

## 第4章 一般相対性理論

特殊相対性理論は慣性系にいる観測者、すなわち、等速度運動をする観測者が見た世界しか記述できない。特殊相対性理論は、その意味で特殊なのだ。一般の観測者から見た世界を記述するには加速度を取り扱う必要がある。加速度を取り扱う理論を構築する過程で、アインシュタインは加速度運動によって発生する慣性力が重力と等価であると主張する等価原理にたどり着いた。それゆえ、特殊相対性理論の発表から11年後の1916年に発表された一般相対性理論は、加速度に対応した運動理論というよりも、むしろ、重力理論として世界中に知られることになった。

### 4.1 等価原理

特殊相対性理論は慣性系から見た世界、すなわち、等速度で運動する観測者が見た世界しか記述できない。なぜなら、加速度運動する観測者には慣性力が作用するからである。慣性力は、その観測者の加速度に比例した力として作用するため、他の観測者との間に相対的な関係が成り立たないのである。

一般の観測者に対する運動理論のためには加速度を取り扱う必要がある。等速度運動は特殊な運動形態にすぎず、そのような運動形態をとる観測者にしか適用できなかった特殊相対性理論が「特殊」と呼ばれるのはそれが理由である。

アインシュタインの理論によると、加速度によって作用する慣性力は重力と等価である。その主張は等価原理と呼ばれる。かつて、ガリレイが落下の法則として示したように、重力は質量に関係なく、あらゆる物体に一定の加速度を与える。慣性力による見かけの加速度(急ブレーキをかけたバスの中でよろめくときの加速度)も質量には依存しない。重力加速度を  $g$ 、物体に作用する重力を  $f_g$  としたとき、 $f_g = m_g g$  によって定義される質量  $m_g$  は重力質量と呼ばれる。それに対して、加速度  $a$  によって物体に作用する慣性力を  $f_i$  としたとき、 $f_i = m_i a$  によって定義される質量  $m_i$  は慣性質量と呼ばれる。等価原理が成り立つならば  $m_g = m_i$  となるはずである。これに関して、1922年にエトヴェシュらが実験によって  $10^{-6}$  の精度で、1964年にロールらが実験によって  $10^{-11}$  の精度で重力質量と慣性質量が等しいことを検証した。

アインシュタインはエレベータの思考実験によって等価原理の発想にたどり着いた。エレベータが上方に加速するとき、慣性力のため体重が重くなったように感じ、下方に加速するときには体重が軽くなったように感じるだろう。極端な例として、エレベータのワイヤが切れ、エレベータが自由落下を始めると、乗っている人はエレベータと共に自由落下するので、エレベータの床から自分の体重による反作用力を感じることがないので無重力と同じ状態を感じる。

逆に、地球の重力圏の外(自由空間)にエレベータがあり、中に人が乗っているとすると。エレベータのワイヤを引っ張り、上方に加速すれば、慣性力によって乗っている人は自分の体重に応じた反作用力を床から受ける。つまり、無重力空間に存在するエレベータが加速度をもてば、重力場と等価な状態になる。そのエレベータの側壁に穴を開け、側方からエレベータ内部に光を照射した場合を考えよう。自由空間から見ると、図?? (a) のように光は直進するが、その間にエレベータは加速しながら上昇する。一方、加速するエレベータから見ると、光は図?? (b) のように下方に湾曲した軌跡を描く。また、エレベータの外の景色も加速しながら下方に移動するように見える。言い換えると、加速するエレベータから見ると、外の景色も光も、重力場を落下しているかのように見えるのではないか。

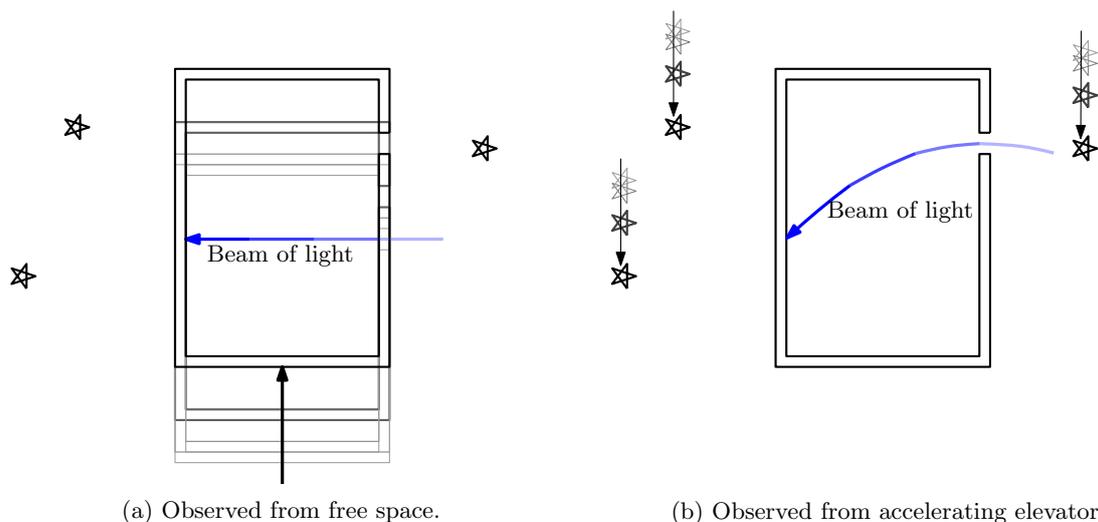


図 4.1: 加速するエレベータの思考実験

重力と慣性力が等価であり、それらの区別ができないのであれば、重力場に静止しているエレベータの側壁から入った光は、図?? (b) のように下方に湾曲するように見えるはずである。つまり、重力が光を引きつけて湾曲させるように見えるのである。つまり、この思考実験の主張は、光も一般の物体と同様に、重力によって引きつけられるということである。

加速度を含む運動を記述する理論は、加速度が重力と等価であるという原理から、重力

場の理論を作ることによって説明可能になる。先ほどの思考実験の光と同様に、自由粒子は重力場を湾曲した軌跡を描きながら落下する。しかし、自由粒子から見ると、無重力状態であり、等速度運動をしていると主張するだろう。つまり、自由粒子は自分が慣性系に存在し、直線的な軌跡を描くと思っている。一方、重力場に存在する観測者は、その自由粒子が湾曲した軌跡を描くのを観測している。アインシュタインの理論によると、重力場が空間を曲げてしまうので、本来直線的な運動も、重力場から見ると湾曲して見えるのである。したがって、重力場を記述するには曲がった空間を記述する数学が必要だとアインシュタインは考えた。その数学手法として、重力場を取り扱う一般相対性理論ではリーマン幾何学が用いられる。

ここから先では、一般相対性理論を扱うため、少しばかりリーマン幾何学を導入する。次の節で、リーマン幾何学を紹介しながら一般相対性理論を記述していく。

## 4.2 リーマン幾何学

本節では、一般相対性理論の数学的記述のための道具としてリーマン幾何学を紹介する。リーマン幾何学は曲がった空間を取り扱うための数学である。曲がった空間を取り扱うには、座標変換に対する数学量の取り扱いを厳密に数学表現することが大切であり、その数学形態が相対性理論の理解を容易にしてくれる。

### 4.2.1 座標と座標変換

座標系  $K$  における座標を  $x^\mu$  と書き、それを  $K'$  系に座標変換して得られる座標を  $x'^\mu$  と書く。ここで、右肩に付した文字  $\mu$  はベクトルの添え字である。リーマン幾何学では、座標成分を示す添え字を右肩に書くことが習慣になっている。また、ここでは相対性理論における記述のために限定し、取り扱う座標は4次元座標(時間1次元+空間3次元)である。

座標系  $K$  から別の座標系  $K'$  への座標変換が  $x'^\mu \equiv x'^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3)$  のような関数で与えられているとする。このとき、解析学の公式から、

$$dx'^\mu = \sum_{\nu=0}^3 \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu, \quad (4.1)$$

となることは明らかである。ところで、リーマン幾何学ではこのような総和を用いた数式が頻繁に登場する。そのような数式では、(??) で使用される  $\nu$  のようにペアになっている添え字について総和をとることが常である。つまり、ペアになっている添え字について

和をとるという約束をしていれば、総和記号  $\Sigma$  を省略して書いたとしても不都合は生じない。よって、リーマン幾何学では (??) は、

$$dx'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} dx^{\nu}, \quad (4.2)$$

のように記述される。この省略記法はアインシュタインの総和の規約と呼ばれる。名前のおり、この怠惰な記法はアインシュタインが一般相対性理論のために提案した方法で、便利さゆえに使われ続けている。正確に言うと、総和をとるための添え字はどのような組み合わせでもよいわけではない。一方の添え字が共変成分であれば、対となるもう一方は反変成分でなければならないという制限がある。共変成分、反変成分という言葉については後に説明するので今のところは特に気にしないでよいだろう。

K 系から K' 系への座標変換がローレンツ変換ならば、座標の完全微分 (??) に見られる係数  $\partial x'^{\mu}/\partial x^{\nu}$  をヤコビアン行列の第  $\mu$  行目、第  $\nu$  列目の成分とすると、そのヤコビアン行列は、

$$\left[ \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \right] = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

のようにローレンツ変換の展開係数を表す行列となる。ここで、 $\gamma \equiv (1 - \beta^2)^{-1/2}$  とする。これに対して、

$$\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\nu}} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\nu}} = \delta^{\mu}_{\nu},$$

であることから、逆変換を表す  $\partial x^{\mu}/\partial x'^{\alpha}$  は、 $\partial x'^{\alpha}/\partial x^{\nu}$  の逆行列であることがわかる。このようなローレンツ変換の展開係数とヤコビアン行列の関係は、物理量の変換を考える際に役に立つ。

## 4.2.2 スカラとベクトル

スカラとベクトルはリーマン幾何学で導入された概念ではないが、リーマン幾何学は座標変換に対する性質として、スカラとベクトルを論理的に分類している。スカラは座標変換に対して不変な値であり、ベクトルは座標変換に伴って変換される量である。さらにその変換の性質により、ベクトルは共変ベクトルと反変ベクトルに分類される。

**スカラ** 既に述べたように、スカラとは座標変換に対して不変となる量である。数式で表現するならば、ある座標系で定義されたスカラを  $\phi$  とし、別の座標系において  $\phi$  に対応する量を  $\phi'$  とすれば、

$$\phi' = \phi, \quad (4.3)$$

となる。本書で扱った例として、ローレンツ変換に対して不変であったミンコフスキー時空の微小距離  $ds$  や光波の位相がスカラの例である。

**共変ベクトル** 任意のスカラ  $\phi$  を座標  $x^\mu$  で偏微分することによって定義されるベクトル  $\partial\phi/\partial x^\mu$ 、いわゆる勾配ベクトルは、

$$\frac{\partial\phi}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial\phi}{\partial x^\nu},$$

という性質がある。この性質は解析学における偏微分の変換公式である。これと同じ性質をもつベクトルを**共変ベクトル**という。共変ベクトルは、 $u_\mu$  のように添え字を右下に書く習慣になっている。座標変換に関する性質を改めて書くと、共変ベクトル  $u_\mu$  は、

$$u'_\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} u_\nu, \quad (4.4)$$

なる関係を満足する。例えば、光波の角周波数  $\omega$  と波数ベクトル  $[k_x, k_y, k_z]$  を組み合わせてつくった4次元ベクトル  $[k_\mu] \equiv [-\omega/c, k_x, k_y, k_z]$  は、ミンコフスキー空間において  $k_\mu = \partial\theta/\partial x^\mu$  で与えられる ( $\theta$  は光波の位相) ので、共変ベクトルである。共変ベクトルは、座標変換に対して、その逆変換によって新しい座標系での共変ベクトルに変換される。共変ベクトル  $k_\mu$  に関するローレンツ変換を例にとると、特殊相対性理論におけるドップラ効果として導出した変換式から、

$$-\frac{\omega'}{c} = \frac{-\omega/c + \beta k_x}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad k'_x = \frac{k_x + \beta(-\omega/c)}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad k'_y = k_y, \quad k'_z = k_z,$$

となることから、確かにローレンツ変換の逆変換にしたがって変換されていることが分かる。また、容易に示せるが、勾配ベクトルのほかに、共変ベクトルをスカラで微分したベクトルも共変ベクトルである。

**反変ベクトル** 前項でも書いたように、微小な座標変化  $dx^\mu$  は、座標変換に対して、

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu,$$

のように変換される。これと同じ性質をもつベクトルを**反変ベクトル**という。共変ベクトルは、 $v_\mu$  のように添え字を右上に書く習慣になっている。座標変換に関する性質を改めて書くと、反変ベクトル  $v^\mu$  は、

$$v'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} v^\nu, \quad (4.5)$$

なる関係を満足する。つまり、ローレンツ変換に対して、反変ベクトルは座標変換と同一の変換にしたがう。また、容易に示せるが、反変ベクトルをスカラで微分したベクトルも反変ベクトルである。

### 4.2.3 2階テンソル

共変ベクトル, または, 反変ベクトルのダイアド積をとることによって添え字を2つもつ量  $T_{\mu\nu} \equiv u_\mu v_\nu$ ,  $T^{\mu\nu} \equiv u^\mu v^\nu$ ,  $T_\mu{}^\nu \equiv u_\mu v^\nu$  などを定義できる。添え字がともに下にある量を共変テンソル, 添え字がともに上にある量を反変テンソル, 添え字が上と下にある量を混合テンソルという。ベクトルと同様, 座標変換に対して, 共変な成分は逆変換にしたがい, 反変な成分は座標変換と同一変換にしたがう。その性質を数式で表現するならば,

$$\begin{aligned}T'_{\mu\nu} &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} T_{\alpha\beta}, \\T'^{\mu\nu} &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} T^{\alpha\beta}, \\T'^\mu{}_\nu &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} T^\alpha{}_\beta,\end{aligned}$$

となる。同様にダイアド積を重ねてさらに高階のテンソルを定義することもできるが, 特殊相対性理論で登場するのは2階のテンソルまでである。

逆に, 高階のテンソルの階数を下げる操作を縮約という。例えば, 2階の共変テンソル  $T_{\mu\nu}$  に反変ベクトル  $u^\mu$  を掛けて, 添え字  $\mu$  について縮約をとると,

$$T_{\mu\nu} u^\mu \equiv v_\nu,$$

のような共変ベクトルが得られる。容易に予想できるように, ベクトルに対して縮約をとった値  $u_\mu v^\mu$  はスカラー量になる。このスカラー量は, 次項で紹介するベクトルの内積である。

### 4.2.4 計量テンソル

計量テンソルは, 時空の微小距離を定義するテンソルであり, 湾曲した時空を解析する上で重要な情報である。後に示すように計量テンソルは2階の対称テンソルであるが, 物理的なイメージをつかむため, 微小距離を与える情報であることから始め, 順を追って説明する。

まず手始めに, 2次元のユークリッド空間 (平坦な空間) を考えよう。座標系には直交座標系  $[x, y]$  を想定しよう。空間の任意の位置に互いに接近した二つの点を配置する。その二点を結ぶベクトルは  $[dx, dy]$  であるとする。このとき, 二点間の距離の自乗は,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2,$$

で表される。リーマン幾何学では, この微小距離  $ds$  を線素と呼ぶ。実は, 線素の自乗がこのような量になることに関して, 条件を言い忘れていた。それは,  $x$  座標と  $y$  座標が長さ

に関して規格化されているという条件である。わかりやすくいうと、 $x$  軸上の二つの座標  $x$  と  $x+1$  の間の距離が 1 になるように  $x$  座標の尺度が決められ、 $y$  座標も同様に尺度が決められているということである。

次に 2 次元の斜交座標系を考えよう。座標系の  $x$  軸と  $y$  軸のなす角を  $\alpha$  とし、上のように座標の尺度は長さに関して規格化されているとする。その場合、線素の自乗は余弦定理より、

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + 2 \cos \alpha dx dy,$$

となる。線素の表現に混合微分項が現れたが、斜交座標系はまだ平坦な空間である。

曲がった空間の例として、半径  $R$  の球の表面を考えよう。座標軸としては、北極点から南極点に向かう角度  $\theta$  と赤道を 1 周する角度  $\phi$  で球面上の任意の点を特定できる。そのとき、線素の自乗は、

$$ds^2 = R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2 \theta d\phi^2,$$

のように表される。上で述べたように球面上の任意の位置は  $[\theta, \phi]$  なる 2 つの座標成分で特定できるので、球面は 2 次元空間である。さらに、この例では座標が長さに関して規格化されていないため、線素の自乗を表す数式には  $R^2 \sin^2 \theta$  のような係数がついている。この係数はもはや定数ではなく、座標に依存する。よって、球面座標の線素の自乗は座標の微小変化に関して非線形となる。その非線形が空間の曲がりに関係している。

上に示した三つの例を包含するように、一般の 2 次元座標  $[x^0, x^1]$  について線素を定義するならば、

$$ds^2 \equiv g_{00}(dx^0)^2 + g_{01}dx^0dx^1 + g_{10}dx^1dx^0 + g_{11}(dx^1)^2,$$

なる 2 次形式で記述するのがよいだろう。紛らわしい記述であるが、 $ds$  の右肩の数値と括弧外の右肩の数値は自乗を意味する。それ以外の右肩の数値は反変ベクトルの添え字である。直交座標系と斜交座標系について  $[x^0, x^1] \equiv [x, y]$ 、球面座標系について  $[x^0, x^1] \equiv [\theta, \phi]$  のように座標線分を対応づければ、線素を与える係数は、

$$\begin{aligned} \text{直交座標} : [g_{\mu\nu}] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \text{斜交座標} : [g_{\mu\nu}] &= \begin{bmatrix} 1 & \cos \alpha \\ \cos \alpha & 1 \end{bmatrix}, \\ \text{球面座標} : [g_{\mu\nu}] &= \begin{bmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

のように書くことができる。当然、座標変換によって座標軸が変わったとしても、2 点間の長さが不変であるので、長さを規定する線素は座標変換に対して不変になる。つまり、線素はスカラーである。

上のような線素の定義はそのまま多次元の空間に拡張することができる。つまり、線素の一般的な定義を、

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu,$$

なる2次形式で与えるのである。既に説明したように、この数式はアインシュタインの総和の規約を用いている。係数  $g_{\mu\nu}$  は計量テンソルと呼ばれる2階の共変テンソルである。しかも、線素を定義する2次形式において  $dx^\mu$  と  $dx^\nu$  を交換しても  $ds^2$  が変化しないので、 $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$  である。つまり、計量テンソルは対称テンソルである。また、2階の共変テンソルであることから、 $g_{\mu\nu}$  は座標変換に対して、

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta},$$

のような変換にしたがう。この性質は  $ds^2$  がスカラであることから容易に証明できる。さらに、計量テンソルの添え字を上にした記号  $g^{\mu\nu}$  は、計量テンソル  $g_{\mu\nu}$  の逆行列を表す。

ミンコフスキー時空を例にとると、 $dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2$  がスカラであり、長さの自乗の次元をもつので、これを線素の定義とする。座標成分を  $[x^0, x^1, x^2, x^3] \equiv [ct, x, y, z]$  のように対応させると、ミンコフスキー時空の線素を与える係数は、

$$[g_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

となる。重力場は曲がった時空であり、計量テンソルがミンコフスキー時空とは異なる。後に紹介する重力場の方程式や、物体の運動方程式には計量テンソル以外のテンソルやスカラを用いるが、後に説明するように、それらはすべて計量テンソルから導かれる量である。つまり、時空の幾何学的な性質は計量テンソルで与えられるのだ。

計量テンソルはその座標系における長さの尺度を定義する量であり、その尺度を用いてベクトルの内積を定義することができる。二つの反変ベクトル  $u^\mu$  と  $v^\mu$  の内積は  $g_{\mu\nu} u^\mu v^\nu$  によって与えられる。つまり、線素の自乗  $ds^2$  は位置ベクトルの微小変化  $dx^\mu$  の自分自身との内積である。

計量テンソルには、ベクトルやテンソルの共変性と反変性を交換するはたらきがある。例えば、反変ベクトル  $u^\mu$  に  $g_{\mu\nu}$  を掛けて  $\mu$  について縮約をとれば、 $u^\mu g_{\mu\nu} = u_\nu$  のように共変ベクトルに変換できる。逆に、共変ベクトル  $v_\mu$  に  $g^{\mu\nu}$  を掛けて  $\mu$  について縮約をとると、 $v_\mu g^{\mu\nu} = v^\nu$  のように反変ベクトルに変換できる。このことから、 $u^\mu$  と  $v^\mu$  の内積は  $u^\mu v_\mu (= u_\mu v^\mu)$  と書くこともできる。

### 4.3 測地線とクリストッフェル記号

東京からニューヨークへの最短経路は、東京から千島半島に向かって北上し、アラスカ北部を經由してカナダのハドソン湾上空を通過する経路を描く。この経路をメルカトル図法で描くと、かなり湾曲した経路である。このように地球上での最短経路が地図上で湾曲した経路を描くのは、球面が湾曲しているからである。また、このように湾曲した空間を結ぶ最短経路を測地線と呼ぶ。ただし、測地線に沿って運動する観測者は測地線が曲がっていることを認識することはない。例えば、航空機の操縦桿をまっすぐにまっすぐに保って直進を続けると、航空機は測地線に沿った運動をするのである。

重力場についても同様である。一般相対性理論によると、質量は時空を湾曲させる。直感的には、図??のように、ゴムシート上の1点に質量が乗るとゴムシートに歪みができる。これが時空の湾曲と考えればよい。ゴムシート状を運動する光や物体はゴムシートの歪みに引きずられて、その軌跡が曲がるのである。図??では、左側から座標軸に平行に光が進行してきた場合を描いている。質量の近傍の時空の歪みで軌跡が曲がり、軌跡が座標軸の方向からそれていくのがわかる。右側から図の外へ抜けるときには、その光は入射方向とは大きく異なる方向へ伝播している。このような運動は測地線上の運動であるので、光や物体は軌跡が曲げられたとしても、自分が直線上を運動しているという意識しかもたないはずである。それが重力の解釈に関してニュートン力学と大きく異なる点である。ニュー

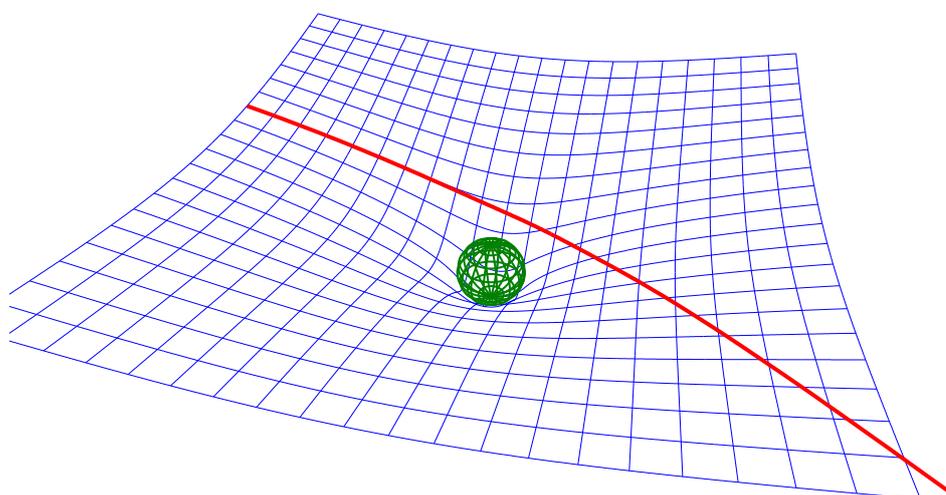


図 4.2: 質量による時空の歪みと光の軌跡

トン力学では物体に重力が作用するから運動軌跡が曲がると解釈されていたが、一般相対性理論では湾曲した時空を運動をするから軌跡が曲がるのである。言い換えると、一般相対性理論の解釈では、重力という力は存在しないのである。一般相対性理論の重力場にお

ける物体の運動方程式は,

$$\frac{d^2x^\kappa}{d\tau^2} + \Gamma^\kappa_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0, \quad (4.6)$$

なる測地線の方程式で記述される。ここで、 $\tau$  は固有時間と呼ばれ、運動する物体に固定された時計の読みと考えればよい。具体的には、 $-c^2 d\tau^2 = ds^2 (= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu)$  で定義されている。さらに、 $\Gamma^\kappa_{\mu\nu}$  はクリストッフエル記号と呼ばれ、

$$\Gamma^\kappa_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\kappa\alpha} \left( \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right),$$

のように、計量テンソル  $g_{\mu\nu}$  の 1 階微分によって計算される量である。幾何学的には、座標軸の方向と長さの尺度が時空の位置によって変化する割合を示している。特別な例として、ミンコフスキー時空でクリストッフエル記号は必ずゼロとなる。したがって、ミンコフスキー時空における測地線の方程式は  $d^2x^\kappa/d\tau^2 = 0$  となる。この方程式の解として、無重力空間では外力を受けなければ、物体は等速直線運動をするのである。

大きな質量が存在する場合、 $g_{\mu\nu}$  がミンコフスキー計量とは大きく異なり、その導関数から得られる  $\Gamma^\kappa_{\mu\nu}$  も大きくなり、光の軌跡でさえ湾曲させるのである。

## 4.4 弱い重力場の計量テンソル

近似的にニュートン力学が適用できる程度の弱い重力場における計量テンソルについて調べ、重力場における計量テンソルの物理的意味を考察してみよう。まず、重力場における測地線の方程式:

$$\frac{d^2x^\kappa}{d\tau^2} + \Gamma^\kappa_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0,$$

から始めよう。対象とする時空は非常に弱い重力場であるので、ほぼミンコフスキー空間の現象と同一であるとみなしてよい。また、観測対象となる質点の速度が光速  $c$  に比べて十分小さいとき、

$$\frac{dx^k}{d\tau} \simeq \frac{dx^k}{dt}, \quad \frac{dx^0}{d\tau} \simeq c, \quad \text{for } k = 1, 2, 3$$

と考えてもよい。非相対論的な極限として、 $|dx^k/dt| \ll c$  と考えると、測地線の方程式は近似的に

$$\frac{d^2x^k}{dt^2} + c^2 \Gamma^k_{00} = 0,$$

であると考えられる。さらに、計量テンソルが定常的であるならば、 $x^0$  についての導関数がゼロとなるので、クリストッフエルの記号  $\Gamma^k_{00}$  は、

$$\Gamma^k_{00} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{k0}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{k0}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^k} \right) \simeq -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^k},$$

となるであろう。ここで、重力場が準静的であると考え、 $x^0$  についての微分が無視できると仮定した。このとき、測地線の方程式は、

$$\frac{d^2 x^k}{dt^2} - \frac{c^2}{2} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^k} = 0,$$

となる。ここで、ニュートン力学における重力場の方程式を比較してみよう。非相対論的な重力ポテンシャル  $\phi$  が与えられたとき、ニュートン力学では、

$$\frac{d^2 x^k}{dt^2} + \frac{\partial \phi}{\partial x^k} = 0,$$

が成立する。この方程式を、上で導出した測地線の方程式と比較すると、

$$g_{00} = - \left( 1 + \frac{2\phi}{c^2} \right),$$

が得られる。この関係式を得るにあたり、 $\phi = 0$  のときに  $g_{00} = -1$  となるように積分定数を選んでいる。この結果によって、計量テンソルはニュートン力学におけるポテンシャルとしての役割があることが推察できる。この近似式は、本書で構築する加速度場の記述において、計量テンソルを決定するために用いる重要な関係式である。

## 4.5 アインシュタインの方程式

重力場を求めることは計量テンソルを特定することだと前に述べた。それでは計量テンソルを求める方法を説明する。まず、ニュートン力学における重力場の導出を思い起こそう。単位体積あたりに質量  $\rho$  が空間に分布しているとしよう。そのとき、重力のポテンシャル  $\phi$  は、

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G\rho,$$

なるポアソンの方程式の解となる。ここで、 $G$  は万有引力定数 ( $\simeq 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg}\cdot\text{s}^2$ ) である。この数式は、質量が存在する近辺には重力なる力の線が集まってくることを表現している。つまり、質量が重力の源である。

一般相対性理論では、このポアソンの方程式に相当する方程式が複雑になる。特殊相対性理論では  $E = mc^2$  という関係式が導かれ、質量とエネルギーが等価であることがわかった。しかも、空間座標と時間座標がローレンツ変換で相互関係をもつことに類似し、運動量とエネルギーも相互関係をもつことがわかっている。そのため、一般相対性理論における重力の源はエネルギーと運動量である。それに対応する物理量として  $T_{\mu\nu}$  というエネルギー運動量テンソルを右辺におけばよい。左辺は重力ポテンシャルのラプラシアンに相当する量となるべきである。弱い重力場の近似では、計量テンソル  $g_{\mu\nu}$  がポテンシャルに相

当することがわかっている。そのため、は計量テンソルの2階微分からつくられる量が方程式の左辺となる。導出には専門的な知識が必要なので省略するが、

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu},$$

が重力場の基本方程式となる。この方程式はアインシュタインの方程式と呼ばれる。導出過程に興味のある読者は一般相対性理論の教科書、または、リーマン幾何学の教科書を参照するとよい。

アインシュタイン方程式の左辺にある  $R_{\mu\nu}$  はリッチテンソルと呼ばれ、時空の湾曲に起因する体積歪みを表す量である。体積歪みを説明するため、地球儀を例にとろう。地球儀に地図を貼り付けるには切れ目のない1枚の地図では貼り付けができない。市販されている地球儀は、世界地図を数十枚の紡錘形に分割し、それらを球の表面に貼り付けて製作されている。もし、切れ目のない1枚の地図を赤道付近に糊付けした後に北極と南極に向かって強引に糊付けをしていくと、地図が途中で折れ曲がり互いに重なり合ってしまう。この重なり具合が歪みというわけである。重力場についても同じことが言え、1辺が1mの立方体をつくってもその体積が  $1\text{m}^3$  にならないことになるのである。その体積のずれを  $R_{\mu\nu}$  が表現していると考えればよい。また、 $R$  はリッチテンソルのトレースと呼ばれる値であり  $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$  によって計算される。さらに、 $g^{\mu\nu}$  は計量テンソルの逆行列である。とにかく、左辺は時空が湾曲していることによる体積歪みを表す量である。

右辺の  $T_{\mu\nu}$  は応力エネルギーテンソルと呼ばれるテンソルである。そのテンソルの中身は、エネルギー密度、運動量密度と応力である。応力が重力に関係するとはニュートン力学では想像もできないだろうが、応力がエネルギー・運動量の保存則に関係するため、重力の要因のひとつに加えられている。

ニュートン力学では質量が重力という力を生み出すことによって重力場が生成されているという解釈になるのだが、一般相対性理論では、エネルギー、運動量、応力が時空を歪ませ、その時空の歪みが重力場として認識されていると解釈されるのだ。

アインシュタインの方程式は見かけよりもはるかに複雑な式である。この方程式の右辺も左辺も4次元の2階の対称テンソルである。表示上、2階のテンソルは正方行列で書けるので、4次元の2階のテンソルは16個の成分をもつ。しかし、対称テンソルは  $T_{20} = T_{02}$  のような添え字の入れ替えに対する対称性があるので、独立な成分の数はそれよりも少なくなる。とは言っても、独立な成分は10個もある。つまり、アインシュタインの方程式は、2階の微分方程式が10元の連立方程式になった形態をとっている。このように書くと、アインシュタインの方程式を解くことが恐ろしく難しいことが想像できるだろう。

## 4.6 シュワルツシルトの解

アインシュタイン方程式の解の例としてシュワルツシルトの解を紹介する。その解は、1916年にアインシュタインが一般相対性理論を発表した3か月後にシュワルツシルトが発表した解である。物理的には電荷をもたず、自転をしていない質点が生成する重力場を表している。一般相対性理論では、質点が自転している場合や、電荷をもつ場合には重力が変化する。自転をせず、球対象で、帯電していない条件は厳密には存在しないが、シュワルツシルトの解は基本的な解であり、多くの天体に対して近似的な解析をするのに十分であるので、相対性理論の記事で必ずと言っていいほど取り上げられる。

シュワルツシルトの解は球面座標で記述するのが便利である。空間座標として球面座標を用い、時空の座標を  $[x^0, x^1, x^2, x^3] \equiv [ct, r, \theta, \varphi]$  のようにとるとシュワルツシルトの解の線素は、

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (4.7)$$

のように書かれる。ただし、 $m$  は積分定数であり、質点の質量を  $M$ 、万有引力定数を  $G$  とすると、 $m \equiv MG/c^2$  である。この線素のミンコフスキー計量からのずれ:

$$-c^2 \frac{2m}{r} = -\frac{MG}{r},$$

は、十分遠方ではニュートン力学における重力のポテンシャルと一致する。この線素の奇妙な性質として、 $r = 2m$  を境に、計量テンソルの要素  $g_{00}$  と  $g_{11}$  の符号が入れ替わる。しかも、その境界  $r = 2m$  では  $g_{00} = 0$ 、 $g_{11} = \infty$  となる。その奇妙な境界面の半径  $2m$  はシュワルツシルトの半径と呼ばれる。

シュワルツシルト解は、ニュートン力学で説明できなかった面白い現象を教えてくれる。一つ目は周回する惑星の近日点の移動、二つ目は重力レンズ効果、三つ目はブラックホールの存在である。

### 4.6.1 近日点の移動

ニュートン力学では、質点を周回する惑星は楕円軌道を描く。しかし、シュワルツシルト解の線素を見ると、時間や動径方向の尺度が  $r$  の関数になっているため、質点との距離が変化すると時計が狂うことが予想される。楕円軌道を描く惑星にとって、遠日点と近日点では時間の尺度が異なるため、ニュートン力学では周回しても必ず同じ楕円軌道をたどる惑星が、一般相対性理論では近日点のタイミングが徐々にずれるわけである。

近日点が移動する効果は、重力場における測地線の方程式を評価すれば確認できる。結果だけを紹介するが、軌道の長半径がシュワルツシルト半径  $2m$  よりはるかに大きい場合の近似として、ある周回時の近日点の方向  $\varphi(1)$  と、次の周回時の近日点の方向  $\varphi(2)$  の差は、

$$\varphi(2) - \varphi(1) = 2\pi \left[ 1 + \frac{3m}{r_m(1 - e^2)} \right],$$

となる。ここで、 $r_m$  が軌道長半径、 $e$  が軌道の離心率である。この値の  $2\pi$  からのずれ  $6\pi m/r_m(1 - e^2)$  が周回ごとの近日点のずれである。近日点のずれは、水星の軌道で起きて

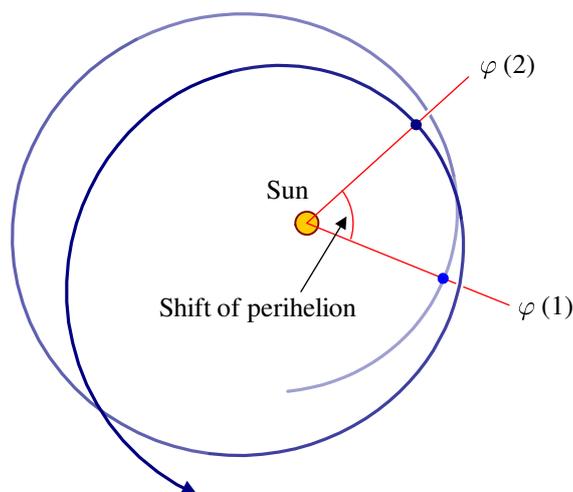


図 4.3: 近日点の移動

いることが相対性理論の発表前から知られていた。しかし、ニュートン力学では、摂動によるずれを補正しても、100年あたりに約43秒の角度のずれが残り、説明ができなかったのである。

水星の天文学的データとして、離心率  $e = 0.206$ 、軌道長半径  $r_m = 0.579 \times 10^8$  km、100年あたりに415周公転する情報を用いて計算してみよう。また、太陽の質量  $M = 1.99 \times 10^{30}$  kg を代入すると、100年あたりの近日点のずれは42.9秒と計算される。一般相対性理論による計算は水星近日点の移動について観測とよく一致していることがわかる。つまり、ニュートン力学で説明できなかった近日点の移動は相対論的效果だったのである。

## 4.6.2 重力レンズ

一般相対性理論では、エレベータの思考実験でも述べたとおり、光の軌跡も重力によって曲げられる。重力が光の軌道を湾曲させる量も、測地線の方程式を評価することによって計算できる。

質点の赤道上空 ( $\theta = \pi/2$ ) に限定した場合、測地線の方程式を変形すると、

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = \frac{3m}{r^2},$$

が得られる。ニュートン力学ではこの方程式の右辺がゼロとなり、 $r = r_0 / \cos \varphi$  という解が得られる。定数  $r_0$  は質点に最も接近したときの質点までの距離である。この解によると、ニュートン力学では質点のそばを通過しても光は直進する。このニュートン力学における解を上微分方程式に代入すると、

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = 3m \left( \frac{\cos \varphi}{r_0} \right)^2,$$

を得る。新たに得られた微分方程式の解は、

$$\frac{1}{r} = \frac{\cos \varphi}{r_0} + \frac{2m}{r_0^2} \left( 1 - \frac{1}{2} \cos^2 \varphi \right),$$

となる。この解は逐次近似における  $2m/r_0^2$  の 1 次項を含む解である。この解を最初の微分方程式に代入すればさらに高次の近似解を得ることができる。この解に対して、 $r_0 \gg m$  の条件で  $r \rightarrow \infty$  の極限をとると、 $\varphi = 2m/r_0$  が得られる。これは、図?? (a) に示すように、方向  $\varphi = \pi/2 + 2m/r_0$  の無限遠から到来した光は距離  $r_0$  で質点  $M$  に接近した後、方向  $\varphi = -\pi/2 - 2m/r_0$  の無限遠に去っていくことを意味する。すなわち、その光は質点  $M$  の重力場によって、

$$\Delta\varphi = \frac{4m}{r_0} = \frac{4GM}{c^2 r_0},$$

の角度だけ曲げられていること表す。このように大きな質量の近傍をかすめる光は、質点の重力によって引き寄せられる。この光線の湾曲が凸レンズのような働きをするので、重力によって光を曲げる効果を重力レンズ効果と呼ぶ。もし、観測者と質点と光の到来方向が一直線上にある場合、図?? (b) のように、重力レンズ効果で曲げられた光は質点を取り囲む円環状に見える。その円環をアインシュタインリングと呼ぶ。しかし、一般には三者が一直線上からずれていたり、重力の源が広がりをもっていたりするので、アインシュタインリングは変形したり、途中で途切れたりしている。

### 4.6.3 ブラックホール

既に述べたように、シュワルツシルト解によると、質点からの距離が  $2m$  (シュワルツシルト半径) で計量  $g_{11}$  が発散する。シュワルツシルト半径は非常に小さく、地球の質量 ( $5.97 \times 10^{24}$  kg) に対して 0.89 cm、太陽の質量 ( $1.99 \times 10^{30}$  kg) に対して 2.95 km となる。この半径は天体の内部なので、地球や太陽についてシュワルツシルト半径の歪んだ時空を観測することはない。しかし、質量が大きく自分自身の重力で 1 点につぶれた天体があれば

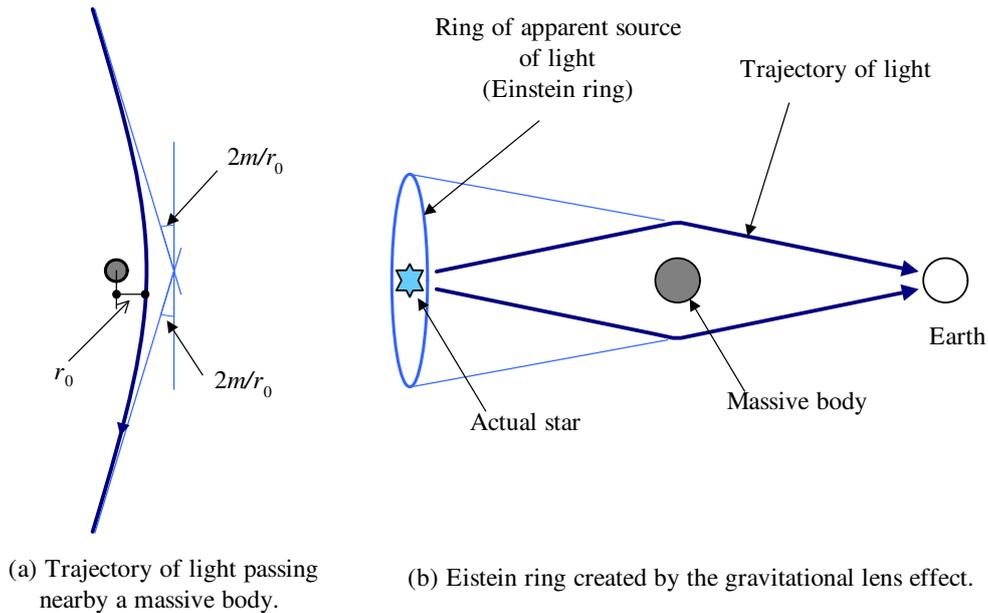


図 4.4: 重力レンズ効果

ば, 天体の外側にシュワルツシルトの半径が現れる。そのような特異な天体は光さえもその重力から脱出できないため, ブラックホールと呼ばれる。

重力場の中では光速が場所によって異なる。光速の場所への依存性を調べるには線素を調べるとよい。シュワルツシルト解の線素は,

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2,$$

のように記述される。ただし,  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$  とおいた。シュワルツシルト解は, 質点からの距離  $r$  によって時間と動径方向の尺度が変化する。例えば, 質点からの距離がシュワルツシルト半径の2倍 ( $= 4m$ ) の場合, 動径方向の距離の尺度は無重力空間の2倍に引き伸ばされる。極端な場合として, シュワルツシルト半径 ( $= 2m$ ) では動径方向の距離の尺度が無限大に引き伸ばされる。シュワルツシルト解における尺度の変化は, 4次曲面  $z = \sqrt{8m(r - 2m)}$  の表面の計量と一致する。そのため, シュワルツシルト解は図??に示すフラムの回転放物面 (Flamm's paraboloid) として表現されることが多い。この回転放物面はブラックホールの赤道面 ( $\theta = \pi/2$ ) において時間座標を固定して計量を表現した図である。図??に示す高さ方向は, 計量を等しくするために設けた仮想的な次元であり, 実際の次元ではない。フラムの回転放物面は, ブラックホールという名称のとおり, 時空に穴が開いたような形状になっている。その穴の半径はシュワルツシルト半径と一致する。図??にはブラックホールの近傍に入射された光の軌跡の一例を示している。その光は, 図の左側から座標軸に沿って入射されているが, 重力場に捕捉され, ブラックホールの周囲を2回転あまり螺旋を描きながらブラックホールに吸い込まれていく様子を描いている。

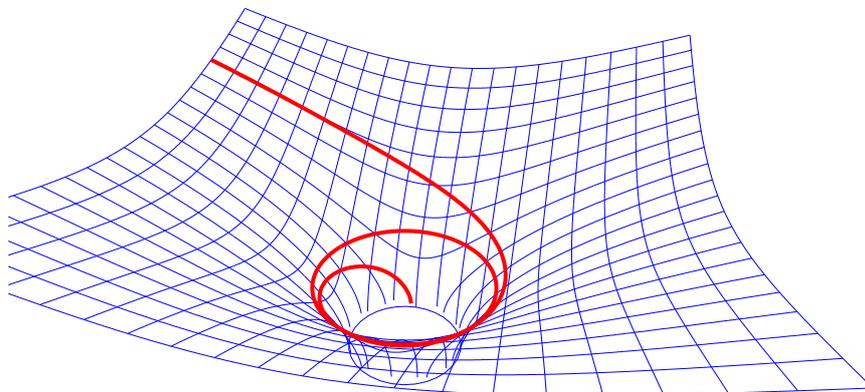


図 4.5: シュワルツシルトのブラックホールと落下する光の軌跡

光が螺旋を描きながら吸い込まれることはニュートン力学では考えられなかったことである。

光でさえ脱出不可能な重力場をつくり出すブラックホールは一般相対性理論から得られる結果であるため、その性質を調べることは興味深い。次節でシュワルツシルト解におけるブラックホールについて性質を調べよう。

## 4.7 シュワルツシルトのブラックホール

シュワルツシルト解は、球対称の最も簡単なアインシュタイン方程式の解であるが、光さえも脱出できないブラックホールの存在を意図している。本節では、シュワルツシルトのブラックホールの性質を調べる。

### 4.7.1 事象の地平面

シュワルツシルト半径  $2m$  はブラックホールの性質を調べる上で、重要な物理量である。シュワルツシルト半径は、後に示すように、情報伝達の境界線となる位置を与える。

これまでに何度か示したが、再度、シュワルツシルト解の線素を書いておく。

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2.$$

この線素によると、シュワルツシルト解では光速が動径座標  $r$  によって異なることがわかる。簡単のため、動径方向の光速のみを考えよう。光円錐の説明で述べたように、光の軌

跡は必ず  $ds = 0$  を満たすため、動径方向の光速は、

$$\left| \frac{dr}{dt} \right| = \left( 1 - \frac{2m}{r} \right) c$$

で与えられる。無限遠 ( $r \rightarrow \infty$ ) では光速が  $c$  となるが、シュワルツシルト半径 ( $r = 2m$ ) では光速がゼロとなる。光速が定数でないことは、光速不変の原理に反することなので驚くかもしれない。しかし、光速不変の原理は特殊相対性理論が対象とする物理学の範囲、すなわち、無重力状態でしか成り立たないのである。質点に近づく ( $r$  が小さくなる) につれ、光速は小さくなり、 $r = 2m$  のとき光速はゼロになる。このことから、シュワルツシルト半径  $r = 2m$  から発射した光はシュワルツシルト半径の外側に到達することができない。当然、シュワルツシルト半径の内側から発射した光についても同様である。したがって、シュワルツシルト半径、および、その内側で発生した事象は外側に影響を与えることはない。そのため、シュワルツシルト解では、シュワルツシルト半径となる球面は事象の地平面と呼ばれる。

シュワルツシルトのブラックホールの中心から  $r_A$  の距離から  $r_B$  の距離へ光が伝播するのに要する時間を求めてみよう。ただし、伝播経路は動径方向のみであるとする。ニュートン力学ならば、 $(r_B - r_A)/c$  となるのだが、一般相対性理論では光速が場所によって異なるので結果が変わるはずである。光速の変化を考慮して光の伝播時間を求めると、

$$\begin{aligned} \int_{r=r_A}^{r_B} dt &= \int_{r_A}^{r_B} \frac{dt}{dr} dr = \frac{1}{c} \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{1 - 2m/r} \\ &= \frac{r_B - r_A}{c} + \frac{2m}{c} \log \frac{r_B - 2m}{r_A - 2m}, \end{aligned}$$

のようになる。この結果の第2項が相対論的效果である。この計算について補足しておく。この伝播時間は無限遠にいる観測者の時計で計測した結果である。特に、 $r_A = 2m$  のとき、対数関数の被演算項の分母がゼロとなるので伝播時間は無限大となる。さらに、 $r < 2m$  の場合、対数関数の被演算項が負になるため伝播時間を定義できない。これは、上で述べたことと矛盾しない。ブラックホールの近辺なら相対論的效果が大きくなるが、太陽の重力場程度ではその効果はかなり小さい。太陽表面の光が地球に届くまで8分16秒を要するが、そのうち相対論的效果は52.8マイクロ秒に過ぎない。ところで、上の式を見ると  $r_B \rightarrow \infty$  の極限で相対論的效果も発散するので、相対論的效果が一般的に小さくはないように見えるかもしれない。ところが、 $r_B$  に宇宙の果てと想定される距離137億光年を仮定し、太陽表面から発射される光の伝播時間を計算すると、相対論的效果は392マイクロ秒にしかならないのである。

## 4.7.2 接近距離の限界

事象の地平面の内側に入ってしまうと光さえ脱出することができないので、事象の地平面が外側に存在する天体をブラックホールと呼ぶ。シュワルツシルトのブラックホールでは、半径  $2m$  以外に面白い半径が存在する。重力レンズの項で光の軌跡が、

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = \frac{3m}{r^2},$$

なる微分方程式で与えられることを述べた。その方程式の左辺第1項をゼロとすると  $r = 3m$  が得られる。この結果は、シュワルツシルト半径の1.5倍の半径で光は円運動をすることを意味する。言い換えると、 $r = 3m$  での第1宇宙速度は、その場所での光速<sup>1</sup>に等しい。想像するにも奇妙な話であるが、シュワルツシルト半径の1.5倍の位置に立って水平方向に望遠鏡を向けると自分の後ろ頭が見える<sup>2</sup>ということである。また、容易に予想がつくように、 $r < 3m$  の領域に物体が円軌道を描くことは不可能である。

シュワルツシルトブラックホールは事象の地平面 ( $r = 2m$ ) の内側に入ると光でさえ脱出できないことは前に述べた。ところが、事象の地平面の内側に入らなければ脱出できるという意味ではない。実は、その1.5倍の半径 ( $r = 3m$ ) に入ってしまうと、少なくとも外力を与えなければ脱出できないのである。ある物体が質点の重力場に捕捉されたとしよう。捕捉された物体は質点との距離を縮める。重力場を振り切って質点との距離を離すためには、少なくとも第1宇宙速度を超える速度が必要である。しかし、 $r = 3m$  での第1宇宙速度が光速であるので、その内側に入ると第1宇宙速度が存在しないので質点との距離は縮まるだけになる。したがって、いったんシュワルツシルト半径の1.5倍以内の距離に入った光は無遠くまで逃れることはできないのである。このことをシミュレーションした結果を図??に示す。図において、内側の濃い円は事象の地平面の内側を表し、その外側の円はシュワルツシルト半径の1.5倍の内側を表す。図?? (a) は、最接近時の距離がシュワルツシルト半径の1.72倍を示し、その後、無遠くまで逃げる光を表している。図?? (b) に示す光は、最接近時の距離がシュワルツシルト半径の1.51倍で、ブラックホールを1周した後無遠くまで逃げている。図?? (c) は、再接近時の距離がもう少し小さくなるように設定を変えたのだが、重力場から脱出できず、螺旋軌道を描きながらブラックホール中央に向かって落下する様子が見える。このようなシミュレーションからも、シュワルツシルト半径の1.5倍に入ると、重力場を振り切ることが不可能であることがわかる。

<sup>1</sup>光速といっても  $c$  ではない。重力場では光速は場所によって異なり、 $r = 3m$  での光速は  $c/\sqrt{3}$  である。その速度は、ニュートン力学で計算した第1宇宙速度と一致する。

<sup>2</sup>もっとも、光が円運動するような強い重力場に立ってられるわけがないが。

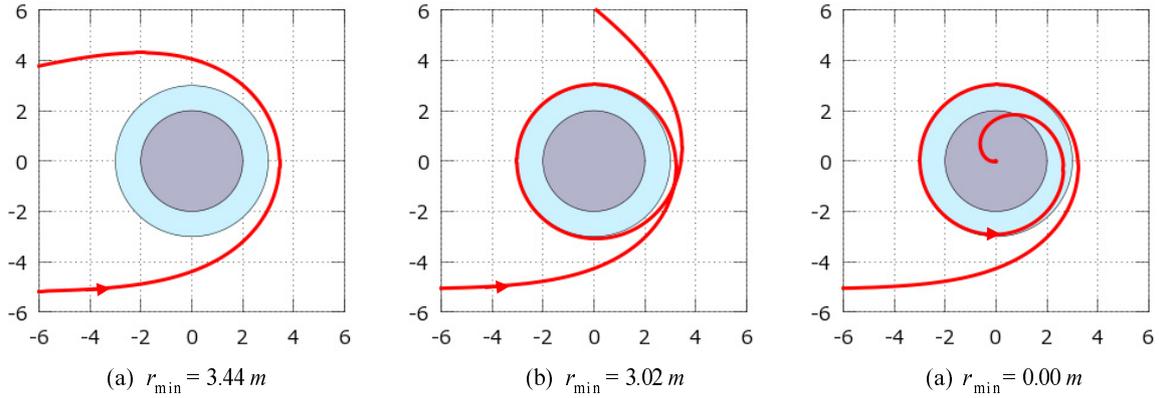


図 4.6: シュワルツシルトのブラックホールの付近を通る光の軌跡

### 4.7.3 シュワルツシルト解の半径

ブラックホールのような強い重力場では距離の尺度がミンコフスキー空間とは異なるので、ブラックホール周辺で動径方向に測った距離と半径座標が一致しない。半径座標とは、これまでに記号  $r$  で表現してきた物理量である。我々の日常的な常識では、ブラックホールから測った距離と半径  $r$  は一致するはずであるが、ブラックホール周辺の空間では異なるのである。

シュワルツシルト解における線素に基づき、ブラックホールの動径方向の距離を計算してみよう。その計算のためには、 $dr$  以外の微小変位をすべてゼロにしたシュワルツシルトの線素:

$$ds = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1/2} dr,$$

を用いればよい。この数式を見てわかるように、半径  $r$  の微小変化と距離が一致しないのである。例えば、シュワルツシルトの半径  $r = 2m$  では、微小距離  $ds$  が無限大になるので、シュワルツシルトの半径では距離が定義できない。距離と半径の関係を調べるため、半径  $r_0$  から  $r_1$  までの動径方向の距離を計算しよう。その計算は、上に記述した線素を積分すればよいので、

$$\begin{aligned} s_{01} &= \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - 2m/r}} = 4m \int_{u(r_0)}^{u(r_1)} \frac{du}{(1 - u^2)^2} \\ &= m \int_{u(r_0)}^{u(r_1)} \left[ \frac{1}{1 - u} + \frac{1}{(1 - u)^2} + \frac{1}{1 + u} + \frac{1}{(1 + u)^2} \right] du \\ &= \left[ \frac{2mu}{1 - u^2} + m \log \frac{1 + u}{1 - u} \right]_{u(r_0)}^{u(r_1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[ r\sqrt{1 - \frac{2m}{r}} + m \log \frac{1 + \sqrt{1 - 2m/r}}{1 - \sqrt{1 - 2m/r}} \right]_{r_0}^{r_1} \\
&= \left[ r\sqrt{1 - \frac{2m}{r}} + m \log \frac{1}{m} \left[ r \left( \sqrt{1 - \frac{2m}{r}} + 1 \right) - m \right] \right]_{r_0}^{r_1} \\
&= r_1\sqrt{1 - \frac{2m}{r_1}} - r_0\sqrt{1 - \frac{2m}{r_0}} + m \log \frac{r_1(\sqrt{1 - 2m/r_1} + 1) - m}{r_0(\sqrt{1 - 2m/r_0} + 1) - m}, \quad (4.8)
\end{aligned}$$

のように実行できる。この計算過程において、第1行目の数式変形は、 $u \equiv \sqrt{1 - 2m/r}$ なる置き換えを適用した。第2行目では、被積分関数を部分分数に展開した。第4行目への数式変形では、対数関数の変数の分母を有理化した。この計算結果によると、始点がシュワルツシルトの半径 ( $r_0 = 2m$ ) であっても、距離  $r_{01}$  は有限の値になる。

得られた距離  $s_{01}$  数式の性質を調べるため、シュワルツシルトの半径が無視できる程度の遠方  $2m \ll r_0 < r_1$  で (??) を近似すると、

$$\begin{aligned}
s_{01} &\simeq r_1 - r_0 + m \log \frac{r_1 - m}{r_0 - m} \\
&\simeq r_1 - r_0 + m \log \frac{r_1}{r_0},
\end{aligned}$$

が得られる。第1行目に示した近似式は  $m/r$  についての1次近似であり、第2行目はゼロ次近似である。どちらの近似式にしても、第2項が我々の常識における予想値  $r_1 - r_0$  からの誤差を表す。また、測定される距離は、予想値  $r_1 - r_0$  より大きくなる。太陽を例にとると、 $m = 1.476 \text{ km}$  である。太陽の表面  $r_0 = 1.392 \times 10^6 \text{ km}$  から地球の公転軌道  $r_1 = 1.496 \times 10^8 \text{ km}$  とすると、半径と距離の誤差は  $6.90 \text{ km}$  となる。さらに、海王星の公転軌道  $r_1 = 4.495 \times 10^9 \text{ km}$  とすれば誤差は  $11.9 \text{ km}$ 、宇宙の年齢  $137$  年から予想される宇宙の果て  $r_1 = 137 \text{ 億光年}$  を設定した場合の誤差は  $53.0 \text{ km}$  となる。始点がシュワルツシルトの半径と比較できる場合、誤差はさらに大きくなる。

上で説明したように、半径  $r$  と動径方向に測定した距離が異なるので、ブラックホールにおける半径座標は動径方向の距離で定義できない。一方、シュワルツシルト解において、方位角  $d\varphi$  以外をゼロとした場合の線素は  $ds = r d\varphi$  となる。その線素を  $\varphi$  の定義域  $[0, 2\pi)$  にわたって積分すると、 $s = 2\pi r$  が得られる。この結果は、我々の日常的な常識と合致する。この結果を踏まえ、次のように半径座標  $r$  を定義するのがよいだろう。

半径座標  $r$  は、シュワルツシルト解で表現される時空において、ブラックホールの中心を含む平面上で、重力が等しい閉曲線を1周する行程の長さ  $2\pi r$  を乗じた値である。

#### 4.7.4 座標系と特異点

前節で示したシュワルツシルト解の線素によると、シュワルツシルト半径  $r = 2m$  において計量テンソルの成分  $g_{11}$  が発散することがわかった。しかし、その発散はシュワルツシルト解で必然的に発生するのではなく、座標軸の選び方に起因するのである。例を挙げながら、そのことを示してみよう。

まず、動径方向の座標  $r$  の代わりに、 $r \equiv \rho(1 - m/2\rho)^2$  で定義される座標  $\rho$  を使ってみる。ほかの座標、 $ct, \theta, \varphi$  はそのまま引き続き使用する。座標  $x^\mu$  と座標  $x'^\mu$  の間の変換に対し、計量テンソルが、

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta},$$

のように変換されるので、座標系  $[ct, \rho, \theta, \varphi]$  における線素は、

$$ds^2 = - \left( \frac{1 - m/2\rho}{1 + m/2\rho} \right)^2 c^2 dt^2 + \left( 1 + \frac{m}{2\rho} \right)^4 (d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2), \quad (4.9)$$

のように書くことができる。この新しい座標系でのシュワルツシルト半径は  $\rho = m/2$  である。つまり、この座標を用いると、シュワルツシルト半径で計量テンソルが発散しないのである。とはいえ、この座標系ではシュワルツシルト半径  $\rho = m/2$  より内側を表現できない。しかも、シュワルツシルト半径で光速の動径方向成分がゼロになることも、前に示した座標系と同様である。

シュワルツシルト半径で光速の動径方向成分がゼロになるということは、重力場を落下する物体は決してシュワルツシルト半径の内側に入れないということである。しかし、その座標系は無限遠の観測者の座標に基づいている。測地線に沿って落下する別の観測者から見たときにシュワルツシルト半径を超えて内側に入れないかを検証してみよう。測地線は、

$$\frac{d^2 x^\kappa}{d\tau^2} + \Gamma^\kappa_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0,$$

なる方程式によって記述される。数式中の  $\tau$  は測地線の長さ  $s$  の 1 次関数で定義される量なら何でもよい。通常は、 $ds^2 = -c^2 d\tau^2$  によって定義される固有時間を用いる。測地線の方程式のうち、第 0 成分に注目して測地線の方程式を書き直すと、

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^0}{d\tau^2} + \Gamma^0_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} &= \frac{d^2 x^0}{d\tau^2} + 2\Gamma^0_{01} \frac{dx^0}{d\tau} \frac{dx^1}{d\tau} \\ &= \frac{d^2 x^0}{d\tau^2} + g^{00} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} \frac{dx^0}{d\tau} \frac{dx^1}{d\tau} = \frac{d^2 x^0}{d\tau^2} + g^{00} \frac{dg_{00}}{d\tau} \frac{dx^0}{d\tau} = 0, \end{aligned}$$

のようになる。この式の右辺に  $g_{00}$  を乗じると、

$$\frac{d}{d\tau} \left( g_{00} \frac{dx^0}{d\tau} \right) = 0,$$

が得られる。この結果から、 $g_{00} dx^0/d\tau = \text{const}$  であることが推測できる。そこで、 $g_{00} dx^0/d\tau = \alpha c$  とおき、動径方向の運動のみに限定する意味で  $d\Omega = 0$  とすると、シュワルツシルト解の線素は、

$$-c^2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right) = -\alpha^2 c^2 + \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2,$$

のように変形できるので、

$$dr = -c \sqrt{\alpha^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)} d\tau,$$

なる微分方程式が得られる。ここで、ブラックホールに落下する場合を考え、 $dr$  の符号は負とした。ところで、定数  $\alpha$  は落下する物体の初期状態を示すパラメータである。例えば、距離  $R_0$  に存在するときの速度がゼロであるという初期状態を仮定すれば、 $\alpha^2 = 1 - 2m/R_0$  となる。その場合、半径  $r_0$  からブラックホールの中心 ( $r = 0$ ) に落下するまでの時間は、

$$\begin{aligned} \tau &= \int_{r=r_0}^{r=0} d\tau = -\frac{1}{c} \int_{r_0}^0 \left(\frac{2m}{r} - \frac{2m}{R_0}\right)^{-1/2} dr \\ &< \frac{1}{c\sqrt{2m}} \int_0^{r_0} \sqrt{r} dr = \frac{2r_0^{3/2}}{3c\sqrt{2m}}, \end{aligned}$$

なる不等式が成立するため  $\tau$  が有限の値となる。なお、ここでは  $r_0 < R_0$  とした。よって、落下する本人の時計では有限時間でシュワルツシルト半径を超え、ブラックホールの中心まで落下するのである。

ブラックホールに落下する観測者の時計では有限時間でブラックホールの中心に到達することから、座標系を選べば  $r = 2m$  での特異性を避け、シュワルツシルト半径を通過する軌跡を表現できる座標系があるはずである。導出過程を省略するが、その座標系の例としてクルスカル座標  $[T, R]$  がある。クルスカル座標の線素は、

$$ds^2 = -\frac{32m^2}{r} e^{-r/2m} (dT^2 - dR^2) + r^2 d\Omega^2, \quad (4.10)$$

与えられる。座標軸のうち、 $T$  軸と  $R$  軸のみについて座標系を描くと、図??に示すクルスカル図が得られる。特に光の軌跡は  $ds = 0$  となるので、クルスカル図では、外向きの光が傾きが1、内向きの光は傾きが  $-1$  の直線となる。図??には、 $\pm 45$ 度の角度で開く光円錐を描いておいた。光は光円錐の表面を運動し、質量をもつ一般の物体は光円錐の内部を運動する。

クルスカル座標系  $[T, R]$  では、等半径 ( $r = \text{定数}$ ) の条件は双曲線となり、等時刻 ( $ct = \text{定数}$ ) の条件は原点を通る直線となる。その事実を、クルスカル座標系を形成するための座標変換:

$$T^2 - R^2 = -\left(\frac{r}{2m} - 1\right) e^{r/2m}, \quad \frac{2TR}{T^2 + R^2} = \tanh \frac{ct}{2m},$$

によって示されている。座標変換の第1式が  $[T, R]$  における双曲線を表し、第2式が原点を通る直線を表しているのだ。図??には、等半径と等時間の曲線も図示しておいた。なお、ブラックホールの議論をする場合、原点より上 ( $T \geq 0$ ) に注目する。この図からブラック

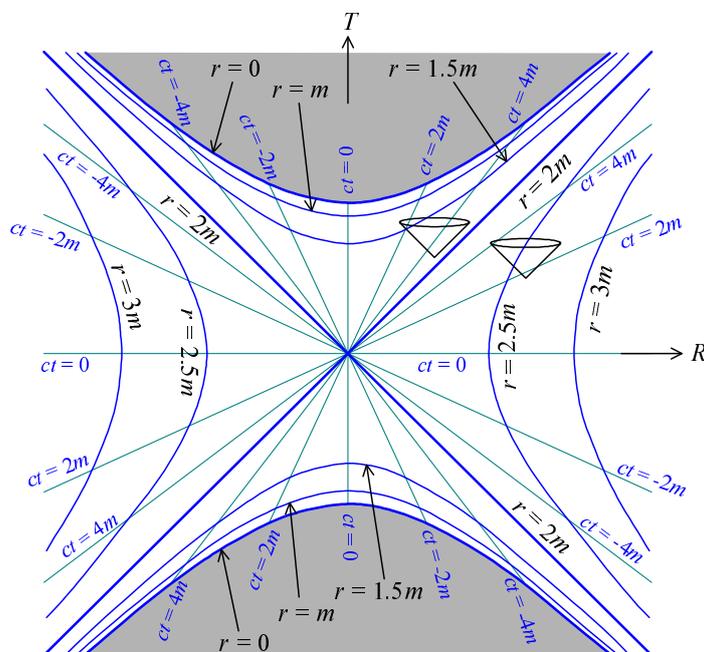


図 4.7: シュワルツシルト解のクルスカール図

ホールの面白い性質がわかる。まず、シュワルツシルト半径の外側 ( $r > 2m$ ) では、外向きの光は無遠くまで逃げることが可能である。質量がある一般の物体は、光円錐の内部を運動するため、速度によってブラックホールの重力場から脱出できるかの運命が分かれる。また、運動軌跡をたどっていくと、必ず、 $ct$ が増加することがわかる。それは、時間が一方通行であることを意味している。

内向きの光や速度の遅い物体はブラックホールの重力場から脱出できず、シュワルツシルトの内側 ( $r < 2m$ ) に入り込む。シュワルツシルトの内側では時空の性質が外側とはまったく異なる。いったん  $r < 2m$  の領域に入ってしまうと、外向きの光でさえ、シュワルツシルトの半径の外側へ逃げることができない。それどころか、 $r$ を増加させることができず、強制的にブラックホールの中心 ( $r = 0$ ) に到達してしまう。つまり、 $r < 2m$  の領域では動径座標が一方通行となる。逆に、奇妙なことであるが、 $ct$ が一方通行ではなくなる。運動方向が光円錐の内部に制限されたとしても、 $ct$ が減少する方向への運動が可能なのだ。シュワルツシルトの半径の内側では、座標  $ct$  の方向を自由に選べ、 $r$ が一方通行ということなのだ。言い換えると、シュワルツシルト半径の内側では、動径座標と時間の立場が入れ替わっている。ブラックホールの中心に到達するまでの間なら、ある程度、時間をさかのぼることも可能ということだ。とは言っても、シュワルツシルト半径の外側へ戻れない

ので、過去に遡ったところで、過去の自分や歴史上の人物に会えるわけではない。あくまでも、ブラックホールの内部という限られた世界における時間移動に過ぎないので、ブラックホールがタイムマシンになるわけではない。

一方、クルスカール図の下半分 ( $T < 0$ ) は、シュワルツシルト半径の内側に物体や光がとどまることができず、必ず、外側に放出される世界を表している。これをホワイトホール解と呼ぶ。ここでは、ホワイトホールは単なる数学上の解として存在するということにとどめておき、物理的な意味については言及しないことにする。

## 4.8 重力赤方偏移

相対性理論によると、重力場は光の軌跡さえ曲げてしまう。シュワルツシルト半径の内側に入った光は、重力を振り切ることができずに重力場に飲み込まれてしまう。シュワルツシルト半径の内側に入らずとも、光は重力場を脱出する際に、エネルギーを失うことだろう。光量子仮説によって、角周波数  $\omega$  の光は  $\hbar\omega$  のエネルギーをもつことが知られているので、エネルギーを失った光は周波数が低下する。このような現象は重力赤方偏移と呼ばれる。

シュワルツシルト解の動径座標  $r_A$  の点 A から座標  $r_B$  の点 B に、動径軸方向に放射した光の赤方偏移を計算してみよう。点 A の固有時間で  $\tau_A$  に放射された光が、点 B の固有時間で  $\tau_B$  に受信されたとしよう。赤方偏移による周波数変化は、 $\omega_B = (d\tau_A/d\tau_B)\omega_A$  で計算できる。この式の意味は、次のように考えると理解できる。点 A から固有時間に従って一定周期 (例えば 1 秒間隔で) 光が送信されている。点 B ではその光を受信した回数を数えているとする。点 B が単位時間で光を受信する回数は  $d\tau_A/d\tau_B$  で表される。例えば、この微係数が 0.6 だとすると、点 A で 1 秒間隔で送信されている光が点 B では 1 秒間に 0.6 回しか受信されないことになる。言い換えると、1 Hz の周波数で送信された光が 0.6 Hz で受信されることを意味している。このように微係数  $d\tau_A/d\tau_B$  が 1 より小さければ赤方偏移していることになる。

まず、無限遠の観測者の時計で時刻  $t_A$  に点 A から光が送信されたとする。この光を点 B で受信される時刻を  $t_B$  とすると、

$$t_B = t_A + \frac{r_B - r_A}{c} + \frac{2m}{c} \log \frac{r_B - 2m}{r_A - 2m},$$

となる。右辺の第 2 項と第 3 項は時刻  $t_A$  と  $t_B$  に無関係な定数であるので、この数式を微分すると  $dt_A = dt_B$  となる。時刻  $t_A$  と  $t_B$  は無限遠の観測者の時計で計測した時刻であるので、固有時間  $\tau_A, \tau_B$  との関係は、

$$d\tau_A = \sqrt{1 - \frac{2m}{r_A}} dt_A, \quad d\tau_B = \sqrt{1 - \frac{2m}{r_B}} dt_B,$$

となる。ただし、点 A と点 B は重力場中に静止しているものとした。この関係式より、

$$\frac{d\tau_A}{d\tau_B} = \sqrt{\frac{1 - 2m/r_A}{1 - 2m/r_B}},$$

が得られる。したがって、

$$\omega_B = \sqrt{\frac{1 - 2m/r_A}{1 - 2m/r_B}} \omega_A,$$

が導かれるので、遠方で受信される光の周波数は、必ず、送信時の周波数より低くなっている。つまり、赤方偏移が起きているということである。

例えば、太陽表面から発信される光は、無限遠で受信した時点で、 $2.12 \times 10^{-6}$  倍に相当する周波数だけ周波数低下 (赤方偏移) することになる。かなり微小であるが、確かに赤方偏移することが示された。赤方偏移の周波数変化は白色矮星のような高密度の天体のほうが大きく、シリウス B 星では  $1.41 \times 10^{-4}$  倍程度の周波数だけ赤方偏移する。太陽表面の光の赤方偏移は  $0.635 \text{ km/s}$  のドップラ効果に、シリウス B 星表面の光の赤方偏移は  $42.3 \text{ km/s}$  のドップラ効果と等しい周波数偏移を起こしている。

## 4.9 重力場の時計の遅れ

重力場で時計が遅れる現象は 1971 年に、ヘイフリー (Hafele) とキーティング (Keating) によって検証された。ヘイフリーとキーティングは、原子時計を地上と航空機に設置し、航空機で東回りに地球を一周した後、西回りに地球を一周し、地球と航空機の原子時計の読みを比較して、重力場における時間の遅れを検証した。航空機の航路から計算では、東回りの飛行機は地上より  $40 \pm 23 \text{ ns}$  遅れ、西回りでは  $275 \pm 21 \text{ ns}$  進むことが予想された。実験の結果、東回りは  $59 \pm 10 \text{ ns}$  遅れ、西回りは  $273 \pm 7 \text{ ns}$  進んでいた。つまり、誤差の範囲内で重力場の時計の遅れが実証されたのである。

シュワルツシルト解を用い、ヘイフリーとキーティングの実験を検証してみよう。ただし、実際の航路でなく、単純なモデルを用いるので上で紹介した実際の実験結果とは一致しないことは最初に述べておく。航空機の巡航高度を  $9000 \text{ m}$ 、巡航速度を  $250 \text{ m/s}$  としよう。航空機は赤道上空を飛行するものとする。

検証するには、航路上の航空機の線素を設定することから始める。赤道上空を飛行する航空機の線素は、

$$-c^2 d\tau^2 = -\left(1 - \frac{2m}{R+h}\right) c^2 dt^2 + (R+h)^2 d\varphi^2,$$

となる。ここで、 $R$  は地球の赤道半径 ( $6378.14 \text{ km}$ )、 $h$  は巡航高度である。また、地球のシュワルツシルト半径は  $8.86 \text{ mm}$  である。さらに、上空を飛行する速度を  $v$  とすれば、 $(R+h) d\varphi =$

$v dt$  なる関係があるので,

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{2m}{R+h} - \frac{(v_e + v)^2}{c^2}} dt \approx \left(1 - \frac{m}{R+h} - \frac{(v_e + v)^2}{2c^2}\right) dt,$$

が得られる。ただし,  $v_e$  は赤道上での自転速度 (465.1 m/s) である。赤道上に固定した固有時間を  $\tau_R$  とおくと, その固定された固有時間と航空機の固有時間の差は,

$$d\tau - d\tau_R = \left(\frac{mh}{R^2} - \frac{(2v_e + v)v}{2c^2}\right) dt,$$

となる。このうち, 右辺の第1項が重力場による変化, 第2項が運動による変化を表す。この実験で検出される時間の差を説明すると次のようになる。まず, 上空は地表より重力が弱いため, 上空の時計は地表より早い。東向き航路の場合, 地球の自転速度に航空機の色度が加算され, 時計が遅れる。西向き航路の場合, 地球の自転速度から航空機の色度が減算されるため時計の遅れが小さい。よって, ほぼ44時間にわたる航行の末, 表??に示す時計のずれが観測される。この表に記載する数値は, 正の数が地表の時計より進んでいることを意味する。

表 4.1: 地球から見た時計の読み

飛行方向	重力場の影響 [ns]	運動の影響 [ns]	合計 [ns]
東回り	174.9	-263.5	-88.6
西回り	174.9	151.9	326.8

この現象を不思議に感じないだろうか。東回りの航空機も西回りの航空機も, 地上の観測者から見ると 250 m/s で赤道上を運動している。それにも関わらず, 東回りと西回りの時計の読みは異なっている。特殊相対性理論によれば, 東回りと西回りとは時計の読みに差が現れないはずである。時計の読みに差が現れたのは, 東回りと西回りの航空機では物理的に差異があるからである。その差異とは重力である。東回りの航空機は, 地球の自転速度が加算され, 実際には 715 m/s で赤道上空を飛行し, 西回りの航空機は時点速度から巡航速度を減じた 215 m/s で赤道上を飛行していることになる。航空機と, 地上に静止する者には, その周回運動のため, 遠心力が作用しているのだが, 周回速度が違っているので彼らに作用する遠心力が異なる。その結果, 地球から作用する重力と遠心力の合力が異なるのである。合力による重力加速度は, 地上では  $9.755 \text{ m/s}^2$ , 東回りの航空機では  $9.678 \text{ m/s}^2$ , 西回りの航空機では  $9.751 \text{ m/s}^2$  となる。この数値を見るとはっきりわかるが, 東回りと西回りの航空機が同じ物理環境であったとは言えない。これが, 東回りと西回りとで時計の読みが異なる理由である。



## 第5章 加速度運動をする観測者の時空

第??章では、加速度運動をする系を静止系から観測した場合について議論した。その場合、観測者が慣性系に存在するため、特殊相対性理論で現象を説明することができた。それに対して、加速度運動する観測者から見た時空を記述するには特殊相対性理論だけではいささか困難である。なぜなら、加速する観測者は慣性力という見かけの力を感じるため、静止系と相対的だとは言えないからである。等価原理によると、加速時に感じる慣性力は重力と等価であるので、加速度運動する観測者から見た時空を記述するには一般相対性理論を導入する。また、第??章で特殊相対性理論によって加速度運動する観測者から見た時空の記述を試みていた。本章では、第??章で導出された現象が一般相対性理論から導かれる現象と比較する。

### 5.1 加速度場の4次元計量

一般相対性理論の処方にしたがい、加速度運動する観測者から見た時空を記述しよう。なお、簡単のため、加速度運動する観測者から見た時空を加速度場と呼ぶことにしよう。加速度場を含め、重力場は曲がった時空であるというのが一般相対性理論の主張である。曲がった時空を表現するには、時空の線素を定義すべきだ。時空の線素とは、微小な座標変化  $[cdt, dx, dy, dz]$  に対応する微小長さである。先に結果を示しておく、 $x$  軸方向の加速度  $a$  による加速度場は、

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - \left(1 + \frac{a}{c^2}x\right)^2 c^2 dt^2, \quad (5.1)$$

なる線素で規定される。これは、加速度運動する観測者が座標原点にいる条件で導かれた線素である。これが本節で導出する結果であるので、この数式の導出過程に関心がない読者は、これ以降の本節の内容は読み飛ばしてもよい。

リーマン幾何学によると、曲がった時空の解析には、微小距離、すなわち、線素を定式化するのが定石である。第??章で説明したように、曲がった時空の線素は、一般形式として、

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (5.2)$$

のように記述される。この数式において、右肩の添え字  $\mu$  や  $\nu$  は指数ではなく、座標の成分を表すことは第??章で説明したとおりである。つまり、 $dx^\mu$  は  $x^\mu$  方向の微小変位という意味である。一方、 $g_{\mu\nu}$  は計量テンソルである。また、この数式にはアインシュタインの総和の規約が適用されている。

重力場を記述するには、4次元の計量テンソル  $g_{\mu\nu}$  を決定することが必要である。リーマン幾何学によれば、計量テンソルから空間を規定する様々な性質が導き出されることになる。つまり、計量テンソル  $g_{\mu\nu}$  には時空の性質を記述するための情報が含まれている。

加速度場を数学的に記述するにあたり、加速度場の観測者が慣性力を感じる方向(つまり、加速度の方向)を  $x$  軸方向に制限しよう。座標系としては、カルテシアン座標系  $[x, y, z]$  を用いることとする。その座標系に時間座標を加え、4次元時空の座標として、 $[x^0, x^1, x^2, x^3] \equiv [ct, x, y, z]$  なる対応付けをしよう。加速度が存在しなければ、時空は特殊相対性理論が適用できるミンコフスキー時空となり、線素が、

$$ds^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2,$$

となるはずである。この時空では、計量テンソルのゼロでない成分は、 $g_{00} = -1$ ,  $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$  のみである。すなわち、計量テンソルの対角成分以外はずべてゼロである。この系が  $x$  軸方向に加速度をもったとしても、ミンコフスキー時空のように、計量テンソルの対角成分以外がゼロとなると考えるのが自然である。しかしながら、加速度によって生じる慣性力の影響で、計量テンソルの対角成分の値はミンコフスキー時空とは異なる値となっているはずである。したがって、加速度場の計量は、

$$ds^2 = -D(dx^0)^2 + A(dx^1)^2 + B(dx^2)^2 + B(dx^3)^2, \quad (5.3)$$

であると考えるのが妥当である。この計量に関して、 $g_{22} = g_{33} = B$  とした。それは、座標軸の中で、加速度方向である  $x$  軸方向だけが特別な方向でなので、計量は  $x$  軸に関して軸対称と考えるのが自然だからである。よって、 $g_{22} = g_{33} = B$  としたのである。さらに、 $y$  軸と  $z$  軸は慣性力と直交するため、 $B$  は定数である。一方、 $A$  と  $D$  については、 $x$  に依存すると考えられる。定常的な加速度場(等加速度場)を考えるのであれば、計量は  $t$  に依存しないはずである。また、 $y$  や  $z$  に依存することも不自然である。

上で述べた仮定のもとで、まず、クリストッフエル記号  $\Gamma^\kappa_{\mu\nu}$  を計算する。クリストッフエル記号は、幾何学的には、微小変位に対する基本ベクトル<sup>1</sup>の変化率であり、空間の湾曲を表現する量である。具体的に、クリストッフエル記号は、

$$\Gamma^\kappa_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\kappa\alpha} \left( \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right),$$

<sup>1</sup>各座標軸方向と尺度を規定するベクトル。

で定義される。そのうち、ゼロでない成分だけを記述すると以下ようになる。

$$\Gamma^1_{00} = \Gamma^0_{01} = \frac{D_{,1}}{2D}, \quad \Gamma^1_{11} = \Gamma^1_{11} = \frac{A_{,1}}{2A}, \quad \Gamma^0_{01} = \frac{D_{,1}}{2A},$$

ここで、カンマ付きの下付き添え字は座標についての偏微分、すなわち、 $f_{,\mu} = \partial f / \partial x^\mu$  を意味する。さらに、クリストッフエル記号を用いてリッチテンソル：

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma^\mu_{\nu\sigma}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial \Gamma^\mu_{\sigma\sigma}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\mu_{\nu\kappa} \Gamma^\kappa_{\sigma\sigma} - \Gamma^\mu_{\sigma\kappa} \Gamma^\kappa_{\nu\sigma},$$

を計算しておこう。リッチテンソルは、幾何学的には空間の湾曲による体積歪みを表す量である。ディンクルの公式を参照して、ゼロでない成分だけを書くと、

$$R_{00} = \frac{D_{,11}}{2A} - \frac{A_{,1}D_{,1}}{2A^2} - \frac{(D_{,1})^2}{4AD} - \frac{A_{,1}D_{,1}}{4A^2},$$

$$R_{11} = -\frac{D_{,11}}{2D} + \frac{(D_{,1})^2}{2D^2} - \frac{A_{,1}D_{,1}}{4AD} - \frac{(D_{,1})^2}{4D^2},$$

のみが挙げられる。ゼロでないリッチテンソルの成分が二つだけであり、しかも、これらの数式のように記述できるのは、計量テンソルが  $x$  にしか依存しない対角成分のみであると制限したからである。リッチテンソルの定義は、一般的には複雑であるので、本節のような制限がなければ非常に複雑な数式になるはずだ。

準備が整ったので、加速度場における計量テンソル  $g_{\mu\nu}$  を求めよう。計量テンソルを得るためには、重力場の基本方程式であるアインシュタインの方程式を解く。重力場の方程式は、

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (5.4)$$

である。ここで、 $R$  はリッチテンソルのトレースで、 $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$  なる数式<sup>2</sup>によって定義される。なお、 $g^{\mu\nu}$  は計量テンソル  $g_{\mu\nu}$  の逆行列である。さらに、 $G$  は万有引力定数 ( $\approx 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg}\cdot\text{s}^2$ )、 $T_{\mu\nu}$  はエネルギー運動量テンソルである。この方程式の左辺  $G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - Rg_{\mu\nu}/2$  は、アインシュタインテンソルとよばれる。アインシュタインテンソルの要素のうち、ゼロではないものは、

$$G_{00} = \frac{D_{,11}}{A} - \frac{(D_{,1})^2}{2AD} - \frac{5A_{,1}D_{,1}}{4A^2},$$

$$G_{11} = -\frac{A_{,1}D_{,1}}{AD},$$

$$G_{22} = G_{33} = B \left( \frac{D_{,11}}{2AD} - \frac{(D_{,1})^2}{4AD^2} - \frac{A_{,1}D_{,1}}{2A^2D} \right),$$

<sup>2</sup>正確には  $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = R^\nu_\nu$  と書けるので、スカラー  $R$  は行列  $R^\nu_\nu$  の対角成分の総和である。だから、 $R$  はリッチテンソルのトレースである。

である。ところで、真空ではエネルギー運動量テンソルがゼロとなるので、(??)の右辺はゼロになる。すなわち、 $G_{\mu\nu} = 0$ を解けばよい。アインシュタインテンソルのうち、独立な成分は、

$$\frac{D_{,11}}{A} - \frac{(D_{,1})^2}{2AD} - \frac{5A_{,1}D_{,1}}{4A^2} = 0, \quad (5.5a)$$

$$\frac{A_{,1}D_{,1}}{AD} = 0, \quad (5.5b)$$

の二つだけである。まず、(??)を(??)に代入すると、

$$D_{,11} - \frac{(D_{,1})^2}{2D} = 0,$$

が得られる。この微分方程式は簡単に解くことができ、

$$D = (C_0 + C_1x)^2,$$

であることがわかる。ここで、 $C_0$ と $C_1$ は積分定数である。積分定数を決定するため、よく知られた非相対論的近似の性質に着目する。第??章で示したように、非相対論的な重力場のポテンシャルを $\phi$ とすると、弱い重力場では計量テンソルに関して、

$$g_{00} \simeq - \left( 1 + \frac{2\phi}{c^2} \right),$$

なる近似式が成立する。さて、 $x$ 軸方向に加速度 $a$ をもつ観測者は、 $x$ 軸方向に $-a$ の慣性力を感じる。アインシュタインの等価原理によれば、その状態は重力加速度が $a$ である一様な重力場と同一であるので、非相対論的なポテンシャルは $\phi = ax$ となるはずである。よって、 $c \rightarrow \infty$ としたときに、 $g_{00} = -D \simeq -(1 + 2ax/c^2)$ となるためには、

$$D = \left( 1 + \frac{a}{c^2}x \right)^2, \quad (5.6)$$

でなければならない。さらに、(??)より、 $A$ は定数になることがわかる。加速度運動をする観測者がこの時空の原点にいるものと仮定し、原点付近ではミンコフスキー空間の計量に近似できることを期待すれば、 $A = B = 1$ となる。したがって、この時空の計量を改めて書くと

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - \left( 1 + \frac{a}{c^2}x \right)^2 c^2 dt^2,$$

が導き出された。ただし、既に述べたように $[x^0, x^1, x^2, x^3] \equiv [ct, x, y, z]$ とした。線素 $ds$ が加速度 $a$ で運動する観測者から見た時空の計量を与えるのだ。加速を継続する限り、静止系からみた観測者の速度が時間の経過とともに大きくなるので、その観測者は前方にいた物体にいずれ追いつき、追い越すことになるだろう。その様子は、加速度運動する観測者の立場で、重力場を落下するように見えるのだ。

## 5.2 加速度場の自由粒子

等加速度運動している観測者が自由粒子を観測したとき、ニュートン力学によると、その自由粒子は放物線運動をしている。一般相対性理論では、加速度運動する観測者から見た自由粒子は、加速度による重力場を自由落下する運動、すなわち、重力場の時空における測地線上の運動として記述できる。その軌跡を求める数式を導出しよう。

### 5.2.1 加速度場の運動方程式

重力場を自由落下する物体の運動は、リーマン幾何学における測地線の方程式によって記述される。加速度場は、重力場の一例であるので、加速度場における物体の運動は測地線の方程式によって記述されなければならない。つまり、物体の座標を  $x^\mu$  とするならば、測地線の方程式:

$$\frac{d^2 x^\kappa}{d\tau^2} + \Gamma^\kappa_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0, \quad (5.7)$$

は、加速度場における自由粒子の運動を決める運動方程式である。この運動方程式は、湾曲した時空の2点を結ぶ最短経路を得るための条件を変分原理によって求められた方程式である。イメージとして、東京とニューヨークを結ぶ最短航路がメルカトル図法で描くと湾曲していることを想像すればよいだろう。また、測地線の方程式の第1項は、座標を固有時間  $\tau$  の2階微分となっている。この方程式は、ニュートン力学における  $d^2\mathbf{x}/dt^2 = 0$  に相当する方程式である。

一般的な運動方程式(??)は、複雑な形状をしているが、本章で取り扱う加速度場では、単純な形で運動方程式が記述できる。運動方程式を解くにあたり、クリストッフェル記号  $\Gamma^\kappa_{\mu\nu}$  を計算すると、

$$\Gamma^0_{10} = \Gamma^0_{01} = \frac{a}{c^2} \left(1 + \frac{a}{c^2}x\right)^{-1}, \quad (5.8)$$

$$\Gamma^1_{00} = \frac{a}{c^2} \left(1 + \frac{a}{c^2}x\right), \quad (5.9)$$

のみがゼロでない成分であることがわかる。一般的なクリストッフェル記号が20個もの独立成分を含むことを考えると、等加速度運動における時空は、運動方程式が大きく簡略化できることを意味する。この計算結果を(??)に代入すると、加速度場での運動方程式:

$$\frac{d^2 ct}{d\tau^2} + \frac{2a}{c^2} \left(1 + \frac{a}{c^2}x\right)^{-1} \frac{dx}{d\tau} \frac{dct}{d\tau} = 0, \quad (5.10a)$$

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + \frac{a}{c^2} \left(1 + \frac{a}{c^2}x\right) \left(\frac{dct}{d\tau}\right)^2 = 0, \quad (5.10b)$$

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} = \frac{d^2 z}{d\tau^2} = 0, \quad (5.10c)$$

を得る。ここで、 $[x^0, x^1, x^2, x^3] \equiv [ct, x, y, z]$ とした。得られた運動方程式は、それぞれ、時間、加速度の方向、それとは垂直な空間座標についての方程式である。

得られた三つの運動方程式を解けば自由粒子の運動が決定できる。特に、(??)は加速度の方向とは無関係な方向における成分であり、せいぜい、 $\tau$ の1次関数であることが容易に予想できる。その1次関数は初期状態における自由粒子の相対速度を規定すれば一意的に決定できるはずだ。加速度に関係するのは、(??)と(??)である。そのうち、(??)は $\tau$ について積分すると、

$$\frac{dct}{d\tau} = cA \left(1 + \frac{a}{c^2}x\right)^{-2}, \quad (5.11)$$

なる形態に書き換えられる。得られた方程式(??)を(??)に代入すれば $x$ が決定できるはずだ。なお、(??)に記述した積分定数 $A$ は、後に示すように運動解析における初期条件を表すことになる。

## 5.2.2 光の軌跡

前項で一様加速度場における自由粒子の軌跡を計算するための関係式を導出した。それでは一様加速度場では光はどのような軌跡を描くのだろうか。加速度場で光の軌跡が湾曲することは第??節で、エレベータの思考実験によって示した。本節では、湾曲する光の軌跡が具体的にどのような曲線を描くのかを調べてみよう。

光の世界線は、特殊相対性理論における光円錐の表面に位置するので、その計量は $ds^2 = 0$ となる。これを(??)に代入すると、

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \left(1 + \frac{a}{c^2}x\right)^2 c^2, \quad (5.12)$$

を得る。この式によって加速度場では光速不変の原理が成立しない。等加速度運動をする観測者が測定する光速度は場所によって異なるのである。計測される光速度が $x$ に依存することから、この光速度を $c(x)$ と記述すると、

$$c(x) = \left(1 + \frac{a}{c^2}x\right) c, \quad (5.13)$$

となる。この結果は、第??節で特殊相対性理論から導いた結果と一致している。特に、 $x = -c^2/a$ で光速がゼロになっている。これはブラックホール理論における事象の地平面の性質に類似している。すなわち、この観測者は加速度 $a$ で運動する限り、 $x \leq -c^2/a$ で発生する事象を観測できない。これは、 $x = -c^2/a$ を出発した光が加速度 $a$ をもつ物体に追いつくことができないという第??節での特殊相対性理論による計算と合致する。

加速度運動する観測者から見た光の軌跡について考えてみよう。ただし、簡単のため、光の運動を  $xy$  平面上に限るものとする。すなわち、 $dz/d\tau = 0$  と仮定するわけだが、当然、この制限は (??) に反するものではない。加速度場の計量 (??) に (??) を代入すると、

$$\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 = c^2 A^2 \left(1 + \frac{a}{c^2}x\right)^{-2}, \quad (5.14)$$

を得る。さらに、(??) より  $dy/d\tau = cB$  となる ( $B$  は定数)。これを利用すると上式は、

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \left[\left(\frac{c^2 A}{a B}\right)^2 - \left(x + \frac{c^2}{a}\right)^2\right] \left(x + \frac{c^2}{a}\right)^{-2}, \quad (5.15)$$

のように変形できる。この式を満たす  $x$  と  $y$  の間には、

$$\left(x + \frac{c^2}{a}\right)^2 + (y - y_0)^2 = \left(\frac{c^2 A}{a B}\right)^2, \quad (5.16)$$

という関係が成立する。ここで、 $y_0$  は積分定数である。この結果より、等加速度運動をする観測者から見た光は円運動をする。第??節で紹介したエレベータの思考実験で、エレベ-

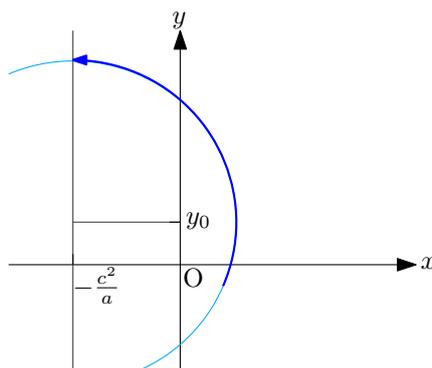


図 5.1: 加速度系から見た光の軌跡

タに入ってきた光は放物線を描くと予想するかもしれないが、それは、非相対論近似である。方程式 (??) について、 $c \rightarrow \infty$  の極限をとると、

$$1 + \frac{2ax}{c^2} = \frac{A^2}{B^2} - \frac{a^2}{c^4}(y - y_0)^2,$$

が得られる。初期状態として、光の速度ベクトルが  $y$  成分しかもっていないと仮定すると  $B = 1$  であり、また、観測者の位置  $x = 0$  において光速が  $c$  であることを要請すると  $A = 1$  である。その条件を代入すると、非相対論近似で、

$$x = -\frac{a}{2c^2}(y - y_0)^2,$$

なる放物線に近似される。この放物線は、 $y = ct$  と  $x = -at^2/2$  によって描かれると考えられる。等加速度による重力場で光が描く円軌道は、非相対論近似で予想される放物線と一致することがわかる。

### 5.2.3 質量のある粒子の軌跡

ニュートン力学では、等加速度運動をする観測者が自由粒子を見ると、その軌跡は放物線を描く。しかし、等加速度による重力場では光が円軌道を描くことがわかったので、質量のある自由粒子も放物線ではないと予想される。では、どのような軌跡を描くだろうか？円が楕円の特別な形態であることを考えると、一般的な自由粒子は楕円軌道を描くのではないかと推測できる。本節では、その推測どおりに自由粒子の軌跡が楕円を描くことを検証する。

質量のある粒子の場合、4次元計量  $ds$  はゼロではない。それでは、質量のある粒子の軌跡はどのようになるのか求めてみよう。測地線の方程式(??)に現れるアフィンパラメータ  $\tau$  に関して、 $ds^2 = -c^2 d\tau^2$  なる関係が成立する場合を仮定する。そうすれば、4次元計量は、

$$-c^2 d\tau^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - \left(1 + \frac{a}{c^2}x\right)^2 c^2 dt^2, \quad (??)$$

と書くことができる。このような仮定のもとでは、パラメータ  $\tau$  は粒子とともに運動する時計の尺度をあらわす性質があるので、 $\tau$  は固有時間とよばれる。

ここでも、 $dz/d\tau = 0$  の制限のもとで、光の軌跡と同様の式変形を適用してみる。導出過程はまったく同じなので、結果だけ示すと、

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \frac{1+B^2}{B^2} \left[ \frac{c^4 A^2}{a^2(1+B^2)} - \left(x + \frac{c^2}{a}\right)^2 \right] \left(x + \frac{c^2}{a}\right)^{-2}, \quad (5.18)$$

なる微分方程式が導出される。この微分方程式を満たす  $x$  と  $y$  は、

$$\frac{a^2(1+B^2)}{c^4 A^2} \left(x + \frac{c^2}{a}\right)^2 + \frac{a^2(1+B^2)^2}{c^4 A^2 B^2} (y - y_0)^2 = 1, \quad (5.19)$$

の関係がある。すなわち、等加速度運動をする観測者から見た質点の軌跡は楕円を描く。つまり、本節冒頭での推測が正しいことが確認できたわけだ。

導出した楕円軌道は、 $c \rightarrow \infty$  の極限ではニュートン力学における放物線に近似できるはずである。疑り深い読者のために検証してみよう。導出した楕円(??)は  $c \rightarrow \infty$  の極限で、

$$x - \frac{c^2}{2a}(A^2 - B^2 - 1) + \frac{a(1+B^2)^2}{2c^2 B^2} (y - y_0)^2 = 0, \quad (5.20)$$

なる式に近似できる。この時点で軌跡は放物線に近似できているが、定数  $A$  と  $B$  を決定したときにニュートン力学で記述される放物線の方程式と一致することを検証すればよい。前節で定義した  $A$  と  $B$  は、

$$A = \frac{1}{c} \left(1 + \frac{a}{c^2}x\right)^2 \frac{dct}{d\tau}, \quad B = \frac{1}{c} \frac{dy}{d\tau},$$

と表される。この定義より、定数  $A$  と  $B$  の間には、

$$B = \frac{A}{c(1 - ax_0/c^2)^2} \frac{dy}{dt},$$

なる関係があることがわかる。ここで、初期条件として、観測対象の自由粒子は  $x = x_0$  のとき  $y$  方向にのみ速度をもち、その速度が、

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{x=x_0} = \left(1 + \frac{a}{c^2}x_0\right) v_y,$$

であるとする。なんとなく奇妙な初期条件の設定のように見えるが、これはニュートン力学において自由粒子の速度の  $y$  成分が  $v_y$  であることを仮定しているのと同じである。この条件のもと、 $A$  と  $B$  の関係は、

$$B = \frac{v_y A}{c(1 - ax_0/c^2)},$$

と書き換えられる。さらに、定数  $A$  を決定するには、 $dct/d\tau$  が必要となる。その導関数については、時空の計量:

$$-d\tau^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - \left(1 + \frac{a}{c^2}x\right)^2 dt^2,$$

に対して、自由粒子が  $x = x_0$  において  $y$  方向のみに  $v_y$  の速度をもつという初期条件を適用すると、

$$\left(\frac{dct}{d\tau}\right)^2 = c \left[ \left(1 + \frac{a}{c^2}x_0\right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \right]^{-1} = \frac{1}{(1 - ax_0/c^2)^2 (1 - v_y^2/c^2)},$$

となるので、定数  $A$  に関して、

$$A^2 = \frac{(1 - ax_0/c^2)^2}{1 - v_y^2/c^2},$$

が成り立つ。そこで、(??) を具体的に書き下すために必要なパラメータを  $c \rightarrow \infty$  の極限のもとで計算すると、

$$A^2 - B^2 - 1 = \frac{2a}{c^2}x_0, \quad \frac{(1 + B^2)^2}{c^2 B^2} = \frac{1}{v_y^2},$$

が得られる。なお、この計算において  $o(c^{-2})$  に該当する小さな項は無視している。この結果を (??) に代入すると、

$$x - x_0 + \frac{a}{2v_y^2}(y - y_0)^2 = 0,$$

が得られる。つまり、等加速度による重力場を落下する自由粒子の軌跡は (??) のような楕円軌道となるが、 $c \rightarrow \infty$  なる非相対論的な近似が成立する条件であれば、ニュートン力学によって計算される放物線と一致する。したがって、光速と比較できる程度までの加速を考慮し、等加速度で運動する観測者から見た自由粒子は、もはや非相対論近似の範囲なく、楕円を描く運動軌跡をたどるのだ。

### 5.3 加速度場における1次元運動

既に述べたように、慣性系から見て等速度で運動する質点は、加速度場では自由落下するように見える。本節では、加速度場を自由落下する運動を時間の関数で表してみる。ただし、簡単のため、質点の運動を  $x$  軸方向のみに制限する。計量 (??) に (??) を代入すると、

$$\frac{dx}{dt} = c \left(1 + \frac{a}{c^2}x\right) \sqrt{1 - \frac{1}{A^2} \left(1 + \frac{a}{c^2}x\right)^2}, \quad (5.21)$$

を得る。この微分方程式を解くと、加速度場を自由落下する質点の変位:

$$x = \left(\tilde{x}_0 + \frac{c^2}{a}\right) \operatorname{sech} \frac{a}{c}(t - \tilde{t}_0) - \frac{c^2}{a}, \quad (5.22)$$

を得る。ここで、 $\tilde{t}_0$  は初期条件を与える積分定数である。また、定数  $A$  については、 $Ac^2/a = \tilde{x}_0 + c^2/a$  という置き換えをした。この式を  $t$  について微分すると、自由落下する質点の速度:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{a}{c} \left(\tilde{x}_0 + \frac{c^2}{a}\right) \operatorname{sech} \frac{a}{c}(t - \tilde{t}_0) \tanh \frac{a}{c}(t - \tilde{t}_0), \quad (5.23)$$

を得る。この時点で積分定数  $\tilde{t}_0$  と  $\tilde{x}_0$  の物理的な意味が見えてくるだろう。時刻に関する定数  $\tilde{t}_0$  は  $dx/dt = 0$  となる時刻であり、その時点での  $x$  座標が  $\tilde{x}_0$  である。これらの結果に対して、 $a/c \rightarrow 0$  なる非相対論近似を計算してみると、 $x \rightarrow x_0 - a(t - \tilde{t}_0)^2/2$ ,  $dx/dt = -a(t - \tilde{t}_0)$  となり、ニュートン力学での等加速度運動をする観測者から見た現象と一致する。

加速度運動する観測者が見た自由粒子の速度  $dx/dt$  は、 $-x$  方向に加速度運動しているように見える。言い換えれば、加速度  $a$  による一様な加速度場における自由落下である。しかしながら、図??に示すように、この落下速度は  $|dx/dt| = (1 + a\tilde{x}_0/c^2)c/2$  なる最大値を迎えた後、減少傾向をたどり、 $x = -c^2/a$  に近づくほど速度はゼロに近づく。このことから、重力加速度  $a$  の一様な重力場を自由落下する粒子は事象の地平面  $x = -c^2/a$  を横切ることができないこともわかる。これはブラックホールに落下する物体を観測しているのと類似する現象である。

質点の変位 (??) に注意して、速度 (??) をさらに書き換えると、

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{a}{c} \left(x + \frac{c^2}{a}\right) \tanh \frac{a}{c}(t - \tilde{t}_0), \quad (5.24)$$

のように書けることに気づくだろう。さらに、(??) で定義される光速  $c(x)$  を用いて、

$$\frac{dx}{dt} = c(x) \tanh \frac{a(t - \tilde{t}_0)}{c},$$

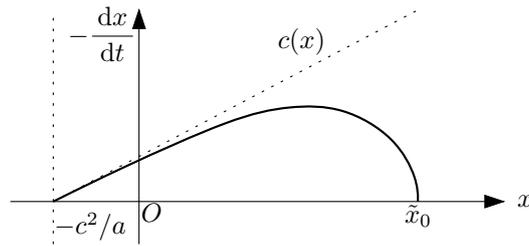


図 5.2: 加速度場の自由粒子の速度と位置

と表すことができることも注意すべきである。つまり、一様な加速度場を自由落下する物体の速度を光速  $c(x)$  との比で考えると、速度は単調増加であることがわかる。すなわち、速度が途中で減少傾向に転じているように見えるのは、あくまでも、計量の基準が変化していることによる見かけの現象である。

## 5.4 初期条件の再考察

前節で、加速度場の中の自由粒子の 1 次元運動について定式化したが、初期条件の与え方がまわりくどい。前節で導出した公式では、 $dx/dt = 0$  となる時刻  $\tilde{t}_0$  と、その時点の位置  $\tilde{x}_0$  が初期条件を与える量であった。このような  $dx/dt$  を主体とした初期条件ではなく、 $t = 0$  における速度と位置で初期条件を記述できないだろうか？

前節では、 $t = 0$  における物理量を用いた記述を敢えて避けていた。なぜなら、速度  $dx/dt$  が  $\tilde{x}_0$  に依存してしまうからである。ニュートン力学では、 $t = 0$  において  $x = x_0$ ,  $dx/dt = v_0$  なる初期条件を設けると、 $dx/dt = v_0 - at$  となる。つまり、ニュートン力学では、 $dx/dt$  は  $x_0$  に依存しない。もう一步考えを進めるなら、加速度場では  $t = 0$  の速度も  $x$  に依存した値になっているということである。つまり、 $t = 0$  のときの速度を初期条件として用いても、それはニュートン力学で用いた速度の初期条件  $v_0$  とは意味が異なるのである。

加速度場では光速が  $x$  の関数である。実際、これが理由で  $dx/dt$  が  $x$  に依存した量となるのである。つまり、速度  $dx/dt$  を  $c(x)$  で正規化すれば、 $x$  の依存性が取り除けるのではないか。正規化された速度は、

$$\frac{1}{c(x)} \frac{dx}{dt} = -\tanh \frac{a}{c}(t - \tilde{t}_0), \quad (5.25)$$

となり、予想どおり、 $x$  に依存しない量となる。それでは、速度を光速  $c(x)$  で正規化した量に対して初期条件を与えよう。言いかえると、 $t = 0$  において、 $x = x_0$ ,  $dx/dt = \beta_0 c(x_0)$

を初期条件として、公式を書き直すのだ。すると、

$$\frac{1}{c(x)} \frac{dx}{dt} = -\tanh\left(\frac{at}{c} - \operatorname{artanh} \beta_0\right), \quad (5.26)$$

$$x + \frac{c^2}{a} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_0^2}} \left(x_0 + \frac{c^2}{a}\right) \operatorname{sech}\left(\frac{at}{c} - \operatorname{artanh} \beta_0\right), \quad (5.27)$$

が得られる。また、任意の時刻  $t$  において  $dx/dt = \beta c(x)$  とすると

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta_0^2}} \left(x_0 + \frac{c^2}{a}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(x + \frac{c^2}{a}\right), \quad (5.28)$$

が成り立つ。この結果は、一様な加速度場を自由落下する物体の位置が示す面白い規則性を表現している。その数式が表す意味を図で示すと図??のようになる。その物体の位置には基準の位置  $A$  が存在し、現時点での速度  $\beta$  が与えられたとき、その時点における物体の位置は、基準の位置を事象の地平面 ( $x = -c^2/a$ ) を中心にしてローレンツ収縮して得られる位置と一致するということである。つまり、一様な加速度場は事象の地平面を中心にしたローレンツ収縮によってつくられる座標系であるとも考えることもできる。

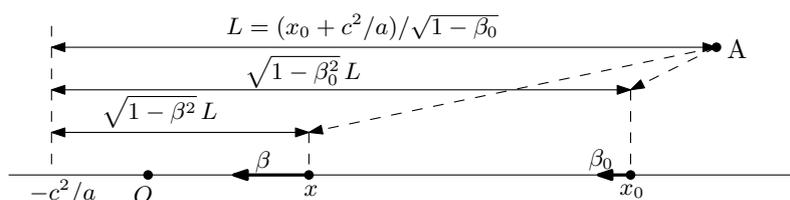


図 5.3: 加速度場を自由落下する物体の位置

## 5.5 自由粒子の時間

加速度場中の自由粒子と一緒に運動する時計について考えてみよう。これまでにでてきた固有時間  $\tau$  が運動する時計の読みを表す。固有時間の尺度は 4 次元計量で定義されている。時計の運動を  $x$  軸方向のみに制限すると、

$$d\tau = \sqrt{\left(1 + \frac{a}{c^2}x\right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2} dt, \quad (5.29)$$

によって固有時間の尺度は与えられる。この微分方程式を解くと  $\tau$  と  $t$  の変換式:

$$\tau = \frac{c}{a} \frac{1 + ax_0/c^2}{\sqrt{1-\beta_0^2}} \left[ \tanh\left(\frac{at}{c} - \operatorname{artanh} \beta_0\right) + \beta_0 \right], \quad (5.30)$$

得ることができる。なお、この変換式は、 $t = 0$  のときに  $\tau = 0$  となるように積分定数を選んだ。さらに、任意の時刻において  $dx/dt = \beta c(x)$  とするならば、

$$\tau = \frac{c}{a} \frac{\beta_0 - \beta}{\sqrt{1 - \beta_0^2}} \left( 1 + \frac{a}{c^2} x_0 \right), \quad (5.31)$$

を得ることができる。この式により、初期座標と初期速度が既知である自由粒子が加速度場の中で、任意速度になるまでに自由粒子の時計が刻んだ時間を簡単に計算できる。

## 5.6 双子のパラドックス

本節では、一様な加速度場の概念を用いて双子のパラドックスにおける矛盾点を解消しよう。双子のパラドックスは、アインシュタインが特殊相対性理論での議論の限界を示すために用いたらしいが、皮肉にも、相対性理論の反論者が相対性理論を否定するために用いられた題材である。

マークとマイクは双子である。ある日、マイクは宇宙船で地球を出発し、等速度  $v$  で地球を離れた。そして、急速な U ターンをして、速度  $v$  で地球に帰還した。一方、マークは地球に残ったままである。マークから見るとマイクの宇宙船は相対速度  $v$  で運動しているので、マイクの時計が遅れて見えるはずである。ところが、マイクから見ると、地球の方が相対速度  $v$  で運動しているように見えるので、マイクはマークの時計の方が遅れていると言うだろう。つまり、双方とも相手の時計が自分の時計より遅く進むことを主張する。自分より若い人より若いということはある得ない。すなわち、双方の主張は理にかなっていない。それでは、地球に戻ったマイクは、自分より若いマークに会ってしまうのか、それとも、老いたマークに会うのか？ これが双子のパラドックスである。

地球に残っているマークと違い、マイクは出発時と U ターン時と帰還時に加速度運動をするため、特殊相対性理論のみで議論することはできないのである。このパラドックスは、マークとマイクの固有時間を積分して比較することによって解決できるが、宇宙船に乗ったマイクから見た世界は、加速度による重力場なので固有時間の計算には一般相対性理論が必要となる。これまでに等加速度運動による重力場における固有時間計算の処方を与えておいたので、シンプルにパラドックスを解決できるであろう。

**マークから見た世界** マークは地球に残っている (慣性系にいる) ので、特殊相対性理論だけでマークが見る世界を説明できてしまう。マークの時計で  $T_A/2$  が経過する間、マイクが地球から遠ざかっているとする。マイクは帰り道も速度  $v$  で戻ってくるので、帰りに要する時間は、マークの時計で  $T_A/2$  である。つまり、往復に要する時間は、マークの時計で  $T_A$  である。マークがマイクの時計を見た場合、見事にローレンツ変換の影響を受け

ているはずである。マイクの時計が  $T_B$  の時を刻む間にマイクの宇宙船が往復したとすると、これらの間には

$$T_B = \sqrt{1 - \beta^2} T_A, \quad (5.32)$$

となる。これは、単なる時間のローレンツ収縮の効果である。この結果より、地球から見た宇宙船の世界線と時計の読みをグラフに描くと図??のようになる。

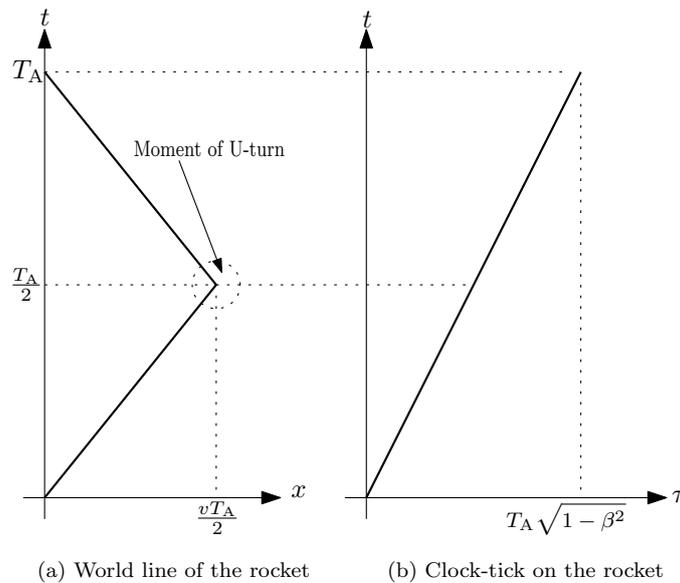


図 5.4: 地球から見た宇宙船の世界線と時計

**マイクから見た世界** 宇宙船に乗ったマイクには、マークと違い、慣性系ではない時空間にいる時間帯がある。地球からの出発時に加速をしなければならないし、Uターンをする時間もあり、地球に到着するときには減速をする必要がある。その3箇所ではマイクは加速度運動しているため、慣性力というみかけの力を感じている。等価原理によると、慣性力と重力は区別がつかないため、マイクが慣性力を感じている区間では、重力場にマイクがいたと解釈できるのだ。つまり、加速度をもつ3箇所が特殊相対性理論では議論できない区間となる。上の計算の状況では、加速度運動するマイクは一瞬で  $v$  まで加速し、一瞬でUターンし、一瞬で地球上に静止しなければならない。非現実的な舞台設定ではあるが、これまでに導出した加速度場の式を適用し、その結果に対して  $a \rightarrow \infty$  の極限をとれば解決できるであろう。

出発時の加速行程について考えよう。マイク自身が一瞬で加速を完了することを仮定すると、加速に要する時間は、マイクの時計で  $T_B^{(1)} = 0$  である。マイクから見たマークの時計の読みはどうなっているであろうか？ 観測者マイクが加速しているため、特殊相対性理論は使えない。その代わりに、地球を自由粒子とみなし、(??)を使用することができる。初

期条件を  $x_0 = 0, \beta_0 = 0$ , 終了条件を  $\beta = -v/c$  とし、公式を適用し、 $a \rightarrow \infty$  の極限値を計算すると、 $T_A^{(1)} = 0$  となる。

加速を完了したマイクは自分の時計で  $T_B^{(2)} = T_B/2$  の間、等速度  $v$  で運動したとする。この仮定は特殊相対性理論が適用できる。マイクから見たマークの時計は、その間に  $T_A^{(2)} = \sqrt{1-\beta^2} T_B/2$  だけ時間を刻むはずだ。

では、Uターン行程での時計の読みについて考察しよう。現実的ではないが、マイク自身が一瞬にしてUターンしたと仮定すると、マイクの時計では  $T_B^{(3)} = 0$  しか時間経過しないことになる。マイクが見たマークの時計は、加速度場の自由粒子の時計の問題なので、(??)を適用する。まず、既に速度  $v$  での等速運動行程を  $T_B/2$  の時間だけ持続しているので、Uターン行程を開始するときには、地球はマイクの後方  $vT_B/2$  の位置に移動している。つまり、 $x_0 = -vT_B/2$  である。また、初期速度は  $\beta_0 = -v/c$ , そして、Uターン後には逆向きの同じ速さになっているはずなので、終了速度は  $\beta = v/c$  である。この条件を公式に代入し、 $a \rightarrow -\infty$  を適用すると、Uターン行程中にマークの時計が刻んだ時間は  $T_A^{(3)} = (v^2/c^2) T_B/\sqrt{1-\beta^2}$  となる。

帰り道の行程は前半と対象であるので、既に用いた値をそのまま使えばよい。帰りの等速度行程においては、 $T_B^{(4)} = T_B^{(2)}, T_A^{(4)} = T_A^{(2)}$  が成り立つ。そして、最後の減速行程についても  $T_B^{(5)} = T_B^{(1)}, T_A^{(5)} = T_A^{(1)}$  となる。

上で説明した時計の読みをつなぎ合わせ、全行程におけるマークとマイクの時計の読みを比較しよう。マイクの時計の読みは、

$$T_B^{(1)} + T_B^{(2)} + T_B^{(3)} + T_B^{(4)} + T_B^{(5)} = T_B,$$

となり、マークの時計の読みは、

$$T_A^{(1)} + T_A^{(2)} + T_A^{(3)} + T_A^{(4)} + T_A^{(5)} = \frac{T_B}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

となる。全行程の間にマークの時計が刻んだこの時間を  $T_A$  とおくと

$$T_B = \sqrt{1-\beta^2} T_A, \tag{5.33}$$

が導き出せる。結果として、宇宙船で移動したマークの時計の読みが小さいことが検証されたことになる。

ここまでの計算結果より、宇宙船から見た地球の世界線と時計の読みをグラフに描くと図??のようになる。このグラフの形状は、明らかに図??とは異なる。つまり、宇宙船に乗ったマイクは、加速度運動のため慣性力を感じる区間があるので、地球上にいるマークが見る世界とは相対的でないことがこのグラフから読みとれる。特に印象的な区間は、地球に向かってUターンする区間である。ここでは、Uターンが一瞬にして完了するものとした。

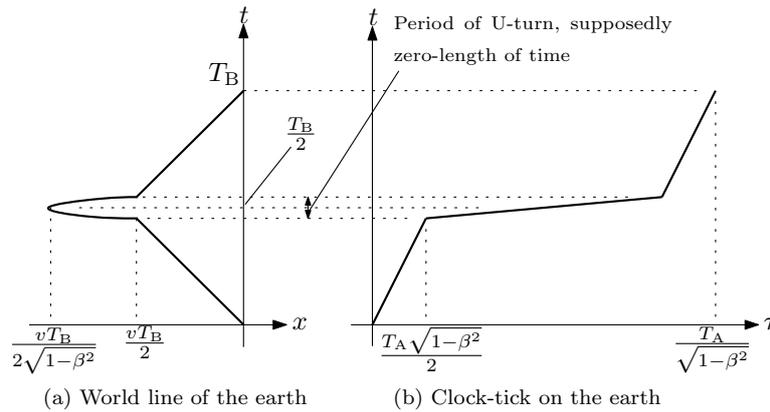


図 5.5: 宇宙船から見た地球の世界線と時計

その一瞬で、マークが観測する地球の世界線は遠くに移動し、元の位置に戻る。また、マークが観測する地球の時計の読みは一瞬にして長い時間分の読みを刻むのである。

**二者の観測の比較** マークから見た時計とマイクから見た時計の双方を計算した結果、全工程中での時計の刻みについて、双方ともまったく同じ関係式を得ることができた。したがって、双子のパラドックスにおける矛盾点は解消され、最終的にはマイクがマークより若くなっていることがわかった。

双子のパラドックスが浮上した原因は、Uターン行程での時計の読みについて考慮しなかったことである。仮に、Uターンが一瞬で完了したと仮定しても、それにより非常に大きな慣性力がかかるため、一般相対論的效果により、地球の時計が一瞬にして大きく進んでしまうのである。

## 5.7 クルスカル図

質点による重力場(シュワルツシルト解)において光円錐が場所によらず、 $\pm 45^\circ$ の角度で開くような座標系としてクルスカル座標  $[T, R]$  を描き、事象の地表面を境に時空の性質が変わることを図示した。等加速度運動によって生じる重力場についても、同様に、クルスカル座標を計算することができる。

等加速度運動による重力場のクルスカル座標は、

$$ds^2 = -\frac{4c^4}{a^2}(dT^2 - dX^2) + dy^2 + dz^2, \quad (5.34)$$

なる線素で表される。光の軌跡は  $ds = 0$  を満たすので、確かにこの座標  $[T, X]$  では、光の

軌跡は常に  $\pm 45^\circ$  の傾きをもっている。また、クルスカル座標は座標  $[ct, x]$  との間に、

$$T^2 - X^2 = -\left(1 + \frac{a}{c^2}x\right), \quad \frac{2TX}{T^2 + X^2} = \tanh \frac{at}{c},$$

なる関係で結ばれている。図??に示すように、 $x$  が一定の線は双曲線に、 $ct$  が一定の線は原点を通る直線になる。加速度場の事象の地平面  $x = -c^2/a$  は確かにシュワルツシルト解の事象の地平面と同様の形状になっている。

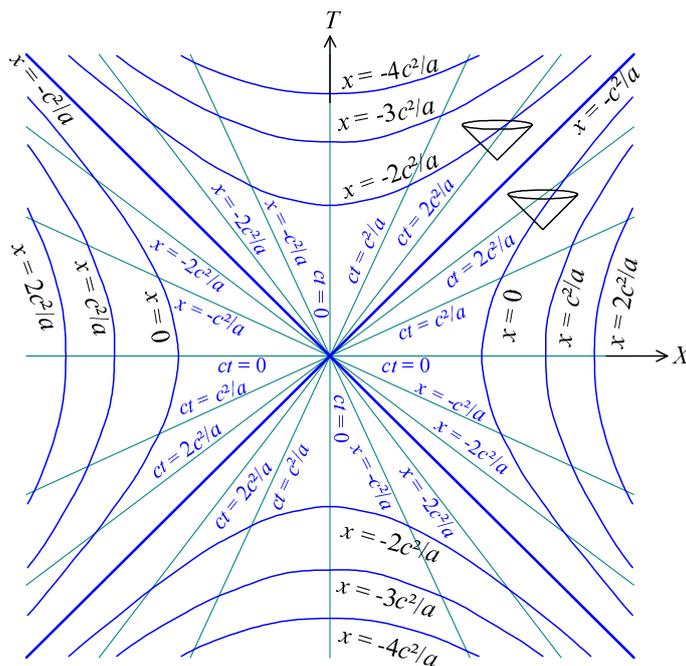


図 5.6: 加速度場のクルスカル図

あらゆる物質は超光速で運動できないので、クルスカル座標系における物質の世界線は光円錐の内部を走るはずだ。そのように考えて図??を見ると、現時点で  $x > -c^2/a$  に存在する物質も、光速で運動できない限り、事象の地平面となる  $x = -c^2/a$  をいづれ横切ることになる。いったん事象の地平面を横切ると、どんなに速度を変化しても (光速を超えられないが)、その物質は事象の地平面を超えてもとの領域に戻る事が不可能である。加速度運動する観測者から見る時空は、ブラックホールと同様の性質をもっているのだ。

加速度による重力場における運動方程式を解いた結果、その重力場を自由落下する質点は事象の地平面に対応する  $x = -c^2/a$  に近づくとつれ、速度が低下し、地平面を横切ることができない。その現象は座標系の取り方による見かけの現象であり、自由落下する質点から見れば、単に慣性系を問う速度運動しているだけなので、加速度運動する観測者の  $c^2/a$  より隔てた後方に移動することは可能である。それが、事象の地平面であらゆる質点が停止する現象が見かけの現象であるという理由である。重力にしたがい落下する一般の物

体が衣装の地平面を横切ることが可能であることをクルスカール座標系は示しているのだ。しかし、重力に逆らって事象の地平面を横切るとは不可能である。

等加速度運動をする観測者から見た時空においても、クルスカール座標をつくとホワイトホールに相当する現象が現れている。その現象は、クルスカール図の中央下部である。その領域では、光速を超えない限り、どのような速度で運動しても、 $x$ の負の方向から事象の地平面を超えて $x > 0$ の領域に到達することができるのである。現在の物理学では、そのような解は棄却することが常である。このようなホワイトホールとしての解釈は、物理的な意味を伴うのか、単なる数学の産物なのか意見が分かれるところかもしれない。本書では、ホワイトホールの議論はやめておこう。

## 5.8 リンドラー座標系

本章ではアインシュタインの方程式を解いて等加速度運動をする観測者から見た加速度場の時空を計算した。本章で取り上げた時空と同等の座標系が既に提唱されているので、その座標系について紹介する。その座標系は、リンドラー座標系と呼ばれ、本章と同様に、カルテシアン座標 $[\xi, \eta, \zeta]$ と時間座標 $t$ を組み合わせた座標によって、

$$ds^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 - \alpha^2 \xi^2 c^2 dt^2, \quad (5.35)$$

なる線素で表現される。この中で $\alpha$ が加速度に関するパラメータである。しかも、 $\alpha$ は長さの逆数にあたるディメンジョンをもつ。容易に予想できるように、

$$\alpha\xi = 1 + \frac{ax}{c^2}, \quad \eta = y, \quad \zeta = z,$$

の対応で本章で導出した加速度場の線素と一致する。この対応関係からわかるように、リンドラー座標系は、事象の地平面が $\xi = 0$ で形成されるようになっていて、 $\xi = 1/\alpha$ に観測者が存在するモデルである。その弱点をあえて指摘するなら、 $a \rightarrow 0$ の極限をとったとき、 $\alpha\xi \rightarrow 1$ となるので、変数として使いたい $\xi$ が等速度運動への拡張で定数になってしまう。つまり、等加速度運動への拡張に対して難がある座標系である。

リンドラー座標系は、いくつかの相対性理論のテキスト<sup>3</sup>に掲載されている。リンドラー座標系が等加速度運動する観測者が見た重力場であることは、脚注に挙げたテキストによると、

$$\xi' \equiv \frac{\cosh \alpha ct}{\alpha}, \quad ct' \equiv \frac{\sinh \alpha ct}{\alpha},$$

<sup>3</sup>例えば、Derek Raine, Edwin Thomas, “Black Holes,” Imperial College Press, ISBN 1-86094-586-4, p.41, 2005.

なる変数変換によって説明されている。ここで、双曲線関数に与えられる変数が  $\alpha ct$  であることに注意しておこう。双曲線関数のように、ディメンジョンが定まらない関数に与える変数は無次元化でなければならないのだ。上記の変数変換によって、時空の線素は、

$$ds^2 = d\xi'^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 - c^2 dt'^2,$$

のように書き換えられる。この数式は、時空  $[ct', \xi', \eta, \zeta]$  がミンコフスキー空間であることを意味する。座標  $\xi'$  と  $ct'$  は時刻  $t$  に対して双曲線関数で与えられている。つまり、 $\xi'$  と  $ct'$  は双曲線運動における座標である。時空における双曲線運動とは、ニュートン力学における等加速度運動に相当するのでリンドラー座標系は等加速度運動する観測者から見た加速度場である。

リンドラー座標系は筆者にとってはショックであった。本書で示した導出は筆者が加速度場の時空を表現することを目的に独自に展開した過程であったのだが、すでにリンドラー座標系は加速度場を表現する座標系として知られていたからだ。結果的に筆者が見つけたと思っていた座標系は二番煎じだったことになる。

