

第6章 恒星間航行

前章では、等加速度運動をする観測者から見た場を数学的に記述し、宇宙船が一瞬にしてUターンできる場合を想定して双子のパラドックスを解決した。本章では、1次元的な恒星間航行を数値計算によりシミュレーションし、加速度をもつ系から見た世界と、慣性系から見た世界の違いを検証してみよう。

6.1 定数の定義

本章での計算は、大きなオーダでの時間と距離を取り扱うため、時間と距離の単位として年と光年を用いることにする。距離の単位である1光年(1 ly) 光年は国際天文連合で、

$$1 \text{ ly} = 9.460730472580800 \times 10^{15} \text{ m},$$

のように定義されている。この量は、 $c = 2.99792458 \times 10^8 \text{ m/s}$ で伝搬する光が365.25日に伝搬する距離である。概算では1光年 = 9兆4600億kmであり、地球から太陽までの距離の約63,200倍という距離である。

上記の光年の定義に合わせ、本書では1年を365.25日で計算する。地球の公転周期に基づく太陽年とはわずかに異なる値を用いるが、計算の便宜をはかったの選択である。

加速度については m/s^2 を用いることにする。そのような単位を取り扱う場合、これまで導出してきた公式について、

$$c^2/a \rightarrow 9.4998497/a \text{ [ly]},$$

$$at/c \rightarrow at/9.4998497$$

の置き換えをすればよい。上の量 c^2/a は長さの次元をもち、下の量 at/c は無次元である。

6.2 問題設定

宇宙船で地球を出発し、オリオン星雲までの旅をシミュレーションしてみよう。オリオン星雲は地球から1500光年の距離に位置し、オリオン座を構成する星が誕生した場所で

ある。目的地が非常に遠いので、たとえ相対論的効果を期待しても、旅行というスケールにしては大きすぎ、むしろ、地球外の新天地への移住のための恒星間航行かもしれない。

オリオン星雲までの全行程において、最初の 300 光年の距離を加速行程に、次の 900 光年は等速度の巡航行程、そして、残りの 300 光年を減速行程に当て、オリオン星雲内で停止する。加速行程と減速行程では、 5.000 m/s^2 の加速度を保持するものとする。この加速度で加速すると、出発した 12.68 秒後に 4 分の 1 マイル (ゼロヨンの距離) の地点を通過することから、この加速度がスポーツカー程度の加速度であることがわかる。

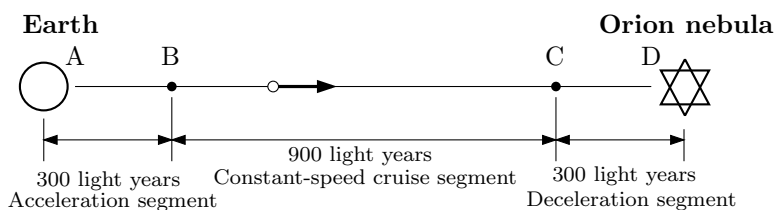


図 6.1: 恒星間航行の設定

6.3 地球から見た世界

地球から見た宇宙船の運動、加速時間、減速時間について考察しよう。地球の自転や公転について考えないものとし、地球が慣性系に存在していると仮定すると、地球から見た世界は特殊相対性理論にしたがう。

加速行程 加速行程の時間を地球の時計で表してみよう。そのためには、地球を基準にした座標系で宇宙船の位置を計算する公式 (??) を用いるとよい。改めて書くとその公式は、

$$x = \frac{c^2}{a} \left[\sqrt{1 + \frac{a^2(t + t_0)^2}{c^2}} - \sqrt{1 + \frac{a^2 t_0^2}{c^2}} \right] + x_0,$$

である。初期状態で宇宙船は地球に位置し、初速度がゼロであるので、 $x_0 = 0, t_0 = 0$ を公式に代入し、 $x = 300$ 光年となる t を求めればよい。その結果、 $t = 301.8939913$ 年となる。この値が、宇宙船が加速区間にいる時間を地球の時計で測った結果である。設定した加速度 5 m/s^2 はそれほど大きな加速度ではないが、300 光年の距離を 302 年弱で到達してしまうことから、何年も加速度運動を持続すれば極めて光速に近い速度域に達することがわかるだろう。

宇宙船に積んだ時計を地球から見た場合、その時計の読みは(??)にしたがう。その数式は、

$$\tau = \frac{c}{a} \left[\operatorname{arsinh} \frac{a(t+t_0)}{c} - \operatorname{arsinh} \frac{at_0}{c} \right],$$

のように、宇宙船の固有時間 τ を地球の時間 t の関数で表現している。ここでは、 $t_0 = 0$ とし、 $t = 301.8939913$ 年を代入すると、 $\tau = 10.9464772$ 年という時間が得られる。したがって、加速行程が終了するとき、宇宙船の時計では 11 年程度の時間しか経過していないことになる。

加速行程を終了した時点の宇宙船の速度は、公式(??)を計算すればよい。その公式を改めて書くと、

$$\frac{dx}{dt} = \frac{a(t+t_0)}{\sqrt{1+a^2(t+t_0)^2/c^2}},$$

である。ここでも、 $t_0 = 0$ である。この公式に $t = t = 301.8939913$ 年を代入すると、 $dx/dt = 0.9999801965c$ である。いうまでもなく、 c は光速である。また、 $dx/dt \equiv c\beta$ としたとき、この速度に対応する Lorentz 収縮比は $\sqrt{1-\beta^2} = 6.293375741 \times 10^{-3}$ となる。

巡航行程 巡航行程における解析は非常にシンプルである。宇宙船が巡航行程に存在する時間を地球上の時計で計測すると、速度 $dx/dt = 0.9999801965c$ で 900 光年を移動する時間であるから、 $t = 900.0178235$ 年となる。宇宙船に積んだ時計の読みは、特殊相対性理論の効果で遅いペースで時を刻む。そのペースは Lorentz 収縮比と同一の比率で遅くなるので、 $\tau = \sqrt{1-\beta^2}t = 5.6641503$ 年となる。加速行程を 300 年以上持続した結果、宇宙船の速度が極めて光速に近くなっているため、地球で 900 年の時間が宇宙船の時計では 5 年半程度しか刻まないのである。

減速行程 宇宙船が減速区間にいる時間については、設定した問題の対称性より、地球上の時計と宇宙船の時計の双方とも、加速区間にいる時間と同じだけ時を刻む。直接的に(??)と(??)を用いて計算しても、同じ数値が得られるはずだ。

以上をまとめ、地球の時計の読みと、宇宙船の時計の読みを比較すると表??のようになる。いかなる物体も光速を超えることは不可能であるので、1500 光年を移動するために要する時間は 1500 年を超える。しかしながら、地球から見た宇宙船の時計は Lorentz 収縮のため、27 年半の時間しか刻んでいない。

地球の時計で計測した時刻に対して宇宙船が到達する距離は図??のようになる。宇宙船の速度は加速期間のかなり早い時期に光速に十分近づくため、時間の経過に対してほぼ比例して距離が増加するように見えるが、加速期間と減速期間の両端を拡大すると、到達距離が双曲線を描いていることがわかる。

表 6.1: 地球から見た時計の読み

	地球の時計 [年]	宇宙船の時計 [年]
加速区間	301.8939913	10.94647725
巡航区間	900.0178235	5.66415034
減速区間	301.8939913	10.94647725
合計	1503.8058060	27.55710484

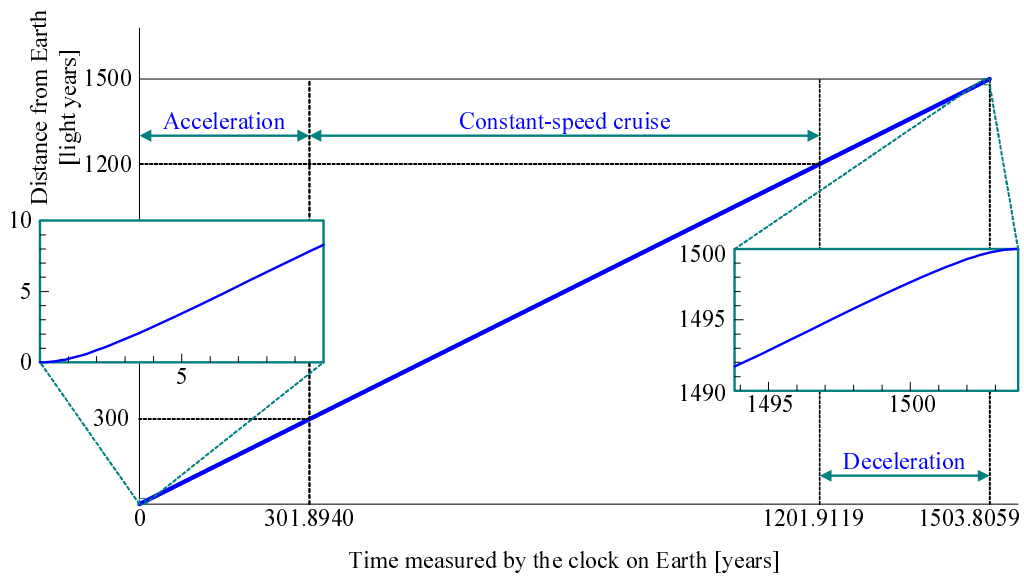


図 6.2: 地球の時計の読みに対する宇宙船の位置

地球の時計で計測した時刻に対して宇宙船の固有時間の変化は図??のようになる。図の縦軸と横軸のスケールが大きく異なるので見誤りやすいが、このグラフの両端の傾きは1である。宇宙船の速度が小さいときは、地球の時計と宇宙船の固有時間が時を刻むペースがほぼ同じということである。それに対し、巡航速度は光速の99.998%であり、巡航区間での固有時間のペースは地球の時計の0.63%になる。

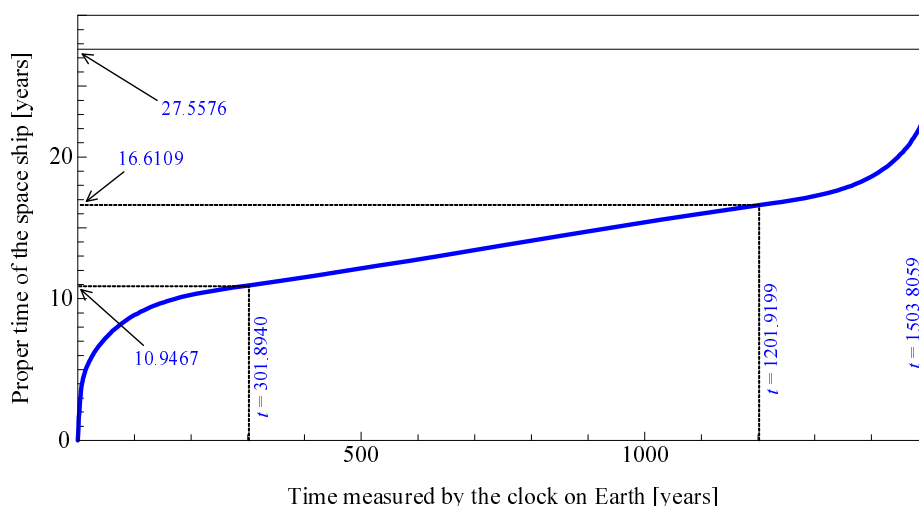


図 6.3: 地球の時計の読みに対する宇宙船の固有時間

6.4 宇宙船から見た世界

宇宙船から見た世界は、地球から見た世界とは異なる。加速区間と減速区間では、宇宙船内に慣性力が発生するため、特殊相対性理論の範疇を超え、一般相対性理論を適用が必要となる。一方、等速区間では慣性力が発生しないため、特殊相対性理論を適用してもよい。

前節では、地球から300光年の距離で加速を終了し、1200光年の距離で減速を開始する、というように地球からの距離を基準に加速・等速巡航・減速の区間を定義した。しかし、運動形態が異なれば時空の尺度が異なるのだから、地球で見た距離の概念を宇宙船にもち込んでも意味がない。むしろ、加速終了と減速開始は、宇宙船内の時刻で定義した方が宇宙船の操縦には好都合である。その議論を進めるため、地球を点A、加速終了点を点B、減速開始点を点C、オリオン星雲を点Dとしよう。

6.4.1 加速区間

時刻 $t = 0$ で地球を出発し、加速度 $a = 5.0 \text{ m/s}^2$ で加速している宇宙船の加速を終了する時刻を算出しよう。加速区間が終了するのは、宇宙船が点 B を通過する瞬間である。言い換えると、時刻 $t = 0$ において $x = 300$ 光年であった点 B が $x = 0$ となる時刻を計算すればよい。その計算には、加速度による重力場を落下する物体の位置に関する公式 (??) を利用する。改めて書くと、その公式は、

$$x + \frac{c^2}{a} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_0^2}} \left(x_0 + \frac{c^2}{a} \right) \operatorname{sech} \left(\frac{at}{c} - \operatorname{artanh} \beta_0 \right),$$

である。この公式において、 x が求めるべき物体の位置、 x_0 が初期状態での位置である。さらに、 a が重力源となる加速度、 β_0 が初速度 (その場における光速との比) である。この公式に、 $a = 5 \text{ m/s}^2$ 、 $\beta_0 = 0$ 、 $x_0 = 300$ 光年、 $x = 0$ 光年を代入して t を特定する。この手順によって、宇宙船が加速区間にいる時間が宇宙線の時計で $t = 10.9464773$ 年であることが計算される。

加速区間にいる間に地球の時計が刻む時間は、重力場を落下する地球の固有時間を計算すればよいので公式 (??) を利用すればよい。改めて書くと、その公式は、

$$\tau = \frac{c}{a} \frac{1 + ax_0/c^2}{\sqrt{1 - \beta_0^2}} \left[\tanh \left(\frac{at}{c} - \operatorname{artanh} \beta_0 \right) + \beta_0 \right],$$

である。初期状態は宇宙船と地球が同じ位置に存在していたので $x_0 = 0$ である。この公式の t には宇宙船の時計が加速時間に刻む時間、すなわち、 $t = 10.9464773$ を代入する。その計算の結果として、 $\tau = 1.8999323$ 年が得られる。一方、オリオン星雲の時計による経過時間も公式 (??) を利用する。オリオン星雲の時計の場合、初期座標として初期座標 $x_0 = 1500$ 光年を代入する。その計算結果は、 $\tau = 1501.8702271$ 年である。加速度系から見ると、同じ慣性系に存在していても時計の進み方が場所に依存するのである。

加速終了時の速度 dx/dt は、これまでに示したように、加速度場で光速度が x に依存するため、点 A、点 B、点 C、点 D において、それぞれ、異なった値となる。ところが、 $\beta \equiv (dx/dt)/c(x)$ のように各点での光速で正規化した速度で表現すると、それら 4 点の速度はすべて共通の値になる。その共通の値は、公式 (??) を用いれば計算できる。改めて書くと、その公式は、

$$\beta = \frac{1}{c(x)} \frac{dx}{dt} = -\tanh \left(\frac{at}{c} - \operatorname{artanh} \beta_0 \right),$$

である。加速時間として $t = 10.9464773$ を代入すると、 $\beta = 0.9999801965$ が得られる。当然であるが、巡航区間における宇宙船の速度を地球から見た値と一致する。

宇宙線と点 A から点 D について、加速区間での経過時間と加速終了時の位置を計算すると表??に示す数値が得られる。経過時間は、宇宙船から見た各点に備え付けられている時

計の読みを想定した。上で説明したように、経過時間には公式(??)を、終了時の位置には公式(??)を用いて計算した。この計算によると、驚くことに、初期状態($t = 0$)で1500光年の距離にあった目的地がわずかに11年弱の加速時間で8光年以内の距離にまで迫っているのだ。とはいえ、これを超光速運動だと思っははいけない。既に説明したように重力場

表 6.2: 加速行程における各点の位置と時計の読み

	開始時の位置 [光年]	経過時間 [年]	終了時の位置 [光年]
宇宙船	—	10.9464773	—
点 A	0.000000	1.8999323	-1.888012722
点 B	300.000000	301.8939913	0.000000000
点 C	1200.000000	1201.8761681	5.664038167
点 D	1500.000000	1501.8702270	7.552050889

では光速が場所によって異なる。特に、加速度ベクトルが向く前方では、その距離に対して線形的に光速が増大する。その光速の増大を考慮すると、やはり、超光速の運動は不可能である。

6.4.2 巡航区間

点 B から点 C は巡航区間である。この区間では宇宙船は等速度運動をしているので、宇宙船から見た世界は特殊相対性理論にしたがう。宇宙船から見ると、巡航区間の距離は5.664038167光年である。この距離を $\beta = 0.9999801965$ の速度で運動するため、巡航区間にいる時間は、宇宙船の時計で5.6641503年である。宇宙船から見ると、その間に、点 A から点 D は、すべて、速度 $0.9999801965c$ で5.664158418光年だけ後方に移動する。文字通り、点 A から点 D が平行移動するのだ。また、点 A から点 D の時計は、Lorentz 収縮のため、宇宙船の時計と比べ、 $\sqrt{1 - \beta^2} = 6.293375741 \times 10^{-3}$ 倍の時間しか刻まない。この区間における時計の読みと位置を表??に示しておく。

6.4.3 減速区間

減速区間は、宇宙船の内部では慣性力による重力場が形成されているため、点 A から点 D の位置や時計の読みは、(??)と(??)で計算することができる。計算にあたり、初速度 $\beta = 0.9999801965$ を与えておくことに注意が必要だ。さらに、前項で計算した終了時の位置を初期座標 x_0 として代入すれば計算できる。とはいえ、ここで取り扱っている条件設定

表 6.3: 等速行程における各点の位置と時計の読み

	開始時の位置 [光年]	経過時間 [年]	終了時の位置 [光年]
宇宙船	—	5.664270595	—
点 A	-1.888012722	0.035648139	-7.552050889
点 B	0.000000000	0.035648139	-5.664038167
点 C	5.664038167	0.035648139	0.000000000
点 D	7.552050889	0.035648139	1.888012721

では減速区間が加速区間と対称なので、改めて計算する代わりに加速区間での計算結果を利用すれば必要な情報が得られる。その結果は表??に示すような数値となる。

表 6.4: 減速行程における各点の位置と時計の読み

	開始時の位置 [光年]	経過時間 [年]	終了時の位置 [光年]
宇宙船	—	10.9464773	—
点 A	-7.552050889	1501.8702271	-1500.000000
点 B	-5.664038167	1201.8761681	-1200.000000
点 C	0.000000000	301.8939913	-300.000000
点 D	1.888012721	1.8999323	0.000000

以上の計算結果をグラフに表示して、宇宙船から見た各地点の位置や固有時間の推移を確認しよう。まず、宇宙船から見た地球とオリオン星雲の位置は図??のようになる。加速区間の間、オリオン星雲は急激に宇宙船に近づいてくる。加速開始時に 1500 光年先にあったオリオン星雲が 10.9467 年後には 7.5522 光年の距離に迫っている。この値だけ見るとオリオン星雲が超光速で接近したように見えるが、加速度場では加速度方向の遠方での光速が大きくなるため、その接近速度は光速を超えていない。一方、地球は 10.9467 年の加速期間中に 1.881 光年ほど後退しただけである。つまり、初期状態で 1500 年離れていた地球とオリオン星雲は、加速期間の終了時には 9.4403 光年しか離れていないことになる。地球とオリオン星雲の距離がこのように収縮するのは、紛れもなくローレンツ収縮である。観測者が加速度運動をすると、周囲の慣性系とのローレンツ収縮比が変化し、遠くの物体ほど大きな速度で収縮する。その速度が光速を超えないことは、重力場の光速が場所によって異なることで説明できているのである。ところで、目的地が近づき、減速区間に入ると、地球が急激に後退する。一方、オリオン星雲は減速開始時には 1.8881 光年の距離まで接近しているので、減速期間中はゆっくりと宇宙船に接近する。減速区間が終了すると、オリオン星雲は宇宙船と同じ位置に、地球は 1500 光年後方に位置する。

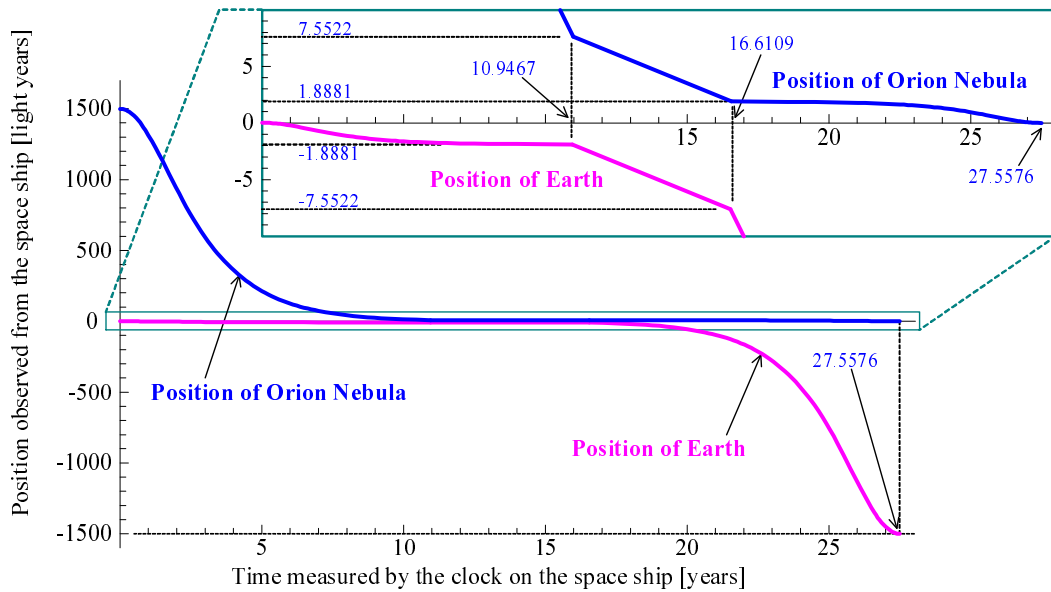


図 6.4: 宇宙船から見た地球とオリオン星雲の位置

宇宙船から見た地球とオリオン星雲の固有時間も、図??に示すように、不思議な推移をする。上で見た位置の変化のように、加速区間ではオリオン星雲の時計が急速に時を刻み、地球の時計はゆっくりと時を刻む。加速区間にいる約11年のうちにオリオン星雲の時計は1502年を刻み、地球の時計は1.9年程度しか時を刻まない。等速巡航区間では、特殊相対性理論にしたがい、地球の時計もオリオン星雲の時計もゆっくりと時を刻む。減速区間では、加速区間と立場が逆転し、地球の時計が急速に時を刻む。その結果、全行程で宇宙船の時計が27.8年のときを刻む間、地球とオリオン座ではもに1503.8年が経過している。この計算を実行するに関して、加速区間、等速巡航区間、減速区間に属する時間には、前節で計算した地球から見た宇宙船の固有時間を用いた。その結果、全行程の時間は、地球とオリオン星雲の固有時間ともに、1503.8年となり、前節で計算した地球の時間と一致している。

6.5 二者の比較

これまでの計算をまとめる意味で、地球から観測した時計の読みと宇宙船から観測した時計の読みを比較しよう。時計の読みは、表??に示すように面白い結果となる。時計の読みの合計を比較すると、静止系に存在する地球とオリオン星雲の時計は、地球と宇宙船のどちらから見ても1503.8058060年となっている。一方、宇宙船の時計は、地球と宇宙船のどちらから見ても27.5571048年である。この結果から双子のパラドックスは発生せず、必ず、宇宙船の時計が遅くなるというウラシマ効果が検証されているのだ。

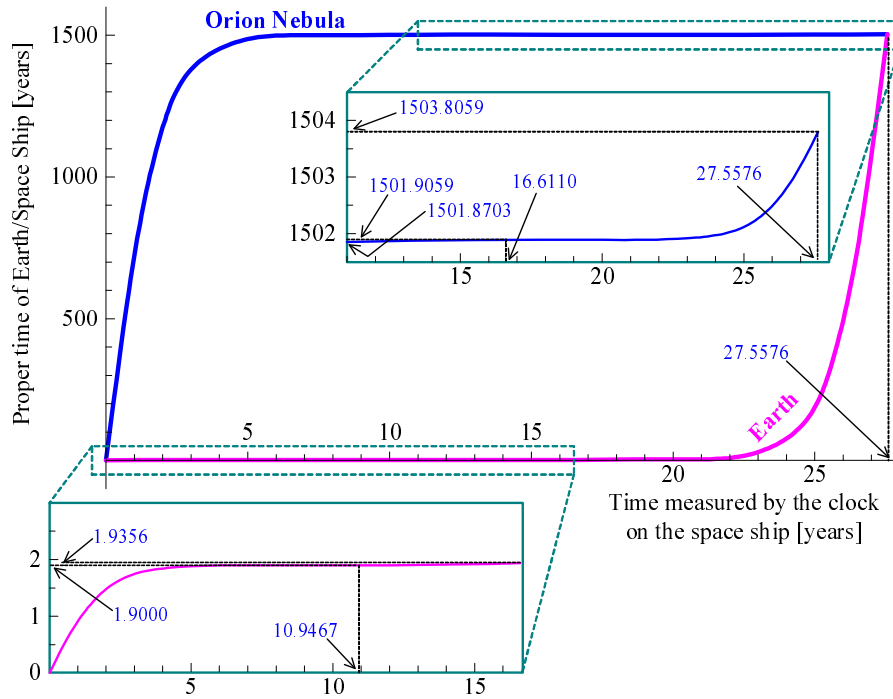


図 6.5: 宇宙船から見た地球とオリオン星雲の固有時間

表 6.5: 全行程における時計の読み

	地球からの観測		宇宙船からの観測		
	地球の時計 [年]	宇宙船の時計 [年]	地球の時計 [年]	オリオンの時計 [年]	宇宙船の時計 [年]
加速区間	301.8939913	10.9464773	1.8999323	1501.8702271	10.9464773
巡航区間	900.0178235	5.6641503	0.0356466	0.0356466	5.6641503
減速区間	301.8939913	10.9464773	1501.8702271	1.8999323	10.9464773
合計	1503.8058060	27.5571048	1503.8058060	1503.8058060	27.5571048

双子のパラドックスは異なる速度で運動する慣性系どうしの観測で発生する。この例では、巡行区間でパラドックスが発生していることになる。その区間では、地球から観測すると宇宙船の時計が遅く、宇宙船から観測すると地球やオリオン星雲の時計が遅くなっている。遅いほうの時計は速い方に比べ、 6.2934×10^{-3} 倍であるのは、地球から見ても宇宙船から見ても同じである。それは、地球から見た宇宙船の相対速度と、宇宙船から見た地球の相対速度等しいので、当然の現象である。

地球と宇宙船の両者が観測する現象が異なるのは、加速区間と減速区間である。地球は静止系であるので、宇宙船の加減速に関わらず、特殊相対性理論にしたがって、宇宙船の時計の読みが遅れる。それに対し、加速度をもつ宇宙船では、一般相対性理論にしたがい、加速度ベクトルが向かう方向の遠方になるほど時計が速く進む。加速区間ではオリオン星雲の時計が速く進み、地球の時計は遅い。減速区間ではその逆である。宇宙船から見た地球やオリオン星雲の時計は、加速区間、または、減速区間で急速に進み、特殊相対性理論で予想される時計の読みを大きく超え、双子のパラドックスを解消するのである。

