

第5章 加速度運動をする観測者の時空

第??章では、加速度運動をする系を静止系から観測した場合について議論した。その場合、観測者が慣性系に存在するため、特殊相対性理論で現象を説明することができた。それに対して、加速度運動する観測者から見た時空を記述するには特殊相対性理論だけではいささか困難である。なぜなら、加速する観測者は慣性力という見かけの力を感じるため、静止系と相対的だとは言えないからである。等価原理によると、加速時に感じる慣性力は重力と等価であるので、加速度運動する観測者から見た時空を記述するには一般相対性理論を導入する。また、第??章で特殊相対性理論によって加速度運動する観測者から見た時空の記述を試みていた。本章では、第??章で導出された現象が一般相対性理論から導かれる現象と比較する。

5.1 加速度場の4次元計量

一般相対性理論の処方にしたがい、加速度運動する観測者から見た時空を記述しよう。なお、簡単のため、加速度運動する観測者から見た時空を加速度場と呼ぶことにしよう。加速度場を含め、重力場は曲がった時空であるというのが一般相対性理論の主張である。曲がった時空を表現するには、時空の線素を定義すべきだ。時空の線素とは、微小な座標変化 $[cdt, dx, dy, dz]$ に対応する微小長さである。先に結果を示しておく、 x 軸方向の加速度 a による加速度場は、

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - \left(1 + \frac{a}{c^2}x\right)^2 c^2 dt^2, \quad (5.1)$$

なる線素で規定される。これは、加速度運動する観測者が座標原点にいる条件で導かれた線素である。これが本節で導出する結果であるので、この数式の導出過程に関心がない読者は、これ以降の本節の内容は読み飛ばしてもよい。

リーマン幾何学によると、曲がった時空の解析には、微小距離、すなわち、線素を定式化するのが定石である。第??章で説明したように、曲がった時空の線素は、一般形式として、

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (5.2)$$

のように記述される。この数式において、右肩の添え字 μ や ν は指数ではなく、座標の成分を表すことは第??章で説明したとおりである。つまり、 dx^μ は x^μ 方向の微小変位という意味である。一方、 $g_{\mu\nu}$ は計量テンソルである。また、この数式にはアインシュタインの総和の規約が適用されている。

重力場を記述するには、4次元の計量テンソル $g_{\mu\nu}$ を決定することが必要である。リーマン幾何学によれば、計量テンソルから空間を規定する様々な性質が導き出されることになる。つまり、計量テンソル $g_{\mu\nu}$ には時空の性質を記述するための情報が含まれている。

加速度場を数学的に記述するにあたり、加速度場の観測者が慣性力を感じる方向(つまり、加速度の方向)を x 軸方向に制限しよう。座標系としては、カルテシアン座標系 $[x, y, z]$ を用いることとする。その座標系に時間座標を加え、4次元時空の座標として、 $[x^0, x^1, x^2, x^3] \equiv [ct, x, y, z]$ なる対応付けをしよう。加速度が存在しなければ、時空は特殊相対性理論が適用できるミンコフスキー時空となり、線素が、

$$ds^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2,$$

となるはずである。この時空では、計量テンソルのゼロでない成分は、 $g_{00} = -1$, $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$ のみである。すなわち、計量テンソルの対角成分以外はずべてゼロである。この系が x 軸方向に加速度をもったとしても、ミンコフスキー時空のように、計量テンソルの対角成分以外がゼロとなると考えるのが自然である。しかしながら、加速度によって生じる慣性力の影響で、計量テンソルの対角成分の値はミンコフスキー時空とは異なる値となっているはずである。したがって、加速度場の計量は、

$$ds^2 = -D(dx^0)^2 + A(dx^1)^2 + B(dx^2)^2 + B(dx^3)^2, \quad (5.3)$$

であると考えるのが妥当である。この計量に関して、 $g_{22} = g_{33} = B$ とした。それは、座標軸の中で、加速度方向である x 軸方向だけが特別な方向でなので、計量は x 軸に関して軸対称と考えるのが自然だからである。よって、 $g_{22} = g_{33} = B$ としたのである。さらに、 y 軸と z 軸は慣性力と直交するため、 B は定数である。一方、 A と D については、 x に依存すると考えられる。定常的な加速度場(等加速度場)を考えるのであれば、計量は t に依存しないはずである。また、 y や z に依存することも不自然である。

上で述べた仮定のもとで、まず、クリストッフェル記号 $\Gamma^\kappa_{\mu\nu}$ を計算する。クリストッフェル記号は、幾何学的には、微小変位に対する基本ベクトル¹の変化率であり、空間の湾曲を表現する量である。具体的に、クリストッフェル記号は、

$$\Gamma^\kappa_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\kappa\alpha} \left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right),$$

¹各座標軸方向と尺度を規定するベクトル。

で定義される。そのうち、ゼロでない成分だけを記述すると以下ようになる。

$$\Gamma^1_{00} = \Gamma^0_{01} = \frac{D_{,1}}{2D}, \quad \Gamma^1_{11} = \Gamma^1_{11} = \frac{A_{,1}}{2A}, \quad \Gamma^0_{01} = \frac{D_{,1}}{2A},$$

ここで、カンマ付きの下付き添え字は座標についての偏微分、すなわち、 $f_{,\mu} = \partial f / \partial x^\mu$ を意味する。さらに、クリストッフエル記号を用いてリッチテンソル：

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma^\mu_{\nu\sigma}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial \Gamma^\mu_{\sigma\sigma}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\mu_{\nu\kappa} \Gamma^\kappa_{\sigma\sigma} - \Gamma^\mu_{\sigma\kappa} \Gamma^\kappa_{\nu\sigma},$$

を計算しておこう。リッチテンソルは、幾何学的には空間の湾曲による体積歪みを表す量である。ディンクルの公式を参照して、ゼロでない成分だけを書くと、

$$R_{00} = \frac{D_{,11}}{2A} - \frac{A_{,1}D_{,1}}{2A^2} - \frac{(D_{,1})^2}{4AD} - \frac{A_{,1}D_{,1}}{4A^2},$$

$$R_{11} = -\frac{D_{,11}}{2D} + \frac{(D_{,1})^2}{2D^2} - \frac{A_{,1}D_{,1}}{4AD} - \frac{(D_{,1})^2}{4D^2},$$

のみが挙げられる。ゼロでないリッチテンソルの成分が二つだけであり、しかも、これらの数式のように記述できるのは、計量テンソルが x にしか依存しない対角成分のみであると制限したからである。リッチテンソルの定義は、一般的には複雑であるので、本節のような制限がなければ非常に複雑な数式になるはずだ。

準備が整ったので、加速度場における計量テンソル $g_{\mu\nu}$ を求めよう。計量テンソルを得るためには、重力場の基本方程式であるアインシュタインの方程式を解く。重力場の方程式は、

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (5.4)$$

である。ここで、 R はリッチテンソルのトレースで、 $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ なる数式²によって定義される。なお、 $g^{\mu\nu}$ は計量テンソル $g_{\mu\nu}$ の逆行列である。さらに、 G は万有引力定数 ($\approx 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg}\cdot\text{s}^2$)、 $T_{\mu\nu}$ はエネルギー運動量テンソルである。この方程式の左辺 $G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - Rg_{\mu\nu}/2$ は、アインシュタインテンソルとよばれる。アインシュタインテンソルの要素のうち、ゼロではないものは、

$$G_{00} = \frac{D_{,11}}{A} - \frac{(D_{,1})^2}{2AD} - \frac{5A_{,1}D_{,1}}{4A^2},$$

$$G_{11} = -\frac{A_{,1}D_{,1}}{AD},$$

$$G_{22} = G_{33} = B \left(\frac{D_{,11}}{2AD} - \frac{(D_{,1})^2}{4AD^2} - \frac{A_{,1}D_{,1}}{2A^2D} \right),$$

²正確には $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = R^\nu_\nu$ と書けるので、スカラー R は行列 R^ν_ν の対角成分の総和である。だから、 R はリッチテンソルのトレースである。

である。ところで、真空ではエネルギー運動量テンソルがゼロとなるので、(??)の右辺はゼロになる。すなわち、 $G_{\mu\nu} = 0$ を解けばよい。アインシュタインテンソルのうち、独立な成分は、

$$\frac{D_{,11}}{A} - \frac{(D_{,1})^2}{2AD} - \frac{5A_{,1}D_{,1}}{4A^2} = 0, \quad (5.5a)$$

$$\frac{A_{,1}D_{,1}}{AD} = 0, \quad (5.5b)$$

の二つだけである。まず、(??)を(??)に代入すると、

$$D_{,11} - \frac{(D_{,1})^2}{2D} = 0,$$

が得られる。この微分方程式は簡単に解くことができ、

$$D = (C_0 + C_1x)^2,$$

であることがわかる。ここで、 C_0 と C_1 は積分定数である。積分定数を決定するため、よく知られた非相対論的近似の性質に着目する。第??章で示したように、非相対論的な重力場のポテンシャルを ϕ とすると、弱い重力場では計量テンソルに関して、

$$g_{00} \simeq - \left(1 + \frac{2\phi}{c^2} \right),$$

なる近似式が成立する。さて、 x 軸方向に加速度 a をもつ観測者は、 x 軸方向に $-a$ の慣性力を感じる。アインシュタインの等価原理によれば、その状態は重力加速度が a である一様な重力場と同一であるので、非相対論的なポテンシャルは $\phi = ax$ となるはずである。よって、 $c \rightarrow \infty$ としたときに、 $g_{00} = -D \simeq -(1 + 2ax/c^2)$ となるためには、

$$D = \left(1 + \frac{a}{c^2}x \right)^2, \quad (5.6)$$

でなければならない。さらに、(??)より、 A は定数になることがわかる。加速度運動をする観測者がこの時空の原点にいるものと仮定し、原点付近ではミンコフスキー空間の計量に近似できることを期待すれば、 $A = B = 1$ となる。したがって、この時空の計量を改めて書くと

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - \left(1 + \frac{a}{c^2}x \right)^2 c^2 dt^2,$$

が導き出された。ただし、既に述べたように $[x^0, x^1, x^2, x^3] \equiv [ct, x, y, z]$ とした。線素 ds が加速度 a で運動する観測者から見た時空の計量を与えるのだ。加速を持続する限り、静止系からみた観測者の速度が時間の経過とともに大きくなるので、その観測者は前方にいた物体にいずれ追いつき、追い越すことになるだろう。その様子は、加速度運動する観測者の立場で、重力場を落下するように見えるのだ。

5.2 加速度場の自由粒子

等加速度運動している観測者が自由粒子を観測したとき、ニュートン力学によると、その自由粒子は放物線運動をしている。一般相対性理論では、加速度運動する観測者から見た自由粒子は、加速度による重力場を自由落下する運動、すなわち、重力場の時空における測地線上の運動として記述できる。その軌跡を求める数式を導出しよう。

5.2.1 加速度場の運動方程式

重力場を自由落下する物体の運動は、リーマン幾何学における測地線の方程式によって記述される。加速度場は、重力場の一例であるので、加速度場における物体の運動は測地線の方程式によって記述されなければならない。つまり、物体の座標を x^μ とするならば、測地線の方程式:

$$\frac{d^2 x^\kappa}{d\tau^2} + \Gamma^\kappa_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0, \quad (5.7)$$

は、加速度場における自由粒子の運動を決める運動方程式である。この運動方程式は、湾曲した時空の2点を結ぶ最短経路を得るための条件を変分原理によって求められた方程式である。イメージとして、東京とニューヨークを結ぶ最短航路がメルカトル図法で描くと湾曲していることを想像すればよいだろう。また、測地線の方程式の第1項は、座標を固有時間 τ の2階微分となっている。この方程式は、ニュートン力学における $d^2\mathbf{x}/dt^2 = 0$ に相当する方程式である。

一般的な運動方程式(??)は、複雑な形状をしているが、本章で取り扱う加速度場では、単純な形で運動方程式が記述できる。運動方程式を解くにあたり、クリストッフエル記号 $\Gamma^\kappa_{\mu\nu}$ を計算すると、

$$\Gamma^0_{10} = \Gamma^0_{01} = \frac{a}{c^2} \left(1 + \frac{a}{c^2}x\right)^{-1}, \quad (5.8)$$

$$\Gamma^1_{00} = \frac{a}{c^2} \left(1 + \frac{a}{c^2}x\right), \quad (5.9)$$

のみがゼロでない成分であることがわかる。一般的なクリストッフエル記号が20個もの独立成分を含むことを考えると、等加速度運動における時空は、運動方程式が大きく簡略化できることを意味する。この計算結果を(??)に代入すると、加速度場での運動方程式:

$$\frac{d^2 ct}{d\tau^2} + \frac{2a}{c^2} \left(1 + \frac{a}{c^2}x\right)^{-1} \frac{dx}{d\tau} \frac{dct}{d\tau} = 0, \quad (5.10a)$$

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + \frac{a}{c^2} \left(1 + \frac{a}{c^2}x\right) \left(\frac{dct}{d\tau}\right)^2 = 0, \quad (5.10b)$$

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} = \frac{d^2 z}{d\tau^2} = 0, \quad (5.10c)$$

を得る。ここで、 $[x^0, x^1, x^2, x^3] \equiv [ct, x, y, z]$ とした。得られた運動方程式は、それぞれ、時間、加速度の方向、それとは垂直な空間座標についての方程式である。

得られた三つの運動方程式を解けば自由粒子の運動が決定できる。特に、(??)は加速度の方向とは無関係な方向における成分であり、せいぜい、 τ の1次関数であることが容易に予想できる。その1次関数は初期状態における自由粒子の相対速度を規定すれば一意的に決定できるはずだ。加速度に関係するのは、(??)と(??)である。そのうち、(??)は τ について積分すると、

$$\frac{dct}{d\tau} = cA \left(1 + \frac{a}{c^2}x\right)^{-2}, \quad (5.11)$$

なる形態に書き換えられる。得られた方程式(??)を(??)に代入すれば x が決定できるはずだ。なお、(??)に記述した積分定数 A は、後に示すように運動解析における初期条件を表すことになる。

5.2.2 光の軌跡

前項で一様加速度場における自由粒子の軌跡を計算するための関係式を導出した。それでは一様加速度場では光はどのような軌跡を描くのだろうか。加速度場で光の軌跡が湾曲することは第??節で、エレベータの思考実験によって示した。本節では、湾曲する光の軌跡が具体的にどのような曲線を描くのかを調べてみよう。

光の世界線は、特殊相対性理論における光円錐の表面に位置するので、その計量は $ds^2 = 0$ となる。これを(??)に代入すると、

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \left(1 + \frac{a}{c^2}x\right)^2 c^2, \quad (5.12)$$

を得る。この式によって加速度場では光速不変の原理が成立しない。等加速度運動をする観測者が測定する光速度は場所によって異なるのである。計測される光速度が x に依存することから、この光速度を $c(x)$ と記述すると、

$$c(x) = \left(1 + \frac{a}{c^2}x\right) c, \quad (5.13)$$

となる。この結果は、第??節で特殊相対性理論から導いた結果と一致している。特に、 $x = -c^2/a$ で光速がゼロになっている。これはブラックホール理論における事象の地平面の性質に類似している。すなわち、この観測者は加速度 a で運動する限り、 $x \leq -c^2/a$ で発生する事象を観測できない。これは、 $x = -c^2/a$ を出発した光が加速度 a をもつ物体に追いつくことができないという第??節での特殊相対性理論による計算と合致する。

加速度運動する観測者から見た光の軌跡について考えてみよう。ただし、簡単のため、光の運動を xy 平面上に限るものとする。すなわち、 $dz/d\tau = 0$ と仮定するわけだが、当然、この制限は (??) に反するものではない。加速度場の計量 (??) に (??) を代入すると、

$$\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 = c^2 A^2 \left(1 + \frac{a}{c^2}x\right)^{-2}, \quad (5.14)$$

を得る。さらに、(??) より $dy/d\tau = cB$ となる (B は定数)。これを利用すると上式は、

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \left[\left(\frac{c^2 A}{a B}\right)^2 - \left(x + \frac{c^2}{a}\right)^2\right] \left(x + \frac{c^2}{a}\right)^{-2}, \quad (5.15)$$

のように変形できる。この式を満たす x と y の間には、

$$\left(x + \frac{c^2}{a}\right)^2 + (y - y_0)^2 = \left(\frac{c^2 A}{a B}\right)^2, \quad (5.16)$$

という関係が成立する。ここで、 y_0 は積分定数である。この結果より、等加速度運動をする観測者から見た光は円運動をする。第??節で紹介したエレベータの思考実験で、エレベ-

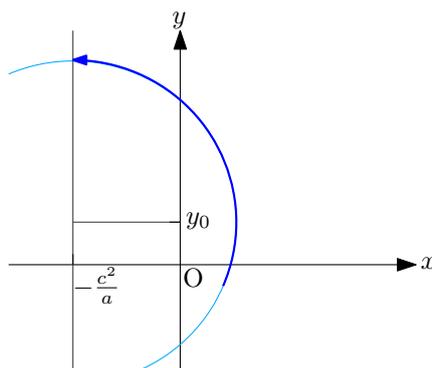


図 5.1: 加速度系から見た光の軌跡

タに入ってきた光は放物線を描くと予想するかもしれないが、それは、非相対論近似である。方程式 (??) について、 $c \rightarrow \infty$ の極限をとると、

$$1 + \frac{2ax}{c^2} = \frac{A^2}{B^2} - \frac{a^2}{c^4}(y - y_0)^2,$$

が得られる。初期状態として、光の速度ベクトルが y 成分しかもっていないと仮定すると $B = 1$ であり、また、観測者の位置 $x = 0$ において光速が c であることを要請すると $A = 1$ である。その条件を代入すると、非相対論近似で、

$$x = -\frac{a}{2c^2}(y - y_0)^2,$$

なる放物線に近似される。この放物線は、 $y = ct$ と $x = -at^2/2$ によって描かれると考えられると、等加速度による重力場で光が描く円軌道は、非相対論近似で予想される放物線と一致することがわかる。

5.2.3 質量のある粒子の軌跡

ニュートン力学では、等加速度運動をする観測者が自由粒子を見ると、その軌跡は放物線を描く。しかし、等加速度による重力場では光が円軌道を描くことがわかったので、質量のある自由粒子も放物線ではないと予想される。では、どのような軌跡を描くだろうか？円が楕円の特別な形態であることを考えると、一般的な自由粒子は楕円軌道を描くのではないかと推測できる。本節では、その推測どおりに自由粒子の軌跡が楕円を描くことを検証する。

質量のある粒子の場合、4次元計量 ds はゼロではない。それでは、質量のある粒子の軌跡はどのようになるのか求めてみよう。測地線の方程式(??)に現れるアフィンパラメータ τ に関して、 $ds^2 = -c^2 d\tau^2$ なる関係が成立する場合を仮定する。そうすれば、4次元計量は、

$$-c^2 d\tau^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - \left(1 + \frac{a}{c^2}x\right)^2 c^2 dt^2, \quad (??)$$

と書くことができる。このような仮定のもとでは、パラメータ τ は粒子とともに運動する時計の尺度をあらわす性質があるので、 τ は固有時間とよばれる。

ここでも、 $dz/d\tau = 0$ の制限のもとで、光の軌跡と同様の式変形を適用してみる。導出過程はまったく同じなので、結果だけ示すと、

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \frac{1+B^2}{B^2} \left[\frac{c^4 A^2}{a^2(1+B^2)} - \left(x + \frac{c^2}{a}\right)^2 \right] \left(x + \frac{c^2}{a}\right)^{-2}, \quad (5.18)$$

なる微分方程式が導出される。この微分方程式を満たす x と y は、

$$\frac{a^2(1+B^2)}{c^4 A^2} \left(x + \frac{c^2}{a}\right)^2 + \frac{a^2(1+B^2)^2}{c^4 A^2 B^2} (y - y_0)^2 = 1, \quad (5.19)$$

の関係がある。すなわち、等加速度運動をする観測者から見た質点の軌跡は楕円を描く。つまり、本節冒頭での推測が正しいことが確認できたわけだ。

導出した楕円軌道は、 $c \rightarrow \infty$ の極限ではニュートン力学における放物線に近似できるはずである。疑り深い読者のために検証してみよう。導出した楕円(??)は $c \rightarrow \infty$ の極限で、

$$x - \frac{c^2}{2a}(A^2 - B^2 - 1) + \frac{a(1+B^2)^2}{2c^2 B^2} (y - y_0)^2 = 0, \quad (5.20)$$

なる式に近似できる。この時点で軌跡は放物線に近似できているが、定数 A と B を決定したときにニュートン力学で記述される放物線の方程式と一致することを検証すればよい。前節で定義した A と B は、

$$A = \frac{1}{c} \left(1 + \frac{a}{c^2}x\right)^2 \frac{dct}{d\tau}, \quad B = \frac{1}{c} \frac{dy}{d\tau},$$

と表される。この定義より、定数 A と B の間には、

$$B = \frac{A}{c(1 - ax_0/c^2)^2} \frac{dy}{dt},$$

なる関係があることがわかる。ここで、初期条件として、観測対象の自由粒子は $x = x_0$ のとき y 方向にのみ速度をもち、その速度が、

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{x=x_0} = \left(1 + \frac{a}{c^2}x_0\right) v_y,$$

であるとする。なんとなく奇妙な初期条件の設定のように見えるが、これはニュートン力学において自由粒子の速度の y 成分が v_y であることを仮定しているのと同じである。この条件のもと、 A と B の関係は、

$$B = \frac{v_y A}{c(1 - ax_0/c^2)},$$

と書き換えられる。さらに、定数 A を決定するには、 $dct/d\tau$ が必要となる。その導関数については、時空の計量:

$$-d\tau^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - \left(1 + \frac{a}{c^2}x\right)^2 dt^2,$$

に対して、自由粒子が $x = x_0$ において y 方向のみに v_y の速度をもつという初期条件を適用すると、

$$\left(\frac{dct}{d\tau}\right)^2 = c \left[\left(1 + \frac{a}{c^2}x_0\right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \right]^{-1} = \frac{1}{(1 - ax_0/c^2)^2 (1 - v_y^2/c^2)},$$

となるので、定数 A に関して、

$$A^2 = \frac{(1 - ax_0/c^2)^2}{1 - v_y^2/c^2},$$

が成り立つ。そこで、(??) を具体的に書き下すために必要なパラメータを $c \rightarrow \infty$ の極限のもとで計算すると、

$$A^2 - B^2 - 1 = \frac{2a}{c^2}x_0, \quad \frac{(1 + B^2)^2}{c^2 B^2} = \frac{1}{v_y^2},$$

が得られる。なお、この計算において $o(c^{-2})$ に該当する小さな項は無視している。この結果を (??) に代入すると、

$$x - x_0 + \frac{a}{2v_y^2}(y - y_0)^2 = 0,$$

が得られる。つまり、等加速度による重力場を落下する自由粒子の軌跡は (??) のような楕円軌道となるが、 $c \rightarrow \infty$ なる非相対論的な近似が成立する条件であれば、ニュートン力学によって計算される放物線と一致する。したがって、光速と比較できる程度までの加速を考慮し、等加速度で運動する観測者から見た自由粒子は、もはや非相対論近似の範囲なく、楕円を描く運動軌跡をたどるのだ。

5.3 加速度場における1次元運動

既に述べたように、慣性系から見て等速度で運動する質点は、加速度場では自由落下するように見える。本節では、加速度場を自由落下する運動を時間の関数で表してみる。ただし、簡単のため、質点の運動を x 軸方向のみに制限する。計量 (??) に (??) を代入すると、

$$\frac{dx}{dt} = c \left(1 + \frac{a}{c^2}x\right) \sqrt{1 - \frac{1}{A^2} \left(1 + \frac{a}{c^2}x\right)^2}, \quad (5.21)$$

を得る。この微分方程式を解くと、加速度場を自由落下する質点の変位:

$$x = \left(\tilde{x}_0 + \frac{c^2}{a}\right) \operatorname{sech} \frac{a}{c}(t - \tilde{t}_0) - \frac{c^2}{a}, \quad (5.22)$$

を得る。ここで、 \tilde{t}_0 は初期条件を与える積分定数である。また、定数 A については、 $Ac^2/a = \tilde{x}_0 + c^2/a$ という置き換えをした。この式を t について微分すると、自由落下する質点の速度:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{a}{c} \left(\tilde{x}_0 + \frac{c^2}{a}\right) \operatorname{sech} \frac{a}{c}(t - \tilde{t}_0) \tanh \frac{a}{c}(t - \tilde{t}_0), \quad (5.23)$$

を得る。この時点で積分定数 \tilde{t}_0 と \tilde{x}_0 の物理的な意味が見えてくるだろう。時刻に関する定数 \tilde{t}_0 は $dx/dt = 0$ となる時刻であり、その時点での x 座標が \tilde{x}_0 である。これらの結果に対して、 $a/c \rightarrow 0$ なる非相対論近似を計算してみると、 $x \rightarrow x_0 - a(t - \tilde{t}_0)^2/2$, $dx/dt = -a(t - \tilde{t}_0)$ となり、ニュートン力学での等加速度運動をする観測者から見た現象と一致する。

加速度運動する観測者が見た自由粒子の速度 dx/dt は、 $-x$ 方向に加速度運動しているように見える。言い換えれば、加速度 a による一様な加速度場における自由落下である。しかしながら、図??に示すように、この落下速度は $|dx/dt| = (1 + a\tilde{x}_0/c^2)c/2$ なる最大値を迎えた後、減少傾向をたどり、 $x = -c^2/a$ に近づくほど速度はゼロに近づく。このことから、重力加速度 a の一様な重力場を自由落下する粒子は事象の地平面 $x = -c^2/a$ を横切ることができないこともわかる。これはブラックホールに落下する物体を観測しているのと類似する現象である。

質点の変位 (??) に注意して、速度 (??) をさらに書き換えると、

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{a}{c} \left(x + \frac{c^2}{a}\right) \tanh \frac{a}{c}(t - \tilde{t}_0), \quad (5.24)$$

のように書けることに気づくだろう。さらに、(??) で定義される光速 $c(x)$ を用いて、

$$\frac{dx}{dt} = c(x) \tanh \frac{a(t - \tilde{t}_0)}{c},$$

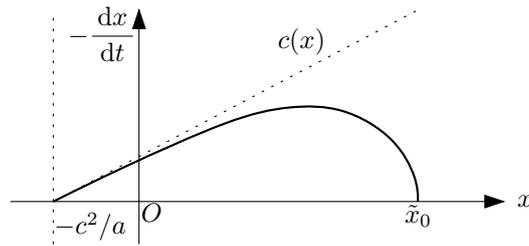


図 5.2: 加速度場の自由粒子の速度と位置

と表すことができることも注意すべきである。つまり、一様な加速度場を自由落下する物体の速度を光速 $c(x)$ との比で考えると、速度は単調増加であることがわかる。すなわち、速度が途中で減少傾向に転じているように見えるのは、あくまでも、計量の基準が変化していることによる見かけの現象である。

5.4 初期条件の再考察

前節で、加速度場の中の自由粒子の 1 次元運動について定式化したが、初期条件の与え方がまわりくどい。前節で導出した公式では、 $dx/dt = 0$ となる時刻 \tilde{t}_0 と、その時点の位置 \tilde{x}_0 が初期条件を与える量であった。このような dx/dt を主体とした初期条件ではなく、 $t = 0$ における速度と位置で初期条件を記述できないだろうか？

前節では、 $t = 0$ における物理量を用いた記述を敢えて避けていた。なぜなら、速度 dx/dt が \tilde{x}_0 に依存してしまうからである。ニュートン力学では、 $t = 0$ において $x = x_0$, $dx/dt = v_0$ なる初期条件を設けると、 $dx/dt = v_0 - at$ となる。つまり、ニュートン力学では、 dx/dt は x_0 に依存しない。もう一步考えを進めるなら、加速度場では $t = 0$ の速度も x に依存した値になっているということである。つまり、 $t = 0$ のときの速度を初期条件として用いても、それはニュートン力学で用いた速度の初期条件 v_0 とは意味が異なるのである。

加速度場では光速が x の関数である。実際、これが理由で dx/dt が x に依存した量となるのである。つまり、速度 dx/dt を $c(x)$ で正規化すれば、 x の依存性が取り除けるのではないか。正規化された速度は、

$$\frac{1}{c(x)} \frac{dx}{dt} = -\tanh \frac{a}{c}(t - \tilde{t}_0), \quad (5.25)$$

となり、予想どおり、 x に依存しない量となる。それでは、速度を光速 $c(x)$ で正規化した量に対して初期条件を与えよう。言いかえると、 $t = 0$ において、 $x = x_0$, $dx/dt = \beta_0 c(x_0)$

を初期条件として、公式を書き直すのだ。すると、

$$\frac{1}{c(x)} \frac{dx}{dt} = -\tanh\left(\frac{at}{c} - \operatorname{artanh} \beta_0\right), \quad (5.26)$$

$$x + \frac{c^2}{a} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_0^2}} \left(x_0 + \frac{c^2}{a}\right) \operatorname{sech}\left(\frac{at}{c} - \operatorname{artanh} \beta_0\right), \quad (5.27)$$

が得られる。また、任意の時刻 t において $dx/dt = \beta c(x)$ とすると

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta_0^2}} \left(x_0 + \frac{c^2}{a}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(x + \frac{c^2}{a}\right), \quad (5.28)$$

が成り立つ。この結果は、一様な加速度場を自由落下する物体の位置が示す面白い規則性を表現している。その数式が表す意味を図で示すと図??のようになる。その物体の位置には基準の位置 A が存在し、現時点での速度 β が与えられたとき、その時点における物体の位置は、基準の位置を事象の地平面 ($x = -c^2/a$) を中心にしてローレンツ収縮して得られる位置と一致するということである。つまり、一様な加速度場は事象の地平面を中心にしたローレンツ収縮によってつくられる座標系であるとも考えることもできる。

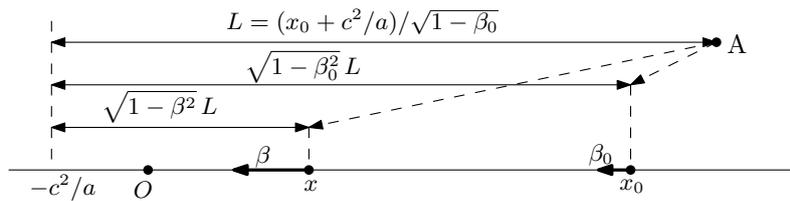


図 5.3: 加速度場を自由落下する物体の位置

5.5 自由粒子の時間

加速度場中の自由粒子と一緒に運動する時計について考えてみよう。これまでにでてきた固有時間 τ が運動する時計の読みを表す。固有時間の尺度は 4 次元計量で定義されている。時計の運動を x 軸方向のみに制限すると、

$$d\tau = \sqrt{\left(1 + \frac{a}{c^2}x\right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2} dt, \quad (5.29)$$

によって固有時間の尺度は与えられる。この微分方程式を解くと τ と t の変換式:

$$\tau = \frac{c}{a} \frac{1 + ax_0/c^2}{\sqrt{1-\beta_0^2}} \left[\tanh\left(\frac{at}{c} - \operatorname{artanh} \beta_0\right) + \beta_0 \right], \quad (5.30)$$

得ることができる。なお、この変換式は、 $t = 0$ のときに $\tau = 0$ となるように積分定数を選んだ。さらに、任意の時刻において $dx/dt = \beta c(x)$ とするならば、

$$\tau = \frac{c}{a} \frac{\beta_0 - \beta}{\sqrt{1 - \beta_0^2}} \left(1 + \frac{a}{c^2} x_0 \right), \quad (5.31)$$

を得ることができる。この式により、初期座標と初期速度が既知である自由粒子が加速度場の中で、任意速度になるまでに自由粒子の時計が刻んだ時間を簡単に計算できる。

5.6 双子のパラドックス

本節では、一様な加速度場の概念を用いて双子のパラドックスにおける矛盾点を解消しよう。双子のパラドックスは、アインシュタインが特殊相対性理論での議論の限界を示すために用いたらしいが、皮肉にも、相対性理論の反論者が相対性理論を否定するために用いられた題材である。

マークとマイクは双子である。ある日、マイクは宇宙船で地球を出発し、等速度 v で地球を離れた。そして、急速な U ターンをして、速度 v で地球に帰還した。一方、マークは地球に残ったままである。マークから見るとマイクの宇宙船は相対速度 v で運動しているので、マイクの時計が遅れて見えるはずである。ところが、マイクから見ると、地球の方が相対速度 v で運動しているように見えるので、マイクはマークの時計の方が遅れていると言うだろう。つまり、双方とも相手の時計が自分の時計より遅く進むことを主張する。自分より若い人より若いということはある得ない。すなわち、双方の主張は理にかなっていない。それでは、地球に戻ったマイクは、自分より若いマークに会ってしまうのか、それとも、老いたマークに会うのか？ これが双子のパラドックスである。

地球に残っているマークと違い、マイクは出発時と U ターン時と帰還時に加速度運動をするため、特殊相対性理論のみで議論することはできないのである。このパラドックスは、マークとマイクの固有時間を積分して比較することによって解決できるが、宇宙船に乗ったマイクから見た世界は、加速度による重力場なので固有時間の計算には一般相対性理論が必要となる。これまでに等加速度運動による重力場における固有時間計算の処方を与えておいたので、シンプルにパラドックスを解決できるであろう。

マークから見た世界 マークは地球に残っている (慣性系にいる) ので、特殊相対性理論だけでマークが見る世界を説明できてしまう。マークの時計で $T_A/2$ が経過する間、マイクが地球から遠ざかっているとする。マイクは帰り道も速度 v で戻ってくるので、帰りに要する時間は、マークの時計で $T_A/2$ である。つまり、往復に要する時間は、マークの時計で T_A である。マークがマイクの時計を見た場合、見事にローレンツ変換の影響を受け

ているはずである。マイクの時計が T_B の時を刻む間にマイクの宇宙船が往復したとすると、これらの間には

$$T_B = \sqrt{1 - \beta^2} T_A, \quad (5.32)$$

となる。これは、単なる時間のローレンツ収縮の効果である。この結果より、地球から見た宇宙船の世界線と時計の読みをグラフに描くと図??のようになる。

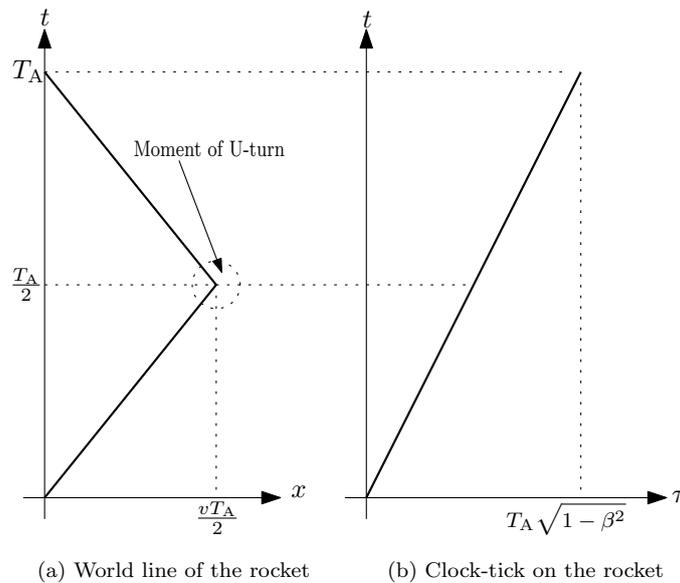


図 5.4: 地球から見た宇宙船の世界線と時計

マイクから見た世界 宇宙船に乗ったマイクには、マークと違い、慣性系ではない時空間にいる時間帯がある。地球からの出発時に加速をしなければならないし、Uターンをする時間もあり、地球に到着するときには減速をする必要がある。その3箇所ではマイクは加速度運動しているため、慣性力というみかけの力を感じている。等価原理によると、慣性力と重力は区別がつかないため、マイクが慣性力を感じている区間では、重力場にマイクがいたと解釈できるのだ。つまり、加速度をもつ3箇所が特殊相対性理論では議論できない区間となる。上の計算の状況では、加速度運動するマイクは一瞬で v まで加速し、一瞬でUターンし、一瞬で地球上に静止しなければならない。非現実的な舞台設定ではあるが、これまでに導出した加速度場の式を適用し、その結果に対して $a \rightarrow \infty$ の極限をとれば解決できるであろう。

出発時の加速行程について考えよう。マイク自身が一瞬で加速を完了することを仮定すると、加速に要する時間は、マイクの時計で $T_B^{(1)} = 0$ である。マイクから見たマークの時計の読みはどうなっているであろうか？ 観測者マイクが加速しているため、特殊相対性理論は使えない。その代わりに、地球を自由粒子とみなし、(??)を使用することができる。初

期条件を $x_0 = 0, \beta_0 = 0$, 終了条件を $\beta = -v/c$ とし、公式を適用し、 $a \rightarrow \infty$ の極限値を計算すると、 $T_A^{(1)} = 0$ となる。

加速を完了したマイクは自分の時計で $T_B^{(2)} = T_B/2$ の間、等速度 v で運動したとする。この仮定は特殊相対性理論が適用できる。マイクから見たマークの時計は、その間に $T_A^{(2)} = \sqrt{1-\beta^2} T_B/2$ だけ時間を刻むはずだ。

では、Uターン行程での時計の読みについて考察しよう。現実的ではないが、マイク自身が一瞬にしてUターンしたと仮定すると、マイクの時計では $T_B^{(3)} = 0$ しか時間経過しないことになる。マイクが見たマークの時計は、加速度場の自由粒子の時計の問題なので、(??)を適用する。まず、既に速度 v での等速運動行程を $T_B/2$ の時間だけ持続しているので、Uターン行程を開始するときには、地球はマイクの後方 $vT_B/2$ の位置に移動している。つまり、 $x_0 = -vT_B/2$ である。また、初期速度は $\beta_0 = -v/c$, そして、Uターン後には逆向きの同じ速さになっているはずなので、終了速度は $\beta = v/c$ である。この条件を公式に代入し、 $a \rightarrow -\infty$ を適用すると、Uターン行程中にマークの時計が刻んだ時間は $T_A^{(3)} = (v^2/c^2) T_B/\sqrt{1-\beta^2}$ となる。

帰り道の行程は前半と対象であるので、既に用いた値をそのまま使えばよい。帰りの等速度行程においては、 $T_B^{(4)} = T_B^{(2)}, T_A^{(4)} = T_A^{(2)}$ が成り立つ。そして、最後の減速行程についても $T_B^{(5)} = T_B^{(1)}, T_A^{(5)} = T_A^{(1)}$ となる。

上で説明した時計の読みをつなぎ合わせ、全行程におけるマークとマイクの時計の読みを比較しよう。マイクの時計の読みは、

$$T_B^{(1)} + T_B^{(2)} + T_B^{(3)} + T_B^{(4)} + T_B^{(5)} = T_B,$$

となり、マークの時計の読みは、

$$T_A^{(1)} + T_A^{(2)} + T_A^{(3)} + T_A^{(4)} + T_A^{(5)} = \frac{T_B}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

となる。全行程の間にマークの時計が刻んだこの時間を T_A とおくと

$$T_B = \sqrt{1-\beta^2} T_A, \tag{5.33}$$

が導き出せる。結果として、宇宙船で移動したマークの時計の読みが小さいことが検証されたことになる。

ここまでの計算結果より、宇宙船から見た地球の世界線と時計の読みをグラフに描くと図??のようになる。このグラフの形状は、明らかに図??とは異なる。つまり、宇宙船に乗ったマイクは、加速度運動のため慣性力を感じる区間があるので、地球上にいるマークが見る世界とは相対的でないことがこのグラフから読みとれる。特に印象的な区間は、地球に向かってUターンする区間である。ここでは、Uターンが一瞬にして完了するものとした。

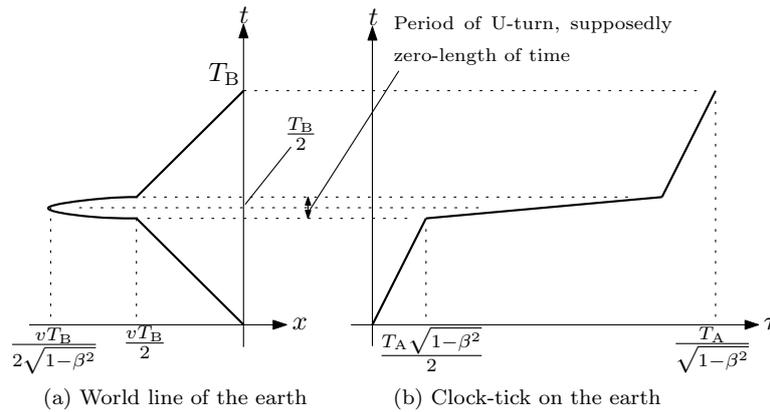


図 5.5: 宇宙船から見た地球の世界線と時計

その一瞬で、マークが観測する地球の世界線は遠くに移動し、元の位置に戻る。また、マークが観測する地球の時計の読みは一瞬にして長い時間分の読みを刻むのである。

二者の観測の比較 マークから見た時計とマイクから見た時計の双方を計算した結果、全工程中での時計の刻みについて、双方ともまったく同じ関係式を得ることができた。したがって、双子のパラドックスにおける矛盾点は解消され、最終的にはマイクがマークより若くなっていることがわかった。

双子のパラドックスが浮上した原因は、Uターン行程での時計の読みについて考慮しなかったことである。仮に、Uターンが一瞬で完了したと仮定しても、それにより非常に大きな慣性力がかかるため、一般相対論的效果により、地球の時計が一瞬にして大きく進んでしまうのである。

5.7 クルスカル図

質点による重力場(シュワルツシルト解)において光円錐が場所によらず、 $\pm 45^\circ$ の角度で開くような座標系としてクルスカル座標 $[T, R]$ を描き、事象の地表面を境に時空の性質が変わることを図示した。等加速度運動によって生じる重力場についても、同様に、クルスカル座標を計算することができる。

等加速度運動による重力場のクルスカル座標は、

$$ds^2 = -\frac{4c^4}{a^2}(dT^2 - dX^2) + dy^2 + dz^2, \quad (5.34)$$

なる線素で表される。光の軌跡は $ds = 0$ を満たすので、確かにこの座標 $[T, X]$ では、光の

軌跡は常に $\pm 45^\circ$ の傾きをもっている。また、クルスカル座標は座標 $[ct, x]$ との間に、

$$T^2 - X^2 = -\left(1 + \frac{a}{c^2}x\right), \quad \frac{2TX}{T^2 + X^2} = \tanh \frac{at}{c},$$

なる関係で結ばれている。図??に示すように、 x が一定の線は双曲線に、 ct が一定の線は原点を通る直線になる。加速度場の事象の地平面 $x = -c^2/a$ は確かにシュワルツシルト解の事象の地平面と同様の形状になっている。

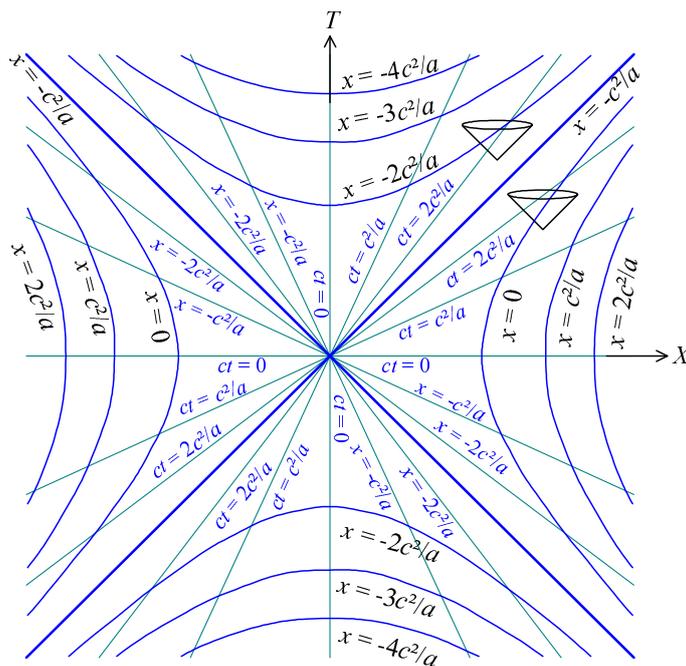


図 5.6: 加速度場のクルスカル図

あらゆる物質は超光速で運動できないので、クルスカル座標系における物質の世界線は光円錐の内部を走るはずだ。そのように考えて図??を見ると、現時点で $x > -c^2/a$ に存在する物質も、光速で運動できない限り、事象の地平面となる $x = -c^2/a$ をいづれ横切ることになる。いったん事象の地平面を横切ると、どんなに速度を変化しても (光速を超えられないが)、その物質は事象の地平面を超えてもとの領域に戻る事が不可能である。加速度運動する観測者から見る時空は、ブラックホールと同様の性質をもっているのだ。

加速度による重力場における運動方程式を解いた結果、その重力場を自由落下する質点は事象の地平面に対応する $x = -c^2/a$ に近づくとつれ、速度が低下し、地平面を横切ることができない。その現象は座標系の取り方による見かけの現象であり、自由落下する質点から見れば、単に慣性系を問う速度運動しているだけなので、加速度運動する観測者の c^2/a より隔てた後方に移動することは可能である。それが、事象の地平面であらゆる質点が停止する現象が見かけの現象であるという理由である。重力にしたがい落下する一般の物

体が衣装の地平面を横切ることが可能であることをクルスカール座標系は示しているのだ。しかし、重力に逆らって事象の地平面を横切るとは不可能である。

等加速度運動をする観測者から見た時空においても、クルスカール座標をつくとホワイトホールに相当する現象が現れている。その現象は、クルスカール図の中央下部である。その領域では、光速を超えない限り、どのような速度で運動しても、 x の負の方向から事象の地平面を超えて $x > 0$ の領域に到達することができるのである。現在の物理学では、そのような解は棄却することが常である。このようなホワイトホールとしての解釈は、物理的な意味を伴うのか、単なる数学の産物なのか意見が分かれるところかもしれない。本書では、ホワイトホールの議論はやめておこう。

5.8 リンドラー座標系

本章ではアインシュタインの方程式を解いて等加速度運動をする観測者から見た加速度場の時空を計算した。本章で取り上げた時空と同等の座標系が既に提唱されているので、その座標系について紹介する。その座標系は、リンドラー座標系と呼ばれ、本章と同様に、カルテシアン座標 $[\xi, \eta, \zeta]$ と時間座標 t を組み合わせた座標によって、

$$ds^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 - \alpha^2 \xi^2 c^2 dt^2, \quad (5.35)$$

なる線素で表現される。この中で α が加速度に関するパラメータである。しかも、 α は長さの逆数にあたるディメンジョンをもつ。容易に予想できるように、

$$\alpha\xi = 1 + \frac{ax}{c^2}, \quad \eta = y, \quad \zeta = z,$$

の対応で本章で導出した加速度場の線素と一致する。この対応関係からわかるように、リンドラー座標系は、事象の地平面が $\xi = 0$ で形成されるようになっていて、 $\xi = 1/\alpha$ に観測者が存在するモデルである。その弱点をあえて指摘するなら、 $a \rightarrow 0$ の極限をとったとき、 $\alpha\xi \rightarrow 1$ となるので、変数として使いたい ξ が等速度運動への拡張で定数になってしまう。つまり、等加速度運動への拡張に対して難がある座標系である。

リンドラー座標系は、いくつかの相対性理論のテキスト³に掲載されている。リンドラー座標系が等加速度運動する観測者が見た重力場であることは、脚注に挙げたテキストによると、

$$\xi' \equiv \frac{\cosh \alpha ct}{\alpha}, \quad ct' \equiv \frac{\sinh \alpha ct}{\alpha},$$

³例えば、Derek Raine, Edwin Thomas, “Black Holes,” Imperial College Press, ISBN 1-86094-586-4, p.41, 2005.

なる変数変換によって説明されている。ここで、双曲線関数に与えられる変数が αct であることに注意しておこう。双曲線関数のように、ディメンジョンが定まらない関数に与える変数は無次元化でなければならないのだ。上記の変数変換によって、時空の線素は、

$$ds^2 = d\xi'^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 - c^2 dt'^2,$$

のように書き換えられる。この数式は、時空 $[ct', \xi', \eta, \zeta]$ がミンコフスキー空間であることを意味する。座標 ξ' と ct' は時刻 t に対して双曲線関数で与えられている。つまり、 ξ' と ct' は双曲線運動における座標である。時空における双曲線運動とは、ニュートン力学における等加速度運動に相当するのでリンドラー座標系は等加速度運動する観測者から見た加速度場である。

リンドラー座標系は筆者にとってはショックであった。本書で示した導出は筆者が加速度場の時空を表現することを目的に独自に展開した過程であったのだが、すでにリンドラー座標系は加速度場を表現する座標系として知られていたからだ。結果的に筆者が見つけたと思っていた座標系は二番煎じだったことになる。

