とする。その量 $\sum n_\mu l_\mu$ を光路長と定義すれば, 光は光路長を最小化する経路を伝搬することを意味する。

媒質の境界面が基準面から角度 φ だけ傾いている場合を考えよう。図 4 に示すように, 境界線の法線ベクトルが x 軸と角度 φ をなすと仮定する。このとき, 媒質 I の内部において x 軸と θ_1 をなす方向から入射する光の屈折を調べよう。媒質境界が傾いているので, 媒

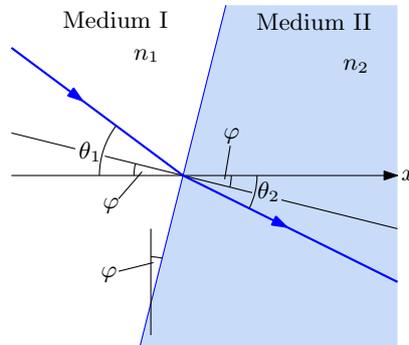


図 4: 傾いた面への光の入射

質 II への入射角は $\theta_1 - \varphi$ となる。一方, 屈折後の光の伝搬方向を x 軸と角度 θ_2 をなす方向とすれば, 屈折角は $\theta_2 - \varphi$ となる。したがって, このような傾いた境界におけるスネルの法則は,

$$n_1 \sin(\theta_1 - \varphi) = n_2 \sin(\theta_2 - \varphi), \quad (2)$$

のように記述できる。とくに, 境界の傾き φ , 入射方向 θ_1 と屈折方向 θ_2 が十分に小さい場合,

$$n_1 (\theta_1 - \varphi) \simeq n_2 (\theta_2 - \varphi), \quad (3)$$

なる近似が成立する。

1.2 球面境界による結像

球面で屈折率が異なる二つの媒質が接する場合, 一方の媒質から照射された光は, 近似的に, 特定の一点に集結する。光が集結するその現象は**結像**と呼ばれる。本項では, 球面境界による結像について考察する。

波源が媒質 I に存在し, 媒質 II に光が照射されたとする。ただし, 媒質 I の屈折率 n_1 と媒質 II の屈折率 n_2 は $n_1 < n_2$ なる関係を満たすとする。媒質の境界は半径 R の球面をな

し、その境界は x の負の方向に向かって凸であり、その中心が x 軸上にある。すなわち、境界となる球面の中心は $x = R$ となる x 軸上である。光の経路解析を簡単にするため xz 平面のみを考え、光源 A の位置を $[x, z] = [-L_1, H_1]$ とする。図5に示すように、光源 A から放射された光が x 軸と角度 θ_1 をなす方向に伝搬し、 $z = z_0$ となる点 P で媒質境界を通過する。光は媒質境界で、 x 軸と角度 θ_2 をなす方向に屈折し、媒質 II を伝搬する。なお、 θ_1

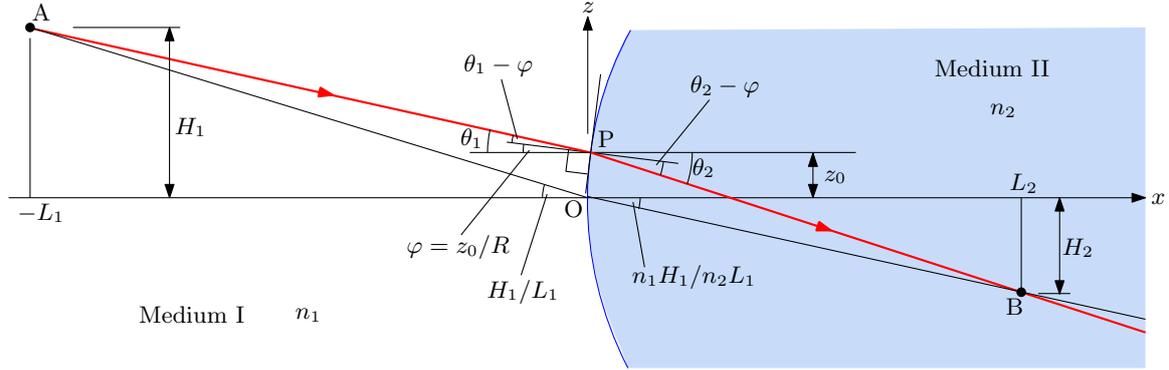


図 5: 球面状の媒質境界による屈折

と θ_2 は十分に小さい角度であり、 $z_0 \ll R$ とする。

前段落での条件設定にしたがい、光の経路を計算しよう。点 P において、 $z_0 \ll R$ の条件で、境界の法線方向は x 軸と角度 $\varphi \equiv z_0/R$ をなす。その結果、光の入射角は $\theta_1 - \varphi$ 、屈折角は $\theta_2 - \varphi$ となる。このとき、小さい入射角における近似式 (3) を利用し、屈折後の伝搬方向が、

$$\begin{aligned}\theta_2 &= \frac{n_1}{n_2} \left(\theta_1 - \frac{z_0}{R} \right) + \frac{z_0}{R} \\ &= \frac{n_1}{n_2} \left(\frac{H_1 - z_0}{L_1} - \frac{z_0}{R} \right),\end{aligned}$$

のように計算できる。第 2 行目への数式変形には、

$$\theta_1 = \frac{H_1 - z_0}{L_1},$$

なる関係を利用した。屈折後の光は $z = z_0 - \theta_2 x$ なる経路を伝搬するはずである。この経路に、上で計算した θ_2 を代入すると、

$$z = -\frac{n_1}{n_2} \frac{H_1}{L_1} x + \left\{ 1 + \left[\frac{n_1}{n_2} \frac{1}{L_0} + \left(\frac{n_1}{n_2} - 1 \right) \frac{1}{R} \right] x \right\} z_0, \quad (4)$$

が得られる。この計算結果は、ある特定の x で第 2 項をゼロにすることができる。言い換えると、 z_0 に関わらず、ある特定の位置を光が通過するのだ。その特定の x を $x = L_2$ とし、それに対応する z を $z = H_2$ としよう。そのとき、未知数 L_2 は、

$$\frac{n_1}{L_1} + \frac{n_2}{L_2} = \frac{n_2 - n_1}{R}, \quad (5)$$

なる関係式によって決定できる。また、結像位置と x 軸の距離 H_2 は、

$$\frac{n_1 H_1}{L_1} + \frac{n_2 H_2}{L_2} = 0, \quad (6)$$

なる関係を満足するはずだ。つまり、図5に示す点 A から放射された光は、点 B で結像する。ただし、この現象は θ_1 と θ_2 が十分に小さい場合の近似である。

結像する距離が無限大になると、屈折後の光は終結をしない平行光線¹となる。平行光線に対する結像の位置は**焦点**と呼ばれる。特に、図5において、 $L_2 \rightarrow \infty$ としたときの L_1 は**前側焦点距離**、 $L_1 \rightarrow \infty$ としたときの L_2 は**後側焦点距離**と呼ばれる。改めて、前側焦点距離を f_1 、後側焦点距離を f_2 なる記号で記述すると、

$$\frac{1}{f_1} = \left(\frac{n_2}{n_1} - 1 \right) \frac{1}{R}, \quad \frac{1}{f_2} = \left(1 - \frac{n_1}{n_2} \right) \frac{1}{R}, \quad (7)$$

なる関係が成立する。この関係式を用いると、先ほど導出した結像位置は、

$$\frac{n_1}{L_1} + \frac{n_2}{L_2} = \frac{n_1}{f_1} = \frac{n_2}{f_2}, \quad (8)$$

なる関係を満足する。

特定の点で結像する光線に関して、光路長はすべて等しい。図5では、光源 A から結像位置 B への光の伝搬経路は無数にあるが、その光路長はすべて等しいのだ。例えば、図に示す点 P を経由する光路長は $n_1 \overline{AP} + n_2 \overline{PB}$ となる。光路長の計算のため、 \overline{AP} と \overline{PB} を個別に計算すると、

$$\begin{aligned} \overline{AP} &= \sqrt{L_1^2 + (H_1 - z_0)^2} + R - \sqrt{R^2 - z_0^2} \\ &= L_1 + \frac{(H_1 - z_0)^2}{2L_1} + \frac{z_0^2}{2R} \\ &= L_1 + \frac{H_1^2}{2L_1} - \frac{H_1}{L_1} z_0 + \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{R} \right) \frac{z_0^2}{2}, \\ \overline{PB} &= \sqrt{L_2^2 + (z_0 - H_2)^2} + \sqrt{R^2 - z_0^2} - R \\ &= L_2 + \frac{H_2^2}{2L_2} - \frac{H_2}{L_2} z_0 + \left(\frac{1}{L_2} - \frac{1}{R} \right) \frac{z_0^2}{2}, \end{aligned}$$

が得られる。この計算では、 $H_1 \ll L_1$ 、 $H_2 \ll L_2$ 、 $z_0 \ll R$ なる条件にて2次近似を適用した。この計算において、 \overline{AP} の第1行目の第2項と第3項は、球面境界の x 座標が z_0 に依存することによる補正項である。 \overline{PB} の第1行目の第2項と第3項も同様である。この計算結果を利用すると、点 A から点 B への光路長は、

$$\begin{aligned} n_1 \overline{AP} + n_2 \overline{PB} &= n_1 L_1 + n_2 L_2 + \frac{n_1 H_1^2}{2L_1} + \frac{n_2 H_2^2}{2L_2} \\ &\quad + \left(\frac{n_1 H_1}{L_1} + \frac{n_2 H_2}{L_2} \right) z_0 + \left(\frac{n_1}{L_1} + \frac{n_2}{L_2} - \frac{n_2 - n_1}{R} \right) \frac{z_0^2}{2}, \end{aligned}$$

¹拡散する場合、結像する距離が負の値になると考える。

となるわけだが, (5) と (6) によって得られた数式の第 2 行目がゼロであることがわかるので,

$$n_1 \overline{AP} + n_2 \overline{PB} = n_1 L_1 + n_2 L_2 + \frac{n_1 H_1^2}{2L_1} + \frac{n_2 H_2^2}{2L_2}, \quad (9)$$

が得られる。導出された光路長に z_0 の依存性は含まれていない。言い換えると, 点 A から放射され点 B で結像される光は, 途中経路に関わらず, 光路長が一定である。さらに言い換えると, 結像される光は同位相で重ね合わされる。

1.3 薄い球面レンズ

表面が球面になるように磨かれたレンズによる光の屈折を調べてみよう。ただし, 簡単のため, 光の屈折による経路変化に比べレンズの厚さが無視できるような薄いレンズを想定する。

図 6 に示すように, 屈折率 n_1 の媒質 I の中に屈折率 n_2 の媒質 II でつくられたレンズを置いた場合を考えよう。レンズの左端は曲率半径 R_1 の球面, 右端は曲率半径 R_2 の球面であるとする。それらの曲率半径は, 図において, 左に凸となる条件で正の値をとるとする。すなわち, 右に凸の形状であれば曲率半径は負の値となる。また, 平面であれば曲率半径は無限大とすればよい。

レンズ中央を通る軸が x 軸となるように座標を設定する。その軸から z だけ離れた場所に, x 軸と角度 θ_1 をなす方向から到来する光線を考える。その光線がレンズによって屈折する様子を解析してみよう。なお, 簡単のため, 光線の到来方向や屈折後の伝搬方向は十分に小さく, 近似式 (3) で計算できるものとする。光線がレンズに当たる場所はレンズ中

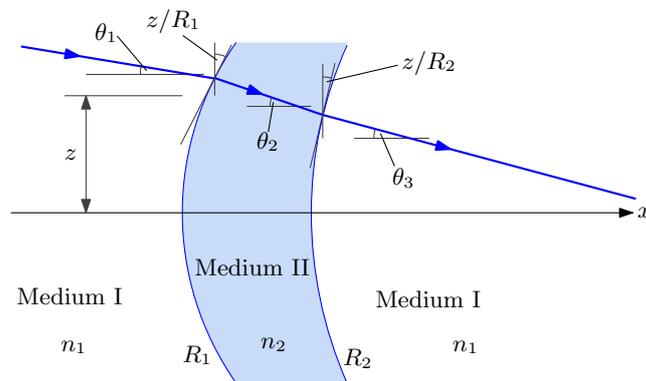


図 6: 薄いレンズによる光の屈折

心から z だけ隔てているため, レンズの接面は角度 z/R_1 だけ傾いている。近似式 (3) によ

ると、屈折の前後の伝搬方向 θ_1 と θ_2 は、

$$n_2 \left(\theta_2 - \frac{z}{R_1} \right) = n_1 \left(\theta_1 - \frac{z}{R_1} \right),$$

なる関係で結ばれる。レンズの右端から媒質 I に出た後の伝搬方向を θ_3 とすると、同様に、

$$n_1 \left(\theta_3 - \frac{z}{R_2} \right) = n_2 \left(\theta_2 - \frac{z}{R_2} \right),$$

が成立するはずだ。なお、レンズが十分に薄く、媒質 I に抜ける場所も x 軸から距離 z を保ったままとした。そのような仮定のもとで、レンズの左右端におけるスネルの法則から θ_2 を消去すると、

$$\theta_3 = \theta_1 + \left(\frac{n_2}{n_1} - 1 \right) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) z, \quad (10)$$

が得られる。この数式の中で、 R_1 と R_2 の逆数の差が因数として含まれる。その因数が重要である。なぜなら、 R_1 と R_2 の大小関係によって符号が入れ替わるからだ。その符号についての意味は後に明らかになる。

レンズを配置した場所を $x = 0$ としよう。ここでは、レンズの厚さを無視するのでレンズの左端も右端も $x = 0$ である。光線が x 軸と角度 θ_1 をなす方向から到来し、 x 軸から z_1 だけ離れた地点でレンズによって屈折し、 x 軸と θ_3 をなす方向に伝搬した場合、光線の軌跡は、

$$z = \begin{cases} z_1 - \theta_1 x & \text{if } x < 0, \\ z_1 - \theta_3 x & \text{if } x \geq 0, \end{cases}$$

となるはずだ²。ここで、レンズに到来する光線は遠方の 1 点から照射されているとしよう。その照射源の位置を $x = -L_0$, $z = H_0$ とすると、光線の到来方向は、

$$\theta_1 = \frac{H_0 - z_1}{L_0},$$

である。薄いレンズにおけるスネルの法則 (10) を用いて、レンズを透過した後の伝搬方向 θ_3 を計算すると、

$$\theta_3 = \frac{H_0}{L} + \left[\left(\frac{n_2}{n_1} - 1 \right) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) - \frac{1}{L_0} \right] z_1,$$

が得られる。得られた到来方向を用いて、透過後の光線の軌跡を数式で表現すると、

$$\begin{aligned} z &= z_1 - \theta_3 x = z_1 - \frac{H_0}{L} x - \left[\left(\frac{n_2}{n_1} - 1 \right) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) - \frac{1}{L_0} \right] z_1 x \\ &= -\frac{H_0}{L} x - \left\{ \left[\left(\frac{n_2}{n_1} - 1 \right) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) - \frac{1}{L_0} \right] x + 1 \right\} z_1, \end{aligned}$$

²依然と、伝搬方向 θ_1 と θ_3 が十分に小さい前提での近似式を用いている。

が導かれる。この数式から興味深い事実がわかる。その事実とは、

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{L_0} = \left(\frac{n_2}{n_1} - 1\right) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right),$$

を満たす x において、 z から z_1 の依存性が消えることだ。言い換えると、レンズで屈折した光が、ある地点で特定の点に集結するのだ。この条件を満たす解を $x = L_1$ とおき、

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n_2}{n_1} - 1\right) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right), \quad (11)$$

なる数式によって f を定義すると、

$$\frac{1}{L_0} + \frac{1}{L_1} = \frac{1}{f}, \quad (12)$$

なる関係式が得られる。また、光線の集結点と x 軸の距離を H_1 とすると、

$$\frac{H_0}{L_0} = \frac{H_1}{L_1}, \quad (13)$$

が成立する。つまり、光線の集結点は、光源からレンズの中央を結ぶ直線の延長線上に存在する。これらの数式で記述される現象は、図7に描くように、光源 A から放射された複数の光線がレンズを透過し、点 B で集結することに相当する。この図はカメラの撮影原理

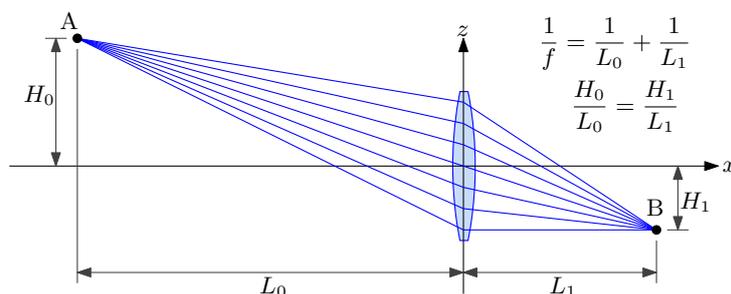


図 7: レンズによる光線の集結

と考えるもよい。距離 L_0 がレンズから被写体までの距離である。レンズをせり出し、レンズと撮像素子の距離が L_1 になったとき、ピントが合った状態になっている。ピントを合わせる操作において、レンズの位置が変化するのは、条件 (12) を満たすようにレンズと撮像素子の距離を調整しているのだ。その数式によると、ある特定のレンズ (f が一定) において、 L_0 が小さいとき L_1 を小さくしなければならない。具体的には、近くの物体を撮影する際には、レンズをせり出し L_1 を大きくすることでピントを合わせているのだ。なお、被写体が無限遠 ($L_0 \rightarrow \infty$) の場合、 $L_1 \rightarrow f$ となる。つまり、前に定義した f は平行光線を集結されるために必要な距離であり、**焦点距離**と呼ばれる。

前にレンズの曲率半径 R_1 と R_2 の大小関係が重要であることを述べた。具体的には、 $R_1 < R_2$ のとき $f > 0$ となり、平行光線が有限距離で集結する。そのようなレンズは、レンズ中央から外側にいくほどレンズが薄くなり、凸レンズと呼ばれる。一方、 $R_1 > R_2$ のとき $f < 0$ となり、平行光線はレンズを透過すると広がってしまい、集結しない。そのようなレンズは、レンズ中央よりも外側の方が厚くなり、凹レンズと呼ばれる。

光の集結点 レンズの焦点距離より遠くにある物体は、レンズによって結像する。結像する位置では、光が同位相で重ね合わされている。同位相で重ね合わさることは図7によって説明できる。図によると、点Aから放射された光は、レンズを通過すると点Bに集結される。フェルマの原理によると、その経路は光路長が最短となる経路である。図から明らかのように、点AからBへの経路は複数存在する。フェルマの原理からそれらの経路は、すべて光路長が等しくなるはずだ。仮に等しくなければ、フェルマの定理に反する経路を光が伝搬したことになってしまうのだ。もともと点Aから放射された光であるので、等しい光路長の経路を伝搬してきた光はすべて位相が等しいはずだ。ゆえに、結像する光はすべて同位相で重ね合わされる。

1.4 球面収差

これまでレンズが十分に薄いことを条件に球面レンズを取り扱ってきた。曲率に対してレンズが厚くなってくると、球面レンズでは光線が一か所に集まらない。球面がゆえに光の収束点がずれる現象は、球面収差と呼ばれる。

簡単な例を用いて球面収差を計算してみよう。レンズの入力側の曲率半径を無限大とし、出力側の曲率半径を負の値とする。つまり、入力側が平坦な凸レンズとする。照射する光線はレンズに垂直に入射する ($\theta_1 = 0$)。レンズ中央から z だけ隔てた位置に入力される光線は、レンズを透過した後 θ_2 の角度で伝搬すると仮定すれば、

$$\sin\left(\theta_2 + \arcsin \frac{z}{R}\right) = \frac{n_2}{n_1} \frac{z}{R},$$

を満たす。この方程式を解いて θ_2 を決定すると、

$$\theta_2 = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1} \frac{z}{R}\right) - \arcsin \frac{z}{R},$$

が得られる。その角度で伝搬する光線が x 軸と交わる位置を $x_0(z)$ とすると、

$$x_0(z) = z \cot \theta_2 - R + \sqrt{R^2 - z^2},$$

で与えられる。右辺の第2項はレンズの厚さに関する補正值である。

2 光学機器の動作原理

光学機器はレンズを利用して物体を拡大するための装置である。拡大する用途として、近接で微細構造を拡大する場合、遠望の物体を拡大する場合がある。前者は拡大鏡や顕微鏡で実行され、後者は望遠鏡で実行される。本節では光学機器の基本的な動作原理を説明する。

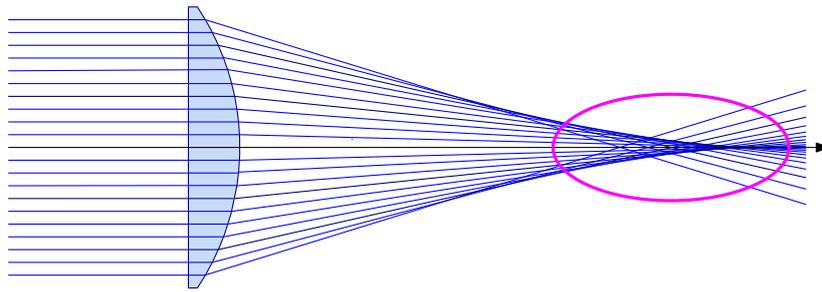


図 8: 球面収差の例

2.1 拡大鏡

拡大鏡は凸レンズを利用し、微細構造を拡大するための器具である。拡大鏡を対象物にかざすと明らかなように、対象物、拡大鏡、眼の位置関係によって対象物の拡大率、さらには、その見え方が異なる。本項では現象の原理を説明する。

拡大鏡の動作を説明するには、既に導出した凸レンズの結像の公式を利用する。凸レンズの焦点距離を f 、凸レンズと対象物の距離を L_1 とすると、対象物が結像する距離 L_2 は、

$$\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} = \frac{1}{f},$$

なる公式で与えられる。この数式において、 L_1 と L_2 が正であるならば、 $L_1 > f$ と $L_2 > f$ がともに成立しなければならない。つまり、レンズから焦点距離より大きな距離を隔てた対象物の光は、レンズを通して、焦点距離より大きな距離を隔てて結像するのだ。

対象物とレンズの距離が焦点距離より小さい場合、対象物の光は結像しない。レンズから至近距離から発する光は大きく拡散するため、凸レンズで拡散を抑えられないからである。結像距離を算出する公式において、 $L_1 < f$ とすれば $L_2 < 0$ となる。そこで、その公式を、

$$-\frac{1}{L_2} = \frac{1}{L_1} - \frac{1}{f},$$

のように変形してみる。この数式によると、例えば、 $L_1 = 4f/3$ ならば $-L_2 = 3f$ となる。その計算結果は、図 9 の状況に相当する。この図は、点 A から発する光の屈折を描いている。レンズから結像点までの距離 L_2 が負であるので、図に示すように、左側に存在する(点 B)。実際に、光は点 B で結像するわけでない。点 B はあくまでも見かけの結像点である。点 A から発した光はレンズで屈折し、点 B から伸ばした直線に沿って伝搬するのだ。つまり、対象物 A にレンズをかざすと、あたかも点 B に対象物が存在するように見えるということだ。この原理が、物体を見かけ上、拡大するわけである。どれくらいまで物体が拡大できるのかを次の段落で説明しよう。

レンズを用いて物体 A を観測する状況を考えよう。物体 A から観測点までの距離が L であるとき、焦点距離 f のレンズを物体から距離 ξ の位置に配置する。ただし、 $\xi < f$ とする。この状況は図 10 のように描かれる。なお、物体 A は x 軸から ζ だけ離れた位置に存

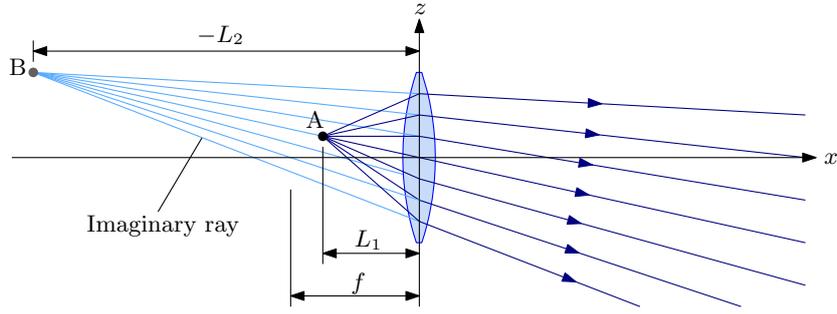


図 9: 焦点距離より近傍から発する光の屈折

在する。このとき、観測点 P からレンズを通して対象物を見ると、前段落で説明した原理によって、物体 A が点 B に存在するかのように見える。点 B と z 軸の距離を $\alpha\xi$ としてお

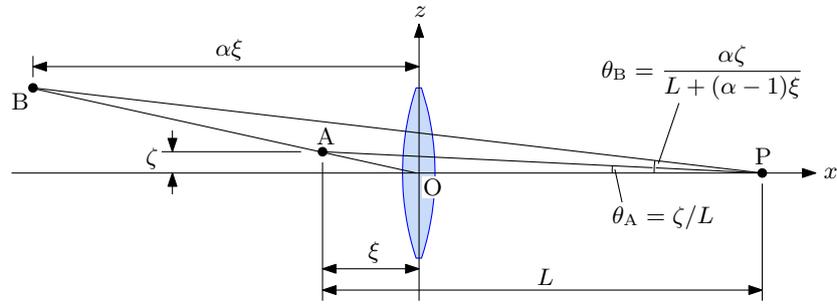


図 10: 凸レンズによる物体の拡大

こう。レンズがなければ、物体 A は x 軸から離角:

$$\theta_A = \frac{\zeta}{L},$$

の方向に見えるはずだが、レンズによる光の屈折のため、その離角は、

$$\theta_B = \frac{\alpha\zeta}{L + (\alpha - 1)\xi},$$

に拡大する。レンズを通した見かけの位置 $\alpha\xi$ は、

$$\frac{1}{\alpha\xi} = \frac{1}{\xi} - \frac{1}{f},$$

なる関係を満たすはずだから、 $\alpha = f/(f - \xi)$ である。この係数を代入すると、

$$\theta_B = \frac{f\zeta}{\xi^2 - L\xi + Lf},$$

が得られる。この数式は、 $\xi = L/2$ のとき分母が最小値となり、そのとき、

$$[\theta_B/\theta_A]_{\max} = \frac{4f}{4f - L} \quad \text{when } \xi = \frac{L}{2} \text{ and } L \leq 2f,$$

が拡大率の最大値となる。数式に記載してあるように、この数式は $L \leq 2f$ の条件における拡大率の最大値である。その条件を満たさない場合、 $\xi = f$ が拡大率の最大値を与えると考えるべきである。なぜなら、 $\xi \rightarrow f$ の極限において、見かけの結像点までの距離を与える比例係数は $\alpha \rightarrow \infty$ となり、見かけの離角は観測点 P までの距離 L に依存せず、 $\theta_B \rightarrow \zeta/f$ となるからだ。したがって、 $\xi \rightarrow f$ における拡大率の極限は、

$$\lim_{\xi \rightarrow f} \frac{\theta_B}{\theta_A} = \frac{L}{f},$$

となる。この数式によると、レンズを対象物から焦点距離だけ離して配置したとき、観測点の位置によって拡大率が異なる。しかも、観測点の対象物から離れるほど、その距離に比例して拡大率が大きくなる。信じられないかもしれないが、実際に拡大鏡を配置して試してもらいたい。本当にそのような現象が起きるのだ。

レンズから対象物までの距離 ξ が焦点距離を超えると現象が大きく異なる。典型的な状況として、点 P からレンズを通してみると像が上下左右で反転するのだ。その原理を図 11 に示す。対象物 A からレンズまでの距離が焦点距離より大きく、さらに、レンズと観測点 P までも十分に大きい場合、対象物 A から発する光がレンズと P との間で結像する。その結像点を B とする。その場合、観測点 P からの観測では、結像点 B に物体 A が見えること

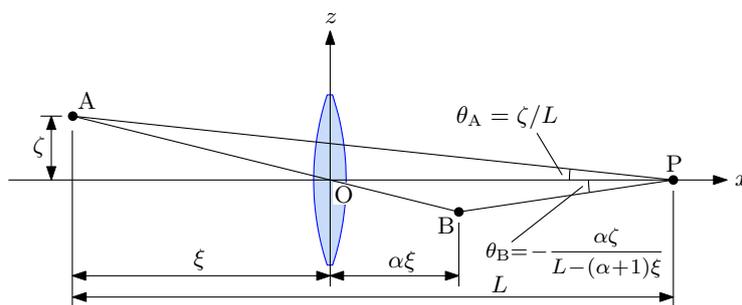


図 11: 対象物から離れた凸レンズによる像の反転

になる。図から明らかなように、点 A の z 座標が正であれば、点 B の z 座標は負である。したがって、観測点から見た物体の離角 θ_B は、真の物体の位置に対応する離角 θ_A とは符号が逆転する。その符号の逆転は、レンズを通してみると上下左右が反転することを意味するのである。なお、図中に示す結像点までの距離 $\alpha\xi$ は、結像点の関係式:

$$\frac{1}{\xi} + \frac{1}{\alpha\xi} = \frac{1}{f},$$

を満たす距離である。すなわち、 $\alpha = f/(\xi - f)$ である。

対象物とレンズの距離 ξ が焦点距離よりわずかに大きい場合、結像点 B までの距離 $\alpha\xi$ が観測点を超えることがある。つまり、 $\alpha\xi > L - \xi$ となる場合がある。そのとき、対象物 A に対応する明確な像が観測できない。つまり、ピンボケ状態の像しか観測することができない。

本項で説明したように、対象物とレンズの距離の変化における対象物の見え方の違いは、凸レンズがあれば簡単に検証できる。対象物から十分な距離を保って凸レンズを対象物に向かってかざす。レンズが対象物に近い状態から、徐々にレンズを離し、自分に向かって近づける。レンズが対象物に近いときは、観測される対象物はレンズを離すに伴い徐々に拡大されていく。しかし、ある距離を超えてレンズを離すとピントが合わなくなる。その境界線となるレンズと対象物の距離が、レンズの焦点距離である。さらにレンズを対象物から離すと、再びピントが合ってくるが、像が上下左右に反転している。さらに、レンズを離し自分の目に近づけると、再びピントが合わなくなる。ピントが合わなくなるレンズの位置では、対象物の結像点は観測点を超えている。だからピントが合わないのだ。

2.2 組み合わせレンズ

レンズ2枚を組み合わせ、レンズ間の距離を調整できる機構を設けると、レンズの焦点距離を等価的に変化できる。その機構は、カメラのズームレンズとして応用されている。具体的には、遠くの景色を拡大する場合、2枚のレンズの距離を大きくとる。距離を大きくとると焦点距離が大きなレンズと等価となるため、結像する像を大きくできるのだ。本項では、2枚のレンズ間の距離と焦点距離の関係について説明する。

2.2.1 焦点距離

屈折率が f_1 と f_2 の凸レンズ (レンズ1とレンズ2) を共通の軸上に、距離 L だけ隔てた場合を考えよう。その状況で、平行光線をレンズ1に入射したときの光の屈折を 12 に示す。この図は、 $L < f_1$ を想定して描いている。平行光線は x 軸と平行に入射し、レンズ1で屈折する。レンズ2が存在しなければ、光は点 P'_3 で x 軸と交わるのだが、レンズ2によって

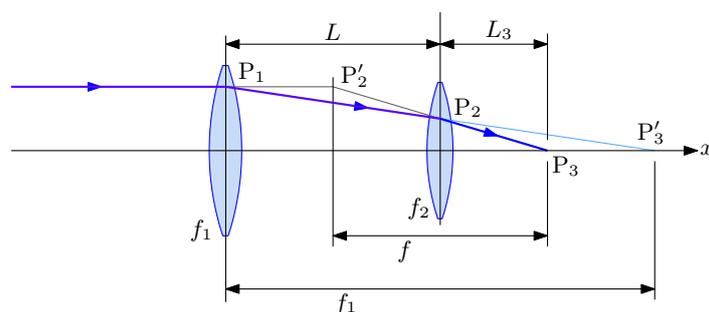


図 12: 凸レンズ2枚による光の屈折

屈折するため、点 P_3 で x 軸と交わる。これまでに導出した公式を用い、光が x 軸と交わる位置 P_3 を特定しよう。その位置の特定には、レンズ2の屈折の結像の関係式を用いればよい。レンズ2に入射する光は、レンズがなければ距離 $f_1 - L$ だけ隔てた位置で結像する

はずなので、レンズ入射前の距離として $-(f_1 - L)$ を設定する。レンズ2で屈折した後、距離 L_3 だけ隔てた位置で x 軸と交わることを仮定すると、結像の関係式は、

$$-\frac{1}{f_1 - L} + \frac{1}{L_3} = \frac{1}{f_2},$$

のように記述できる。この方程式から結像位置 L_3 が特定できるはずだ。

これら2枚のレンズによる現象が、1枚のレンズによる現象として記述できるか考察してみよう。光線 P_2P_3 の延長と、レンズ1に入射する光線の延長の交点を P'_2 としよう。その条件設定のもと、 P'_2 と P_3 の x 軸方向の距離を f とする。そのとき、簡単な計算によって、

$$f = \frac{f_1 L_3}{f_1 - L},$$

が得られる。ここで、結像位置の公式を利用して L_3 を消去すると、

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{L}{f_1 f_2}, \quad (14)$$

なる公式が得られる。この公式は、図12に描いたように、2倍のレンズによる屈折を、 P'_2 に設置した1枚の仮想的な凸レンズの屈折で取り扱おうとしている。つまり、図中に記載した f が焦点距離だ。この公式によると、 L を大きくとると $1/f$ が小さくなるので、焦点距離 f が大きくなる。この効果は、カメラのズームレンズで応用されている。拡大、または、望遠レンズとしての機能は、焦点距離を大きくすることで達成できる。ズームレンズは望遠の際に、レンズが大きく前にせり出す。その動作は、レンズ間の距離を大きくとろうとしているのだ。

レンズ2枚を組み合わせた系では、焦点距離が基準とする位置がレンズの組み合わせによって異なる。その基準位置が、レンズ2から δ_2 だけさかのぼった位置であると仮定する。その基準位置は、

$$\delta_2 = \frac{f_2 L}{f_1 + f_2 - L}, \quad (15)$$

によって特定できる。この公式は、次項で図を用いて導出する。この公式によると、レンズ間の距離 L を大きくとると、 δ_2 が大きくなる。すなわち、焦点距離の基準位置がさらにさかのぼった位置になる。しかも、 $L \geq f_1$ のとき $\delta_2 \geq L$ となる。これは、焦点の基準位置がレンズ1よりも、さらにさかのぼった位置になることを意味する。

公式(14)と(15)を利用して、組み合わせレンズの焦点距離を描くと図13のようになる。この図は、焦点距離が90mmと45mmであるレンズ1とレンズ2を組み合わせた系を表している。レンズ間の距離 L を大きくとると、焦点距離が大きくなるとともに、その基準位置がレンズ1 (L_1) に寄っていく傾向がみえる。しかし、 L を大きくとると、結像位置はレンズ2 (L_2) に近づく。

極端な例として、 $L = f_1 + f_2$ のとき、焦点距離は無限大になる。この場合、平行光線をレンズに入射した場合、レンズを透過した後の光も平行光線である。さらに、 $L > f_1 + f_2$ とすると $f < 0$ となる。それは、レンズを透過した光線が、凹レンズを透過した後のように広がることを意味する。

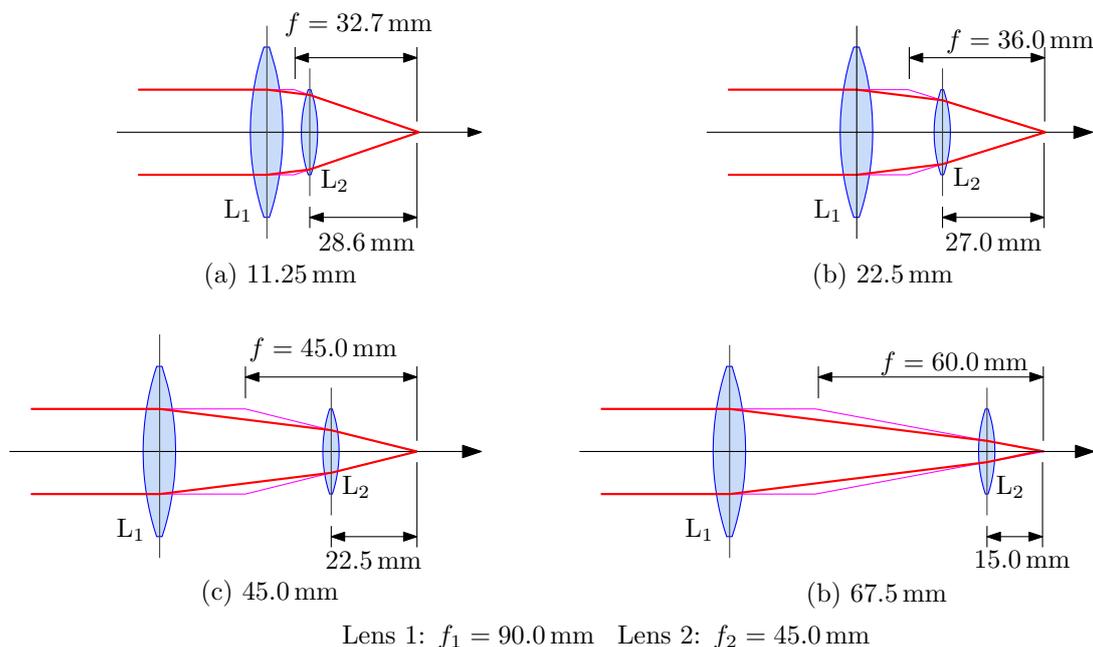


図 13: 凸レンズ 2 枚の距離による焦点距離の制御

2.2.2 結像位置

凸レンズ 2 枚を組み合わせた系に関して一般の結像位置を定式化しよう。定式化には図 14 のような図を用いるのが便利である。この図には、点 A から放射され、点 B で結像する光線と、点 B から放射され、点 A で結像する光線を描いている。点 A から放射された光線は、レンズ 1 (点 A_1) とレンズ 2 (点 A_2) で屈折するのだが、前項での考察結果にしたがい、点 A_0 で屈折するモデルで考察する。点 A_0 は、このレンズ系の主点であり、レンズ 2 から δ_2 だけさかのぼった位置に存在する。なお、考察する光線は、 x 軸と平行に照射される光線であるとする。その場合、屈折後に主点から焦点距離 f だけ隔てた位置で x 軸と交わる。点 B から放射され、点 A で結像する光線も同様に、主点 B_0 で屈折するモデルで考察する。

第 1 段階として、焦点距離 f を特定しよう。線分 P_2A_3 の長さを x とおき、三角形 $A_0A'_0A_3$ と三角形 $A_2P_2A_3$ が相似であることを着目すると、

$$\frac{h_1}{x + \delta_2} = \frac{h_2}{x},$$

が得られる。さらに、線分 A_1A_2 の延長が点 A_4 で x 軸と交わることに注目する。その線分の延長はレンズ 1 単独での光の屈折を表すので、 $P_1A_4 = f_1$ である。ここで、三角形 $A_1P_1A_4$ と三角形 $A_2P_2A_4$ が相似であることを利用すると、

$$\frac{h_1}{f_1} = \frac{h_2}{f_1 - L},$$

なる関係式が得られる。これらの関係から、 h_1/h_2 を消去すると、

$$\delta_2 = \frac{xL}{f_1 - L}, \tag{16}$$

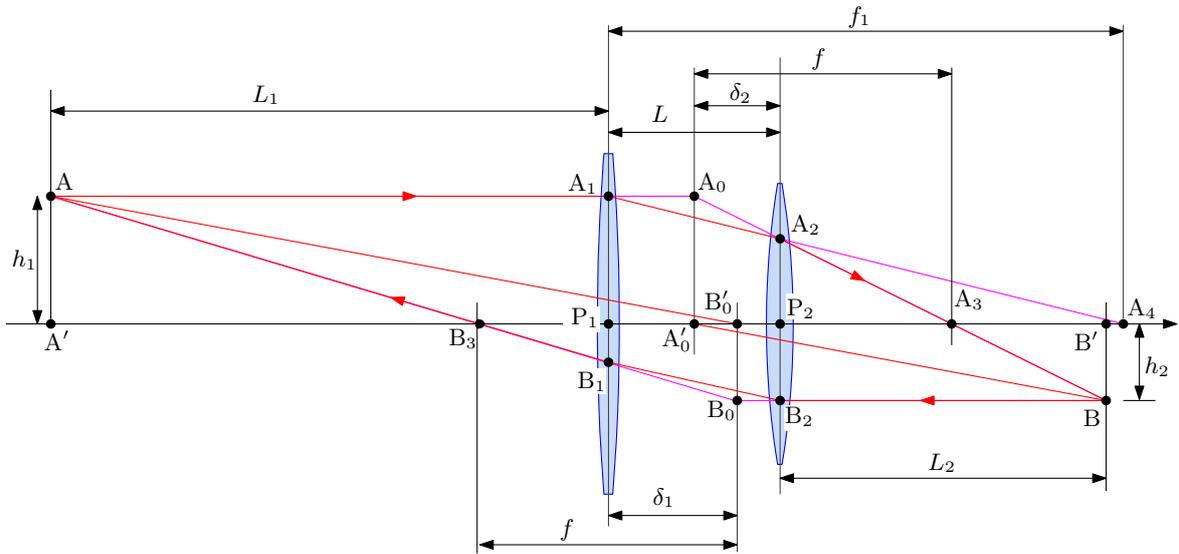


図 14: 凸レンズ 2 枚の距離による結像位置のモデル

が得られる。未知数 x はレンズ 2 の結像条件から特定できる。つまり、本来、距離 $f_1 - L$ で結像する光線が、レンズ 2 で屈折することによって x で結像する性質を利用するのだ。その現象は、

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{f_1 - L} = \frac{1}{f_2},$$

なる数式で表現される。この数式から x は、

$$x = \frac{(f_1 - L) f_2}{f_1 + f_2 - L},$$

のように特定できる。この結果を (16) に代入すると、

$$\delta_2 = \frac{f_2 L}{f_1 + f_2 - L}, \quad (17)$$

が得られる。前項で既に挙げた数式と一致した。この数式は、点 A から照射される光が点 B で結像するときの主点の位置を与える。逆に、点 B から照射される光が点 A で結像するときの主点は、この数式において、 f_1 と f_2 を交換して得られる数式:

$$\delta_1 = \frac{f_1 L}{f_1 + f_2 - L}, \quad (18)$$

によって特定できる。得られた関係式 (17) と (18) から、

$$\delta_1 + \delta_2 = \frac{(f_1 + f_2) L}{f_1 + f_2 - L} \geq L \quad \text{if } 0 \leq L < f_1 + f_2,$$

が導かれる。この数式は、点 A と点 B のどちらを結像点で考えるかによって、主点の位置が異なる³ ことを意味する。また、焦点距離が $f = x + \delta_2$ であることに注意すると、

$$f = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - L}, \quad (19)$$

³主点の位置が一致するのであれば、 $\delta_1 + \delta_2 = L$ が成立するだ。

が、ただちに導かれる。この数式も前項で導出した結果と一致する。この数式は f_1 と f_2 を交換しても不変であるので、点 A と点 B のどちらを結像点としてみても焦点距離 f は変わらない。

引き続き、結像位置に関する法則を導出しよう。三角形 $A_0B'_0A_3$ と三角形 $BB'A_3$ の相似に注目すると、

$$\frac{h_1}{f} = \frac{h_2}{L_2 + \delta_2 - f},$$

が得られる。この数式について、添え字 1 と 2 を入れ替えると、

$$\frac{h_2}{f} = \frac{h_1}{L_1 + \delta_1 - f},$$

が得られる。これらの数式から f を消去すると、

$$\frac{h_1}{L_1 + \delta_1} = \frac{h_2}{L_2 + \delta_2}, \quad (20)$$

が得られる。この関係式は、線分 AB'_0 と線分 A'_0B が平行であることを意味する。この関係式から、結像する像の拡大率:

$$M = \frac{h_2}{h_1} = \frac{L_2 + \delta_2}{L_1 + \delta_1} \quad (21)$$

が得られる。これまでの導出過程において、この拡大率が、

$$\frac{L_1 + \delta_2}{L_1 + \delta_1} = \frac{L_2 + \delta_2 - f}{f},$$

なる関係を満たすことに注目すると、

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{L_1 + \delta_1} + \frac{1}{L_2 + \delta_2}, \quad (22)$$

が得られる。この関係式は、レンズ 1 枚による結像の関係式に類似している。本項での検討結果を要約すると次のようになる。レンズ 2 枚の系において、重要な要素は、焦点距離 f と主点の位置を特定するための δ_1 と δ_2 である。これら三つのパラメータがあればレンズ 2 枚の系の結像条件を計算できる。

例として、 $f_1 = 30 \text{ mm}$ と $f_2 = 20 \text{ mm}$ のレンズを $L = 10 \text{ mm}$ だけ離して設置した場合を考えよう。その場合、その系は $f = 15 \text{ mm}$ のレンズ 1 枚と等価である。主点の位置は、 $\delta_1 = 7.5 \text{ mm}$ 、 $\delta_2 = 5 \text{ mm}$ によって与えられる。光源 A がレンズ 1 から $L_1 = 32.5 \text{ mm}$ の距離にあるとき、(22) によって、 $L_2 = 19 \text{ mm}$ の場所で結像することが導かれる。

2.3 望遠鏡

レンズを 2 枚組み合わせると視野角を変換できる。視野角が小さい物体について、レンズを 2 枚組み合わせ視野角を拡大すると、その物体が近くにあるように見える。これが望遠鏡の原理である。望遠鏡の基本構成として、本節ではケプラー式とガリレイ式を紹介する。

ケプラー式望遠鏡 ケプラー式望遠鏡は、凸レンズを2枚組み合わせて構成される望遠鏡である。前節でレンズの結像について説明したので、望遠鏡の原理図を示すことは容易である。ケプラー式望遠鏡の動作原理を簡単に述べると、無限遠から到来する平行光線を、凸レンズ2枚を利用して曲げることによって像を拡大する。

簡単のため、対象物は望遠鏡の大きさに比べ十分遠方であり、対象物から平行光線が到来すると仮定する。望遠鏡は対物レンズと接眼レンズを1枚ずつ組み合わせた構造とする。対物レンズと接眼レンズの焦点距離を、それぞれ、 f_1 と f_2 とする。前節での結果を利用すると、対物レンズを通過した平行光線は距離 f_1 で結像し、それ以降は拡散していく。その拡散していく光線を接眼レンズで屈折させ、平行光線に変換するのだ。図 15 に示すように、結像点から f_2 の距離に接眼レンズを配置すれば接眼レンズを透過した光は平行光線となる。つまり、対物レンズと接眼レンズの距離は $f_1 + f_2$ である。変換された平行光線を、

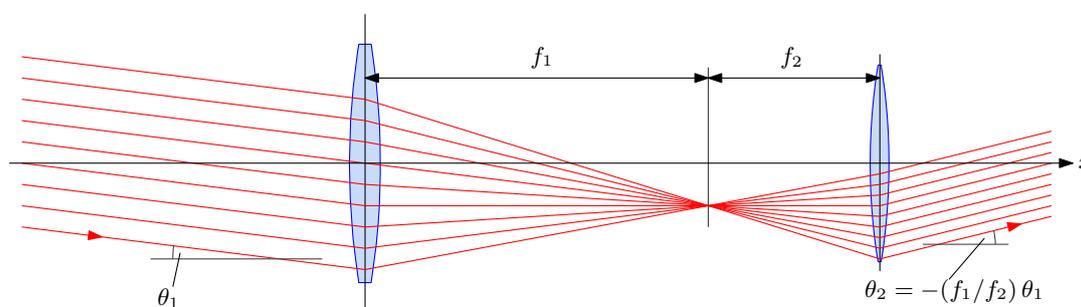


図 15: ケプラー式望遠鏡の原理

人の目で見れば、眼球によって平行光線が網膜で結像し、無限遠の物体として認識されるのだ。図に描いたように、二つのレンズによって平行光線の到来方向は、 $\theta_2 = -(f_1/f_2) \theta_1$ のように変換される。その到来方向の変換によって、対象物の見かけの位置が変化し、像が拡大して見えるのだ。ただし、 θ_2 は本来の到来方向 θ_1 に対して符号反転しているため、観測される像は上下左右が反転して見える。

前節で学んだように、光線が結像される位置は、レンズの中央を通る光線の経路上に存在する。レンズが十分に薄ければ、その中央を通る光線は屈折の影響を受けず、ほぼ一直線上を伝搬する。その知識を活用すると、対物レンズを透過する前に θ_1 の到来方向は、接眼レンズを透過すると $-(f_1/f_2) \theta_1$ の方向に伝搬することがわかる。つまり、2倍のレンズを透過すると、視角が f_1/f_2 倍に変化し、像が反転していることになる。その視角の変化率 f_1/f_2 が望遠鏡の拡大率(倍率)となる。例えば、焦点距離 800 mm の対物レンズと焦点距離 8 mm の接眼レンズを組み合わせた望遠鏡は拡大率 100 倍の望遠鏡となる。

対象物が近くに存在する場合、対物レンズに到来する光は平行光線でなく、拡散光線である。その場合、対物レンズを通過した後に集結する位置は、焦点距離よりも奥になる。その距離の延長に相当する量だけ対物レンズの位置を変えなければ接眼レンズを透過した光を平行光線にはできない。そのように接眼レンズの距離を調整する操作がピント調節の操作である。

ガリレイ式望遠鏡 ガリレイ式望遠鏡は、接眼レンズに凹レンズを用いた望遠鏡である。このタイプの望遠鏡は、ガリレイが発明し、木星の衛星観測に用いた。望遠鏡の原理としては、ケプラー式と同様に、無限遠から到来する平行光線を異なる到来方向の平行光線に変換することである。

ガリレイ式望遠鏡は、図 16 に示すように、対物レンズが凸レンズ、接眼レンズが凹レンズである。接眼レンズは、対物レンズの焦点距離 f_1 より近い場所に配置する。その配置のため、接眼レンズの直前では、無限遠から到来する光線は収束途中である。それを凹レンズに

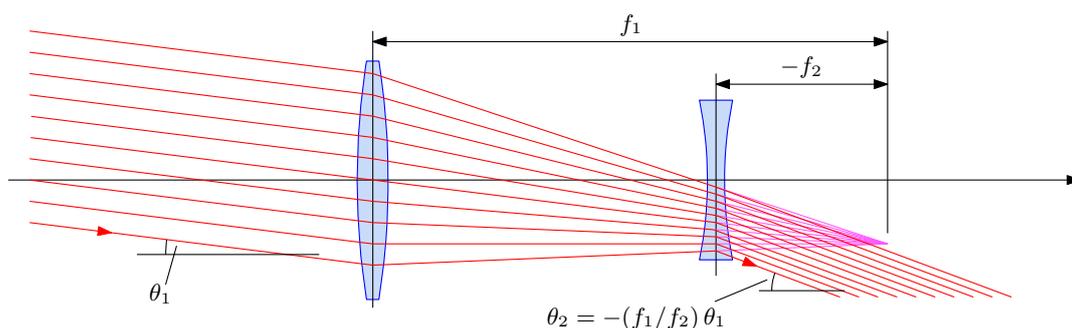


図 16: ガリレイ式望遠鏡の原理

よって平行光線に変換する。その効果として、無限遠からの到来方向 θ_1 が $\theta_2 = -(f_1/f_2) \theta_1$ に変換される。凹レンズの焦点距離は負 ($f_2 < 0$) なので、変換された到来方向 θ_2 は、 θ_1 と同符号である。したがって、ガリレイ式望遠鏡では反転されない正立像が観測される。

ガリレイ式望遠鏡は、正立像が観測されるにも関わらず、双眼鏡など地上用の小型望遠鏡でしか利用されない。屈折式の天体望遠鏡は、ほぼすべてがケプラー式である。ガリレイ式が好まれないのは、視野が狭く、倍率を高くできないことが理由だ。その事実を図 17 を用いて説明する。図には、(a) ケプラー式と、(b) ガリレイ式を描いている。レンズ 1 (L_1) とレンズ 2 (L_2) を通過した光が、観測用の小さな窓 (観測窓) を通して観測できるよう、望遠鏡がつくられているとする。ケプラー式の場合、図のように斜め上から到来する光は、 L_1 によって x 軸より下で結像するが、 L_2 によって再び屈折し、 x 軸と交わる。簡単な計算で導出できるが、 L_2 から光の進行方向に測った距離で、

$$x = \frac{(f_1 + f_2) f_2}{f_1},$$

の位置を、必ず、 L_1 の中心を透過した光が通過する。すなわち、その位置に観測窓を設ければ、様々な角度から到来する光を観測できる。また、 L_1 を通過する光をすべて通過させるだけの観測窓の直径も理論的に計算できるので、ケプラー式では効率よく光を観測することが可能である。

一方、ガリレイ式望遠鏡では観測窓の設定が難しい。ケプラー式と同様、 L_1 を通過すると、光線は x 軸から遠ざかる。ケプラー式では L_2 が遠ざかった光線を x 軸に引き戻していたのだが、ガリレイ式では L_2 がさらに光線を x 軸からさらに引き離すのだ。そのため、ガリレイ式では光線が x 軸から遠く離れないうちに観測窓を設ける。つまり、 L_1 から観測

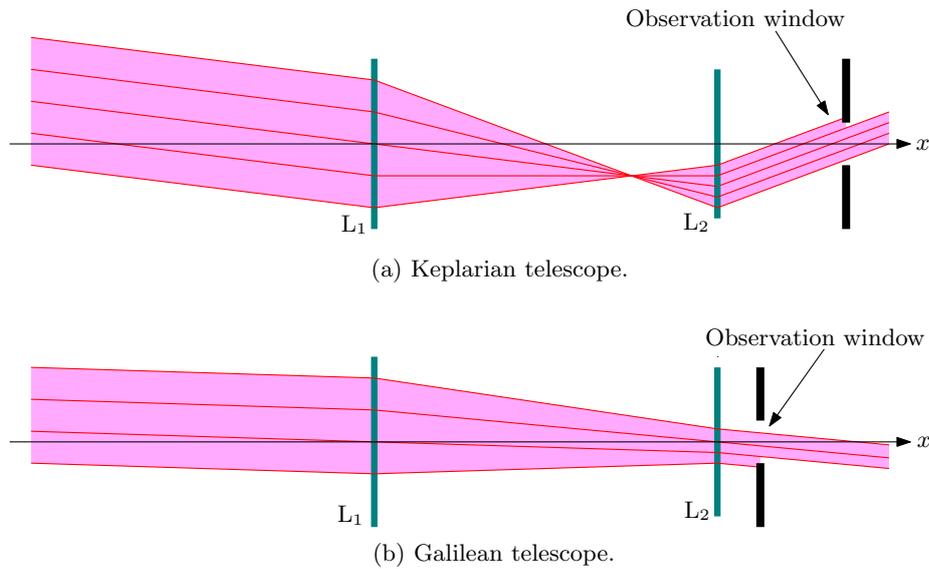


図 17: ケプラー式とガリレイ式の視野の違い

窓までをあまり遠くにできない。そのため、レンズ間の距離を大きくできないので、視野が狭く、倍率を高くできないのだ。図 17 (b) に示すように、 L_1 の中心を通過した光が観測窓の中心から大きく外れた位置を通るため、レンズ L_1 の開口が活かさない。つまり、ガリレイ式望遠鏡では、中心からずれると観測窓を通過できる光が減少し、像が暗くなる。さらに、開口を有効活用できないので、観測できる角度の分解能が劣化するのだ。そのような理由で、天体望遠鏡ではガリレイ式が好まれず、双眼鏡のように地上専用の低倍率の用途に限られる。

3 分解能

収差がない理想的なレンズがあったとしても、凸レンズによって集められた光は厳密に 1 点に集結することではなく、ある程度の広がりをもつ領域に集められる。その領域の大きさはスポット径と呼ばれる。スポット径があるため、顕微鏡や望遠鏡の倍率を上げたとしても鮮明さが無限に向上するわけではない。

3.1 スポット径

光が波であることを利用し、波動関数を重ね合わせることによってスポット径を評価しよう。波動関数の重ね合わせる考えはホイヘンスの原理に基づく。また、結像位置では、レンズを透過してきた光が同位相で重なる事実を利用する。ここで想定するレンズは収差がない理想的なレンズである。その意味で、レンズを透過した光は、結像位置で厳密に同位相で重なるのだ。

半径 R のレンズを中心が x 軸と一致するように配置する。計算を簡単に実行するため、いささか特殊な座標設定をする。レンズを透過した光は原点 O で結像するように座標を設定する。図 18 示すように、原点 O からレンズの外周まで距離を l 、レンズ中心と外周を見込む視角を α とする。このとき、結像点の近傍 $P [0, 0, \rho]$ における光の波動関数を計算する。レンズは x 軸について対称であるので、観測点の位置 P が z 軸上であっても一般性を損なわない。観測点 P で観測される波動関数は、ホイヘンスの原理に基づき、開口に含

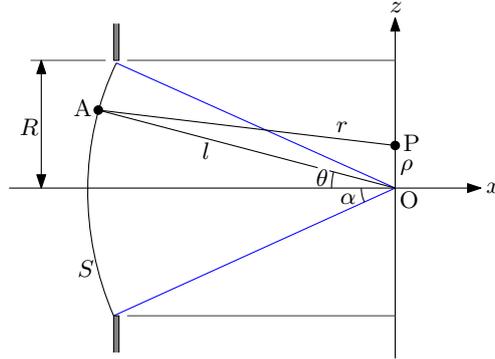


図 18: 結像点近傍の波動関数を特定するための設定

まれるあらゆる点を波源とする電場の重ね合わせと考えられる。ここで、開口は平面でなく、図 18 に示す球面 S を考えると便利である。そのように考えると、開口上のあらゆる点から、同位相で電磁波が放射されると考えればよいので、数式の導出が簡単になる。

開口上の点 A から観測点 P へ伝搬する電磁波の波動方程式を考えよう。カルテシアン座標における点 A の座標を $[-\xi, \eta, \zeta]$ とおいて、点 P での波動関数の位相を考察する目的で距離 $r = \overline{AP}$ を計算すると、

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - \rho)^2} \\ &= \sqrt{l^2 + \rho^2 - 2l\rho \sin \theta \sin \varphi}, \end{aligned}$$

が得られる。ここで、 θ は線分 OA と x 軸がなす角度であり、 φ は yz 平面において、 x 軸周りに y 軸から右ねじの方向に測った角度である。すなわち、

$$x = l \cos \theta, \quad y = l \sin \theta \cos \varphi, \quad z = l \sin \theta \sin \varphi,$$

である。観測点 P が O の近傍 ($\rho \ll l$) であるとする、距離 r は、

$$r \simeq l + \frac{\rho^2}{2l} - \rho \sin \theta \sin \varphi,$$

のように近似できる。つまり、電磁波の波数を k とすると、点 A から放射された電磁波は点 P では

$$e^{ik(l+\rho^2/2l)} \cdot e^{-ik\rho \sin \theta \sin \varphi},$$

なる因数をもっていることになる。

続いて、点 A から放射される電磁波の波動関数の振幅について考察しよう。放射源は大きさをもたない点ではなく、原点から見込んだ微小立体角 $d\Omega$ であるとする。遠方から到来する電磁波によって $d\Omega$ を貫く電束が放射の強さであると仮定しよう。無限遠から到来する電束は一様であると仮定し、その電束密度を \hat{D}_0 とする。立体角 $d\Omega$ の法線ベクトルが x 軸と角度 θ をなしていることから、原点から距離 l において立体角 $d\Omega$ を貫く電束は、 $D_0 l^2 \cos \theta d\Omega$ である。この電束が点 A における波源の強さであるので、点 A からの放射される電磁波を点 P で観測した際の波動関数の振幅は、 $D_0 l \cos \theta d\Omega / 4\pi\epsilon_0$ である。電束密度 D_0 が任意であるので、点 P における波動関数の振幅を $E_0 \cos \theta d\Omega$ とおいてもよい。したがって、点 P で観測される波動関数は、

$$E(\rho) = E_0 e^{ik(l+\rho^2/2l)} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} e^{-ik\rho \sin \theta \sin \varphi} \sin \theta \cos \theta d\varphi d\theta,$$

のように書くことができる。この積分を実行するにあたり、ベッセル関数の積分表示:

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ix \sin \varphi} d\varphi,$$

に注意すると、点 P における波動関数は、

$$E(\rho) = 2\pi e^{ik(l+\rho^2/2l)} E_0 \int_0^\alpha J_0(k\rho \sin \theta) \sin \theta \cos \theta d\theta,$$

のようにベッセル関数を含む式に変形される。ここで、 $\xi \equiv \sin \theta$ なる置き換えを適用すると、観測される波動関数は、

$$\begin{aligned} E(\rho) &= 2\pi E_0 e^{ik(l+\rho^2/2l)} \int_0^{\sin \alpha} J_0(k\rho\xi) \xi d\xi \\ &= \frac{2\pi E_0}{k\rho} e^{ik(l+\rho^2/2l)} \left[J_1(k\rho\xi) \right]_0^{\sin \alpha} = \frac{\lambda E_0}{\rho} e^{ik(l+\rho^2/2l)} J_1\left(\frac{2\pi\rho}{\lambda} \sin \alpha\right), \end{aligned}$$

のように数式変形できる。なお、第 2 行目への数式変形にはベッセル関数の漸化式:

$$x^n J_{n-1}(x) \frac{d}{dx} x^n J_n(x),$$

を利用した。さらに、右辺を得るため、波数が $k = 2\pi/\lambda$ であることから λ に関する式に書き換えた。改めて結果を書くと、

$$E(\rho) = \frac{\lambda E_0}{\rho} e^{ik(l+\rho^2/2l)} J_1\left(\frac{2\pi\rho}{\lambda} \sin \alpha\right), \quad (23)$$

となる。第 1 種ベッセル関数 $J_1(x)$ の零点は $x = 3.8317$ であり、最大値から零点に対応する半径 r までがレンズによって集められたスポットの半径 (スポット径) であると考えると、スポット径 δ は、

$$\delta = \frac{0.6098\lambda}{\sin \alpha}, \quad (24)$$

で与えられる。この結果によると、収差がない理想的なレンズであっても、レンズで集められた光は厳密に一転に収束することはない。レンズで集められた光は、波長と同程度の半径にわたって分散しているのだ。スポット径は、レンズを用いた装置で識別できる大きさの限界を与える。どんなに倍率を上げても、二つの物体の距離がスポット径 δ より小さい場合、その二つの像を分解することができないのだ。

3.2 角度分解能

スポット径は、望遠鏡のような遠くを観測する機器の分解能を規定する。望遠鏡の場合、どれくらいの角度まで分解できるかを表すため、角度分解能という指標を用いる。

角度分解能は、前項で算出したスポット径から得ることができる。スポット径の数式(24)の分母と分子に観測点とレンズまでの距離 L を乗じると、

$$\delta = \frac{0.6098\lambda L}{L \sin \theta_m} = \frac{0.6098\lambda L}{R} = \frac{1.2197\lambda L}{D},$$

が得られる。ここで、 $R (= L \sin \theta_m)$ はレンズの半径、 D はその2倍、すなわち、レンズの直径である。この数式の両辺に $1/L$ を乗じて得られた量:

$$\Delta\theta = \frac{1.2197\lambda}{D}, \quad (25)$$

が角度分解能である。この角度分解能は、レンズ中心からスポット径を見込んだ角度である。すなわち、この角度より隔たりが小さい二つの物体は、結像した光が互いのスポット径の範囲内で重なるため、分解ができないのである。