

第2章 慣性系から見た運動

既に見てきたように、相対性理論によると運動する物体の長さが縮み、時計が遅れる現象が観測される。その現象は、相対速度をもつ他の慣性系では長さや時間の尺度が異なるからである。そのように考えると、速度や加速度も我々が日常的に体験しているものも速度が小さいときにしか成り立たない近似であると推測できる。

2.1 速度・加速度変換

日常生活でわれわれが目にする速度の範囲では、60 km/h で走行する自動車から 40 km/h で走行する対向車を見ると、その対向車が 100 km/h で走行しているように感じる。そのような光速に比べて非常に小さな速度範囲内では、速度の加法則は単純な加算である。しかし、前章で学んだように、互いに相対速度をもつ二つの慣性系では長さや時間の尺度が異なるため、速度の加法則は単純な加算にはならない。その極端な例が光の速度である。光は約 30 万 km/s で伝播する。光源に 10 万 km/s で接近する観測者がその光の速度を計測すると、40 万 km/s とはならず、光速不変の原理のため、やはり 30 万 km/s となる。

相対性理論における速度の合成則を求めるため、座標 x と t の微小変化 dx と dt のローレンツ変換を調べてみる。当然、それらの微小変化も、

$$dx' = \frac{dx - v dt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad dt' = \frac{dt - v dx/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

なる変換にしたがうはずである。この微小変化に対する変換よりただちに、

$$\frac{dx'}{dt'} = \left(\frac{dx}{dt} - v \right) \left(1 + \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt} \right)^{-1},$$

が得られる。言うまでもなく、 dx/dt が K 系から見た速度の x 成分、 dx'/dt' が K' 系から見た速度の x 成分である。速度の y 成分と z 成分についても、同様にローレンツ変換から導くことができる。もう少しわかりやすく、K 系から見た速度成分を $[u_x, u_y, u_z]$ 、K' 系から見た速度成分を $[u'_x, u'_y, u'_z]$ と書くと、速度の変換則は、

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - vu_x/c^2}, \quad u'_y = \frac{u_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - vu_x/c^2}, \quad u'_z = \frac{u_z \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - vu_x/c^2},$$

となる。つまり、この式が特殊相対性理論における速度の加法則である。この速度の加法則の計算例を表 2.1 に示す。この例では、 $u_y = u_z = 0$ としている。非相対論では、速度の合成結果は行と列の速度の和になるはずである。この表では、 v と u_x が光速 c よりも十分小さいときには非相対論の合成結果に近い値となるが、速度が大きくなると非相対論の結果よりも小さくなる。しかも、速度合成結果は決して光速 c より大きくなることはない。特に、 $u_x = c$ であれば v に関わらず速度合成結果は c に等しくなる。それは、どの観測者から見ても光速が一定であるという、いわゆる光速不変の原理を表している。

表 2.1: 速度の合成結果 ($u_y = u_z = 0$)

$-v \setminus u_x$	$0.10c$	$0.25c$	$0.50c$	$0.75c$	$1.00c$
$0.00c$	$0.10c$	$0.25c$	$0.50c$	$0.75c$	$1.00c$
$0.10c$	$0.20c$	$0.34c$	$0.57c$	$0.79c$	$1.00c$
$0.30c$	$0.39c$	$0.51c$	$0.70c$	$0.86c$	$1.00c$
$0.60c$	$0.66c$	$0.74c$	$0.85c$	$0.93c$	$1.00c$

同様に、速度の変換式を微分すれば加速度に関する変換式が得られるはずである。簡単のため、 x 軸に平行な運動 ($u_y = u_z = 0$) に限定して、速度変換則を微分すると、

$$a'_x = \frac{(1 - \beta^2)^{3/2}}{(1 - v u_x / c^2)^3} a_x,$$

が得られる。ここで、 $a_x \equiv du_x/dt$ は K 系から観測した x 軸方向の加速度、 $a'_x \equiv du'_x/dt'$ は K' 系から観測した x' 軸方向の加速度である。特殊なケースとして、対象となる物体が K' 系に対して静止している瞬間 (すなわち、 $u_x = v$ となる瞬間) の加速度は、 $a_x = (1 - \beta^2)^{3/2} a'_x$ のように変換される。つまり、運動する物体の加速度は、その物体自身が感じる加速度よりも小さくなる。しかも、その速度 v が光速 c に近づくほど、加速度はゼロに近づく。言い換えると、大きな速度で運動する物体は加速しづらい、すなわち、質量が大きくなるのである。

2.2 光のドップラ効果

マクスウェルの方程式から導かれるように、光は電磁波である。光 (電磁波) も音と同様に、観測者から見てゼロでない相対速度で運動する光源から発射されれば異なる周波数が観測される。このように、光源と観測者の相対速度によって周波数が異なる現象をドップラ効果と呼ぶ。非相対性理論では、光源の運動によって、伝播する波の波面間の距離 (波長)

が異なることがドップラ効果の要因であると説明されてきた。ところが、相対性理論はそれだけでなく、光源と観測者の時間の尺度が異なることもドップラ効果の要因である。

電磁波は局所的に見れば $\mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}$ のような平面波と考えてよい。ここで、 \mathbf{E}_0 は電磁波の振幅と振動方向を表すベクトル、 ω は光の角周波数、 \mathbf{k} は波数ベクトルである。波数ベクトルは光波の伝播方向を向き、大きさ $k \equiv |\mathbf{k}|$ が $k = \omega/c$ の関係を満たす。ここで、波動関数 $e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}$ の位相 (ϕ とおく) はカルテシアン座標系で、

$$\phi = \omega t - (k_x x + k_y y + k_z z),$$

と書くことができる。この関係式より、

$$\omega = \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad k_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad k_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad k_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z},$$

なる関係が導かれる。光波の位相は観測者 (つまり座標系) によらず定数となると考えるのが自然である。波動関数の実部を観測する場合を考えると、その観測対象には最大値と最小値があり、ある観測者から見たときにその対象が最大値であれば、別の観測者から見てもその波動関数は最大値であるべきである。したがって、波動関数の位相は座標系に依存せず定数になる¹と考えられるのである。K系に対して x 軸方向に β の速度比で運動する K'系から観測した角周波数 $\omega' \equiv d\phi'/dt'$ は、

$$\begin{aligned} \omega' &= \frac{\partial \phi}{\partial t'} = \frac{\partial x}{\partial t'} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial t'} \frac{\partial \phi}{\partial t} \\ &= \frac{-\beta c k_x + \omega}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1 - \beta \cos \theta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \omega, \end{aligned} \quad (2.1)$$

のように計算される。ここで、光波の伝播方向 (波数ベクトル) と x 軸のなす角を θ とした。この式は、K'系で観測した周波数を表しているが、光波の伝播方向がK系で観測した角度になっている。これを、K'で観測した到来方向 θ' を使って書くには、

$$\omega = \frac{1 + \beta \cos \theta'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \omega',$$

なる関係を使えばよい。この関係式は、変換式 (??) を ω について解くか、 β を $-\beta$ に置き換え、K系とK'系の物理量を入れ替えれば得られる。新たに導かれた変換式を ω' について解くと、

$$\omega' = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \beta \cos \theta'} \omega, \quad (2.2)$$

が得られる。この関係式も、 $c \rightarrow \infty$ の極限で非相対性理論のドップラ効果と一致する。特別な場合として、前方から到来する光を想定して、 $\theta' = \pi$ を (??) に代入すると、

$$\omega' |_{\theta'=\pi} = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \omega,$$

¹実は、位相が座標系に依存しないことは、電磁場のローレンツ変換から必然的に導かれる。

が得られる。この結果は、非相対論的な極限 $c \rightarrow \infty$ において、 $\omega'|_{\theta'=\pi} \simeq (1 + v/c)\omega$ となる。この近似式はニュートン力学における光のドップラ効果と一致する。この場合の ω から ω' への増分 $(v/c) \cdot \omega$ はドップラ周波数と呼ばれる。電磁波のドップラ効果はスピードガンに應用されているように、自動車の速度は光速の 1000 万分の 1 程度の速度であるが、10 GHz のマイクロ波を使えばドップラ周波数は 1 kHz 程度となり、十分に検出できる周波数である。対象物の速度が光速と比較できるくらい大きくなると、ドップラ周波数はもはや速度 v に比例しなくなる。

もう一つの特別な場合として、側方から到来する光を考えよう。ドップラ周波数の式 (??) に $\theta' = \pi/2$ を代入すると、

$$\omega'|_{\theta'=\pi/2} = \sqrt{1 - \beta^2} \omega,$$

が得られる。非相対性理論では、側方から到来する光にはドップラ効果が発生しないのだが、相対性理論では側方から到来する光の周波数は $\sqrt{1 - \beta^2}$ 倍される (周波数が小さくなる)。これは横ドップラ効果と呼ばれる相対論的な現象である。横ドップラ効果は、相対速度によって光源の時計がゆっくり進むことに起因して現れる現象である。

周波数の変化だけでなく、光源の相対速度から、光の到来方向が異なって見える光行差という現象が現れる。波数ベクトルの x 成分も、先ほどと同様に計算でき、

$$k'_x = \frac{k_x - \beta\omega/c}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

となる。この変換式について、 $k'_x = k' \cos \theta'$ とおいて (??) を利用すると、

$$\cos \theta' = \frac{\cos \theta - \beta}{1 - \beta \cos \theta}, \quad (2.3)$$

なる関係が得られる。この光行差の関係式から、 $\beta > 0$ であれば $\cos \theta' \leq \cos \theta$ となることが容易に導かれる。等号が成り立つのは、 $\theta = 0, \pi$ のときである。なお、前方から到来する光ほど $\cos \theta'$ が -1 に近いため、 $\beta > 0$ の速度比で運動する観測者には、光の到来方向が前方に集中して見えることを意味している。ここで導出したドップラ効果を示す例として、周囲光の波長の変化を図??に示す。この図は、観測者の周囲から波長 500 nm の光を照射した場合を想定している。図に示す三角形は、観測者がその場所に右を向いていることを表している。照射された周囲光は、エメラルドグリーンの可視光である。観測者が光源に対して静止している場合には、当然ながら、周囲から波長 500 nm の光が到来する。光速の 40% で運動する観測者によると、前方から後方へ向かって、紫色から赤色まで可視光全体が到来する。しかも、図?? (b) に描かれた星の配置から、景色が前方に集まる光行差の傾向が見えていることも確認できる。当然ながら、観測者の速度が大きくなると、周波数の偏移も光行差も著しくなる。

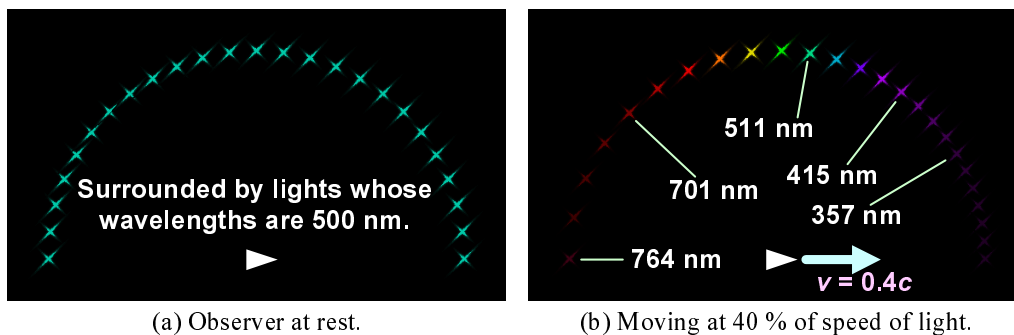


図 2.1: ドップラ効果による周囲光の波長の変化

2.3 等加速度運動

特殊相対性理論は、本来、2つの慣性系間の関係を記述するための理論であるが、慣性系から加速度運動をする物体を観測した場合に拡張してもよい。なぜなら、加速度運動する物体の速度も、ある微小時間内の速度はほぼ一定であると考えられるからである。その考えを発展させると、加速度運動する物体の速度は、近似的に、図??のような階段状の変化をしてみると考えてもよいのではないか。階段状関数のうち、速度が一定な微小時間内に対して特殊相対性理論を適用し、次の微小時間内に対しても個別に特殊相対性理論を適用する。そのように特殊相対性理論を適用した微小時間をつなぎ合わせれば、特殊相対性理論で加速度運動をする物体を記述できると考えるのだ。

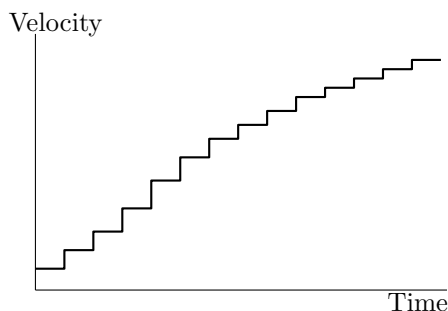


図 2.2: 階段状関数で近似した速度

加速度運動を特殊相対性理論で記述できるのは、上で述べたように、慣性系から観測する場合に限られる。それとは逆に、観測者が加速度運動する場合には、特殊相対性理論で議論することができない。なぜなら、加速度運動をすると、急ブレーキをかけた自動車では体感するような慣性力が観測者に作用するからである。慣性力は、その座標系の加速度に起因するので、慣性力が作用する系ではもはや座標系間での相対性が成立せず、特殊相対性理論の取り扱い範囲を超えるのである。

それでは、K'系が x' 軸方向に加速度 a をもっている場合を考えよう。この場合、前節で導出した加速度の変換式に対して、 $u_x = v$, $a'_x = a$ とすればよい。その場合の加速度変換について、 $a_x = d^2x/dt^2$, $a'_x = d^2x'/dt'^2$ と置き換えれば、

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \right]^{3/2} a,$$

を得る。この微分方程式を解けば、

$$\frac{dx}{dt} = \frac{a(t + t_0)}{\sqrt{1 + a^2(t + t_0)^2/c^2}}, \quad (2.4)$$

$$x = \frac{c^2}{a} \left[\sqrt{1 + \frac{a^2(t + t_0)^2}{c^2}} - \sqrt{1 + \frac{a^2 t_0^2}{c^2}} \right] + x_0, \quad (2.5)$$

が得られる。これが、相対論的な等加速度運動の速度と変位の数式表現であり、ニュートン力学における $dx/dt = v_0 + at$, $x = at^2/2 + v_0 t + x_0$ に対応する式である。実際に、(??) と (??) について $c \rightarrow \infty$ の極限をとれば、ニュートン力学における速度と変位の式と一致するはずである。ここで、 $t = 0$ のとき、 $x = x_0$, $dx/dt = v_0$ であるとする。このとき、積分定数 t_0 は、

$$at_0 = \frac{v_0}{\sqrt{1 - \beta_0^2}},$$

を満たす。積分定数 t_0 の物理的な意味は、対象とする物体の速度がゼロとなる時刻 ($= -t_0$) を与えていると解釈すればよい。ここで、 $\beta_0 \equiv v_0/c$ とおいた。

面白いことに、変位を表す数式(??)から、次のようにして、有名な相対論的効果 $E = mc^2$ を確認することができる。静止質量 m の物体が、加速度 a で等加速度運動するには、その物体に ma の力が作用し続けている。証明は省略するが、運動方向に作用する力はどの慣性系から見ても一定であるので、K系から見てもその物体には ma の力が作用し続けている。初期条件として、 $t = 0$ のときに $x = 0$, $dx/dt = 0$ である条件を設けると、運動エネルギーは $E_k = max$ となる。さて、上の式を用いて運動エネルギーを計算してみると、

$$mc^2 + E_k = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

を得る。ここで、 $v \equiv dx/dt$ とした。この結果は次のように解釈すればよい。左辺は、静止時に潜在的にもっているエネルギー mc^2 に運動エネルギー E_k が加算された量である。右辺は、加算された運動エネルギーが質量に変換され、その物体の質量が $m/\sqrt{1 - \beta^2}$ に変化したことを意味している。

2.4 事象の地平面

事象の地平面という、ブラックホール理論で現れる情報伝達が不可能な領域への境界面を想像するだろう。本節で説明するように、加速度運動においても、情報伝達が不可能な領域が現れる。その領域への境界線が事象の地平面となるわけである。

等加速度運動をする物体の変位 (??) に関して、変位 x と時刻 t の幾何学的関係を調べてみよう。簡単のため、ここでも、 $t = 0$ において $x = 0$, $dx/dt = 0$ であるとする。すると、

$$\frac{a^2}{c^4} \left(x + \frac{c^2}{a} \right)^2 - \frac{a^2 t^2}{c^2} = 1, \quad (2.6)$$

なる関係を得る。等加速運動をする物体について変位 x と時刻 t の関係を描くとニュートン力学では放物線となるのだが、特殊相対性理論では双曲線となるのである。その双曲線は、図??に示すように、直線 $x = ct - c^2/a$ を漸近線とする。その双曲線が意味する一つは、永久に加速を続けたとしても、速度が限りなく光速 c に近づくだけであって、決して光速を超えないということである。もう一つは、加速度 a で等加速度運動する物体の背後 c^2/a から光で追かけても、決してその物体に追いつけないということである。言い換えると、 $x = -c^2/a$ という壁を境にして、等加速度運動する物体に情報伝達ができない領域があることを意味する。これは、ブラックホール理論における事象の地表面と類似している。

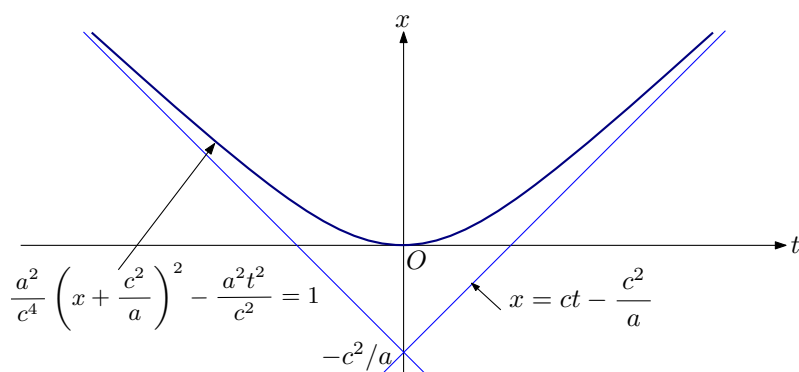


図 2.3: 等加速度運動をする物体の変位

等加速度運動における事象の地平面となる座標 $x = -c^2/a$ は、宇宙空間のスケールではそれほど大きな値ではない。例えば、加速度を $a = 9.5 \text{ m/s}^2$ とすれば、 $x = -c^2/a$ は 1 光年後方の位置に相当する。すなわち、 9.5 m/s^2 で加速度運動する観測者に 1 光年以上の後方から情報を伝達することは不可能である。

後方から情報の伝達が不可能であると書くと大きな誤解を生む可能性があるので補足しておく。夜空に輝く恒星は最も近い星でも 4.3 光年もの距離があるので、加速する自動車

に乗って背後の星空を見ると星がなくなっているのか？ それは大きな誤解²である。確かに、加速度運動をしていると上記のような事象の地平面が生じることは事実である。しかし、夜空に輝く星は、我々が加速度運動を開始しようとするより、ずいぶん前から輝いていて、すでに近くまで到達している光がある。図??のように、加速度運動を開始する時点で、図中の光線 A と B のように事象の地平面より近くに来ている光は観測者に追いつくことができる。しかし、光線 C と D のように事象の地平面のかなたにある光は観測者に追いつくことができない。

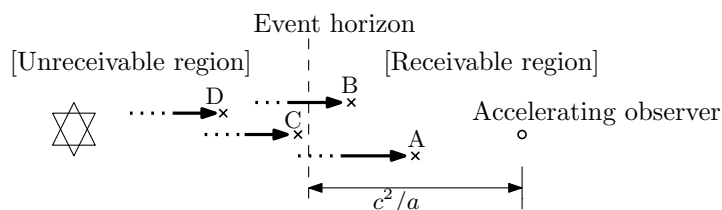


図 2.4: 加速度運動における事象の地平面

後方から加速度運動する観測者を追いかける光のうち、観測者に追いつくことができるのは限られた光ということになる。ブラックホール理論と同様であるが、事象の地平面の近傍にいた光は観測者に追いつくまで長い時間を要することになるので、観測者から見ると、後方から追いついてくる光は徐々に少なくなっていく。つまり、一定方向の加速を続ける限り、後方の視界は徐々に暗くなっていく。とはいえ、そのような状況を認識できるのは加速度運動を何年も持続していた場合の話である。

2.5 固有時間

相対性理論では時間があらゆる観測者にとっての共通の尺度ではなくなっている。そのため、時間を議論するには、どの観測者の時計で計測した時間かという情報が必要である。言い換えると、時間は空間座標と同様に、観測者ごとに固有の情報である。その意味で、観測者ごとに固有な時間は固有時間と呼ばれる。

ある慣性系から物体 A を観測したとしよう。観測者の時計で時刻 t のとき、物体 A が座標 $[x, y, z]$ に存在していたとする。慣性系はミンコフスキー時空とも呼ばれ、前章で述べたように、物体 A の時空間の座標に関して、

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2, \quad (2.7)$$

²筆者はかつて (??) を導出した際に、そのような誤解をもち、その不自然さに考え込んでしまった。

なる微小量がローレンツ変換に対して不変となる。つまり、この微小量はいかなる慣性系と併走する観測者が見ても同一の物理量になるということである。

上に示した微小量で定義されるパラメータ s は長さの次元をもっている。その代わりに、 $ds^2 \equiv -c^2 d\tau^2$ によって定義される新たなパラメータは時間の次元をもっている。新たなパラメータ τ の物理的な意味を調べてみよう。上で述べたように、 τ は、

$$c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2,$$

のように定義されている。観測者が見た物体 A の速度を v とするならば、 $dx^2 + dy^2 + dz^2 = v^2 dt^2$ が成立するので、上の定義式は、

$$d\tau = \sqrt{1 - \beta^2} dt,$$

のように変形できる。ただし、 $\beta \equiv v/c$ である。この式は、座標系に対して速さ v で運動する物体 A に固定された時計の遅れを表している。また、この式を積分して、

$$\tau(B) - \tau(A) = \int_A^B \sqrt{1 - \beta^2} dt,$$

と書くと、 τ は物体 A に固定された時計の読みを表している。上で述べたように $d\tau$ はローレンツ変換に対して不変な値であるので、別の座標系 (例えば K' 系) から見ても τ の値は不変である。よって、 τ は観測対象の物体の固有時間を与えると解釈できるのである。

等加速度運動する時計 (固有時間) を静止系から見るとどうなるだろうか。運動方向を x 軸方向に制限すれば、 $v = dx/dt$ となる。この式に (??) を代入すると、

$$\frac{d\tau}{dt} = \left[1 + \frac{a^2(t + t_0)^2}{c^2} \right]^{-1/2}, \quad (2.8)$$

なる微分方程式を得る。両辺を積分し、 $t = 0$ のときに $\tau = 0$ となるように積分定数を選ぶと、固有時間は、

$$\tau = \frac{c}{a} \left[\operatorname{arsinh} \frac{a(t + t_0)}{c} - \operatorname{arsinh} \frac{at_0}{c} \right], \quad (2.9)$$

で与えられることがわかる。例として、 $t = 0$ における速度を $dx/dt = 0$ とした場合の τ をグラフにしてみると、図??のようになる。グラフから読みとれるように、速度が小さいうちはグラフの傾きは 1 であるが、速度が大きくなるにつれて時計の遅れが顕著になり、グラフの傾きが小さくなる。

等加速度運動を何年間も持続できるのであれば、その速度を限りなく光速に近づけることができ、静止系から見た時計はほとんど止まっているように見えるだろう。

では、その逆はどうであろうか。加速する観測者から見た場合、外の世界は急速に時間が経過しているのであるだろうか? それとも、逆に静止系が運動しているかのように見えるた

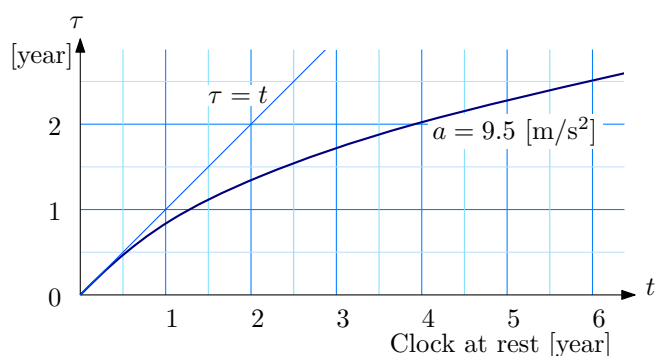


図 2.5: 静止系から見た加速する時計の読み

め、加速する観測者から見た静止系の時計は、やはり遅く進むのであろうか？ この問題は、まさに双子のパラドックスである。この問題に対しては特殊相対性理論だけで説明するには少しばかり無理がある。次章では一般相対性理論を適用して加速する観測者から見た世界について議論する。

2.6 ミンコフスキー時空

慣性系から観測した時間 t と空間 $[x, y, z]$ は、ミンコフスキー時空と呼ばれ、面白い幾何学的な性質が成立する。時空とは時間と空間を個別ではなく、一つの座標として取り扱うための座標系である。

ニュートン力学では、いかなる観測者から見ても共通の物理量だったので、空間座標とは区別していた。それに対し、相対性理論では時間も空間座標と同様、値も尺度も異なる量に変換され得るため、時間を座標軸の一つとして取り扱うことが自然である。習慣として、時間はゼロ番目の座標成分とし、 $[x^0, x^1, x^2, x^3] \equiv [ct, x, y, z]$ とする³のである。ここで、あえて時間に対応する成分に光速 c を乗じ、すべての座標成分が長さのディメンジョンをもつようにした。これらの座標成分に関するローレンツ変換を微分すると、

$$cdt' = \frac{cdt - \beta dx}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad dx' = \frac{dx - \beta \cdot cdt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad dy' = dy, \quad dz' = dz,$$

が得られる。これらの微小量を用いて、

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (2.10)$$

³他の章でも現れるが、座標成分を表す添え字は相対性理論では（正確に言うとリーマン幾何学では）、習慣的に右上に書く。べき乗を表す指数と紛らわしいので慣れないうちは注意が必要である。

なる微小量 ds を定義しよう。この新たな微小量は時空の線素と呼ばれる。この線素に対してローレンツ変換を適応すると、

$$-c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = -c^2 dt'^2 + dx'^2 + dy'^2 + dz'^2,$$

が成り立つことから、 $ds^2 = ds'^2$ である。すなわち、 ds はローレンツ変換に対して不変である。ローレンツ不変量 ds は、前章で紹介したミンコフスキー計量である。ローレンツ変換からミンコフスキー計量にたどり着いたことから、慣性系がミンコフスキー空間であることが検証できたのだ。とはいえ、前章で述べたように、ミンコフスキー計量は光速不変を示すのだから、アインシュタインが提唱した光速不変の原理にしたがう慣性系がミンコフスキー空間であることは当然である。

