第2章　曲がった空間の幾何学

いよいよ, リーマン幾何学らしい話題に入っていく。前章ではカルテシアン座標以外に, 斜交座標を取り扱ったが, それは基本ベクトルが定ベクトルとなる単純な座標系であった。本章以降で取り扱う座標系は, 一般的に, 基本ベクトルが定ベクトルでなく, 座標によって変化するような座標系である。 そのため, 必ずしも, 前章で学んだ斜交座標系の性質が成り立つわけではないが, 微小な範囲では近似的に斜交座標系とみなされることを利用して曲がった空間の幾何学を構築する。

2.1　微小変位ベクトルと計量

曲がった空間では基本ベクトルが場所によって異なるため, 位置ベクトル $\boldsymbol{x}$ と基本ベクトルの関係 (1.12) が成り立たない。しかしながら, 図 2.1 を見ればわかるように, ごく近傍に限るならば, 近似的に斜交座標系とみなしてもよい。そこで, 曲がった空間では (1.12) の代わりに,

$$\boldsymbol{e}_\mu = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x^\mu}, \tag{2.1}$$

を用いると便利である。ついでに, 基本ベクトルに関する面白い性質をあげておこう。座標系の湾曲が座標に関して 2 階微分可能であるなら,

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x^\nu},$$

が成り立つ。これ以降, 取り扱う座標系はこの関係を使うので, ベクトルは空間座標について 2 回微分が可能であることが取り扱うための条件である。この式に (2.1) を代入すると,

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_\mu}{\partial x^\nu} = \frac{\partial \boldsymbol{e}_\nu}{\partial x^\mu}, \tag{2.2}$$

という関係が得られる。リーマン幾何学では, 基本ベクトル $\boldsymbol{e}^\mu$ を明示的に書くことが少ないが, このような基本ベクトルの性質を知っていると, リーマン幾何学の数式の裏に隠れている性質を理解しやすい。

上で述べたように, 曲がった空間でも, 近傍に限るなら斜交座標系と同じ議論が成り立つ。そこで位置ベクトルの微小変位 $\mathrm{d}x^\mu$ を考え, その微小長さを $\mathrm{d}s$ としてみよう。する

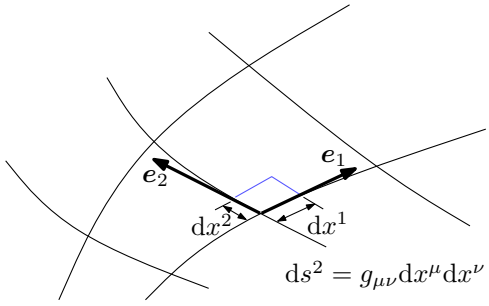


図 2.1: 曲がった空間の計量

と, その微小長さは,

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu, \tag{2.3}$$

と書くことができる。計量 $g_{\mu\nu}$ は斜交座標系と同様に, $g_{\mu\nu} \equiv \boldsymbol{e}_\mu \cdot \boldsymbol{e}_\nu$ と考えればよい。曲がった空間では, 基本ベクトル $\boldsymbol{e}_\mu$ が場所によって異なるので注意が必要である。斜交座標系のとき, 座標 x^μ が基本ベクトル $\boldsymbol{e}_\mu$ の長さを単位として測った数値であることを考えると, ベクトル $\boldsymbol{x}$ を基本ベクトル $\boldsymbol{e}^\mu$ に沿って長さ $\varDelta x^\mu$ だけ移動させると, その移動量は $\varDelta \boldsymbol{x} = \varDelta x^\mu \boldsymbol{e}_\mu$ となるはずである。その関係式から,

$$\boldsymbol{e}_\mu = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x^\mu},$$

なる数式で基本ベクトルが表現できることが導かれる。この表記からも, 基本ベクトルが場所 $\boldsymbol{x}$ に依存することがわかる。

球面座標系における基本ベクトル　半径 R の球面における座標系で基本ベクトルと計量を考えよう。球面の場所を特定するには, 天頂角 θ と円周角 φ の二つの座標があればよい。カルテシアン座標 $[x, y, z]$ と球面座標 $[\theta, \varphi]$ との関係は,

$$x = R\sin\theta\cos\varphi, \qquad y = R\sin\theta\sin\varphi, \qquad z = R\cos\theta,$$

のように書ける。カルテシアン座標 $[x, y, z]$ は球面上のベクトル $\boldsymbol{x}$ の成分であるので, これを θ と φ で偏微分すれば, 球面座標における基本ベクトルをカルテシアン座標で表現することができる。その結果を書くと,

$$\boldsymbol{e}_\theta = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} R\cos\theta\cos\varphi \\ R\cos\theta\sin\varphi \\ -R\sin\theta \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{e}_\varphi = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \varphi} = \begin{bmatrix} -R\sin\theta\sin\varphi \\ R\sin\theta\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix},$$

が得られる。ここで球面座標系の成分を $x^1 \equiv \theta$, $x^2 \equiv \varphi$ のように割り当て, 計量が $g_{\mu\nu} = \boldsymbol{e}_\mu \cdot \boldsymbol{e}_\nu$ であることに注意すると,

$$[g_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2\sin^2\theta \end{bmatrix},$$

なる計量が得られる。この結果を用いて, 半径 R の球面における微小距離を書くと, $\mathrm{d}s^2 = R^2\mathrm{d}\theta^2 + R^2\sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi$ が得られる。この微小距離はベクトル解析で知られている量と一致する。

トーラスの表面における基本ベクトル　トーラスとは図 2.2 に示すようなリング型の形状である。この図は半径 r の円筒を, その中心軸が半径 R の円を描くように曲げた形状を示している。トーラスにおいて, 半径 R のリングは大円, 半径 r の円筒の断面は小円と呼ばれる。そのようなトーラスの表面の 3 次元座標は,

$$x = (R + r\cos\theta)\,\cos\varphi, \quad y = (R + r\cos\theta)\,\sin\varphi, \quad z = r\sin\theta,$$

となる。トーラスの表面はこの数式に示すように $[\theta, \varphi]$ の二つの座標成分で記述できるわけである。トーラスの表面における基本ベクトルはこれまでと同様に計算するとができ,

$$\boldsymbol{e}_\theta = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}\theta} = \begin{bmatrix} -r\sin\theta\cos\varphi \\ -r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{e}_\varphi = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}\varphi} = \begin{bmatrix} -(R + r\cos\theta)\,\sin\varphi \\ (R + r\cos\theta)\,\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix},$$

が得られる。ここでトーラスの表面座標の成分を $x^1 \equiv \theta$, $x^2 \equiv \varphi$ のように割り当て, 計量が $g_{\mu\nu} = \boldsymbol{e}_\mu \cdot \boldsymbol{e}_\nu$ であることに注意すると,

$$[g_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & (R + r\cos\theta)^2 \end{bmatrix},$$

なる計量が得られる。この結果を用いると, トーラスの表面における微小距離が $\mathrm{d}s^2 = r^2\mathrm{d}\theta^2 + (R + r\cos\theta)^2\mathrm{d}\varphi^2$ であることがわかる。

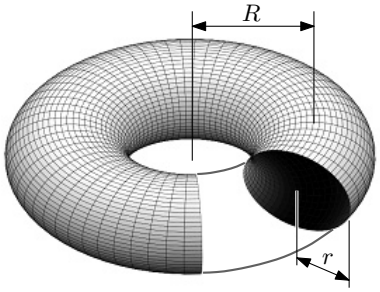


図 2.2: トーラスの形状

2.2　スカラとベクトル

スカラとベクトルはリーマン幾何学以前から用いられてきた数学量である。スカラは成分をもたない単なる数値であり, ベクトルは方向を表現するため複数の成分をもった数学

量と解釈されているかもしれないが, 実際のところ, それらは座標変換に対する性質に対して呼ばれている名称である。ということで, 座標 x^μ を別の座標 x'^μ に変換したとき, スカラやベクトルがどのように変換されるかを調べてみよう。

準備として, 基本ベクトルの変換を考えてみよう。解析学の公式より,

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x^\nu},$$

が成り立つので, 基本ベクトルは,

$$\boldsymbol{e}'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\boldsymbol{e}_\nu, \tag{2.4}$$

のように変換される。以降のリーマン幾何学では基本ベクトルを明示的に扱うことはないが, 基本ベクトルの変換則がこのようになっていることを知っていると, 後に述べるベクトルの種類が理解しやすくなる。

スカラは単なる成分をもたない数値ではない。スカラ ϕ の定義は, 座標変換をしてもその値 ϕ が不変である量である。形式的には,

$$\phi(x') = \phi(x),$$

なる数式で記述できる。そのような不変量を**スカラ**と呼ぶのである。例えば, $\mathrm{d}s^2 \equiv g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu$ で定義される微小変位の長さはスカラである。なぜなら, 長さという量は座標系に関わらず同一の値になると考えられるからである。疑り深い人のために, きちんと証明することもできる。座標系 x^μ での微小長さ $\mathrm{d}s$ に対して, 座標系 x'^μ の微小長さ $\mathrm{d}s'$ は $\mathrm{d}s'^2 = g'_{\mu\nu}\mathrm{d}x'^\mu\mathrm{d}x'^\nu$ で定義される。ここで, $g_{\mu\nu} = (\boldsymbol{e}_\mu \cdot \boldsymbol{e}_\nu)$, $g'_{\mu\nu} = (\boldsymbol{e}'_\mu \cdot \boldsymbol{e}'_\nu)$ の関係に注意して, 微小長さの自乗 $\mathrm{d}s^2$ を計算してみよう。その計算に関して, 上で計算した基本ベクトルの変換を使うと,

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}s'^2 = g'_{\mu\nu}\mathrm{d}x'^\mu\mathrm{d}x'^\nu &= (\boldsymbol{e}'_\mu \cdot \boldsymbol{e}'_\nu)\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta}\mathrm{d}x^\alpha\mathrm{d}x^\beta \\
&= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\kappa}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\lambda}(\boldsymbol{e}_\kappa \cdot \boldsymbol{e}_\lambda)\mathrm{d}x^\alpha\mathrm{d}x^\beta \\
&= \delta_\alpha{}^\kappa\delta_\beta{}^\lambda g_{\kappa\lambda}\mathrm{d}x^\alpha\mathrm{d}x^\beta = g_{\alpha\beta}\mathrm{d}x^\alpha\mathrm{d}x^\beta = \mathrm{d}s^2,
\end{aligned}$$

となるので, 微小長さ $\mathrm{d}s$ が座標変換に対して不変な値, すなわち, スカラであることが示された。後にテンソルの性質を学べば, このような計算をせずとも $\mathrm{d}s$ がスカラであることは明らかなのだが, 今のところは基本練習ということであえて証明しておいた。

スカラを偏微分して得られる量 $\partial\phi/\partial x^\mu$ について, 解析学の公式を適用してみると,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\frac{\partial \phi}{\partial x^\nu},$$

なる関係が得られる。この変換則は, 基本ベクトルの変換則 (2.4) と同じ形をしている。成分表示される任意の量 v_μ について, これと同じ性質:

$$v'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} v_\nu, \tag{2.5}$$

が成立する場合, その量 v_μ は基本ベクトルと同形という意味で**共変ベクトル**と呼ばれる。

微小変位 $\mathrm{d}x^\mu$ を $\mathrm{d}x'^\mu$ に変換した場合を考えてみよう。このベクトルの変換式は, 解析学の公式 (既に微小長さがスカラであることの証明で使ったが) によって,

$$\mathrm{d}x'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \mathrm{d}x^\nu,$$

となることが容易にわかる。これは基本ベクトルの逆変換と同じ形である。成分表示される任意の量 v^μ について, これと同じ変換則:

$$v^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} v^\nu, \tag{2.6}$$

が成り立つならば, その量 v^μ は, 基本ベクトルとは反対の性質という意味で, **反変ベクトル**と呼ばれる。ここで示したように, 空間の微小変位ベクトル $\mathrm{d}x^\mu$ は反変ベクトルの一例である。また, カルテシアン座標系を含む斜交座標系では位置座標 x^μ は反変ベクトルとなる。それに対して, 一般の座標系では, (2.6) が成り立たないため, 位置座標 x^μ はベクトルではないことにも注意しておく。

ここに示したように, 共変ベクトルと反変ベクトルは, 座標変換において, 逆の性質をもつ。やはり, 前節の斜交座標系と同様に, 反変ベクトルの添え字は右上に, 共変ベクトルの添え字は右下に書くのが習慣となっている。ベクトルを反変ベクトル, または, 共変ベクトルに分類することは物理学における場の記述などに便利である。

2.3 テンソル

前節で定義したベクトルの性質を拡張して新たな量を定義しよう。二つの反変ベクトル u^μ と v^ν を組み合わせ, 二つの添え字をもつ量 $T^{\mu\nu} \equiv u^\mu v^\nu$ を定義してみる。この量について, (2.6) を適用して座標変換してみると,

$$T'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} T^{\alpha\beta}, \tag{2.7}$$

なる関係が得られる。このような関係が成り立つ量は 2 階の**反変テンソル**と呼ばれる。逆に, 共変ベクトルを用いて $T_{\mu\nu} \equiv u_\mu v_\nu$ なる量を定義した場合, (2.5) を適用すると

$$T'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} T_{\alpha\beta}, \tag{2.8}$$

が成り立つことも容易にわかるであろう。このような量は 2 階の**共変テンソル**と呼ばれる。ところで, 2 階のテンソルにはもう一つの形が考えられる。それは, $T_\mu{}^\nu \equiv u_\mu v^\nu$ のように反変ベクトルと共変ベクトルを組み合わせた場合である。この場合も同様に,

$$T'^{\,\nu}_{\mu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} T_\alpha{}^\beta, \tag{2.9}$$

なる関係が成り立つ。この関係が成り立つ量を 2 階は**混合テンソル**と呼ばれる。2 階のテンソルは, 記述上, 行列に類似した形をしているが, 一般の行列がテンソルであるとは限らないことに注意しておく。テンソルは上で述べたような座標変換に関する性質を満たさなければならない。

さらに, 共変ベクトルと反変ベクトルをいくつも組み合わせて高階のテンソルを定義することができる。例えば, n 階反変, m 階共変の混合テンソル $T^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_m}$ について,

$$T'^{\,\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_m} = \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\alpha_2}}\frac{\partial x'^{\mu_2}}{\partial x^{\alpha_2}}\cdots\frac{\partial x'^{\mu_n}}{\partial x^{\alpha_n}}\frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial x'^{\nu_1}}\frac{\partial x^{\beta_2}}{\partial x'^{\nu_2}}\cdots\frac{\partial x^{\beta_m}}{\partial x'^{\nu_m}} T^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_m}, \tag{2.10}$$

の関係が成り立つことは容易に予想できる。このように悪のりをして高階のテンソルを定義することは可能であるが, 物理学などで頻繁に現れるのは 2 階のテンソルである。一般相対性理論でも, せいぜい 4 階のテンソルが現れる程度である。また, 前節で定義した反変ベクトルと共変ベクトルは 1 階のテンソル, そして, スカラは 0 階のテンソルである。

2.4 計量テンソル

これまでに何度も現れてきた計量 $g_{\mu\nu}$ は 2 階の共変テンソルである。そのため, $g_{\mu\nu}$ は**計量テンソル**と呼ばれる。計量テンソルは, 単なる 2 階のテンソルでなく, 非常に重要なテンソルである。計量テンソルの重要性は, 本節の最後に述べることにし, 計量テンソル $g_{\mu\nu}$ のテンソル性を示そう。それは次のように示すことができる。 空間の任意の場所における微小距離 $\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu$ は座標変換に対して不変, すなわち, スカラである。つまり,

$$g'_{\mu\nu}\mathrm{d}x'^\mu\mathrm{d}x'^\nu = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu,$$

と書くことができる。既に述べたように, 微小変位ベクトル $\mathrm{d}x^\mu$ は反変ベクトルであるので, 上式の右辺に座標変換を施してみる。すると,

$$g'_{\mu\nu}\mathrm{d}x'^\mu\mathrm{d}x'^\nu = g_{\alpha\beta}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}\mathrm{d}x'^\mu\mathrm{d}x'^\nu,$$

となるので,

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta}, \tag{2.11}$$

なる関係を得る。ゆえに, 計量 $g_{\mu\nu}$ は 2 階の共変テンソルである。

また, 逆ベクトル系の計量 $g^{\mu\nu}$ は 2 階の反変テンソルである。これについては, 計量テンソル $g_{\mu\nu}$ が 2 階のテンソル, 逆ベクトル系の計量 $g^{\mu\nu}$ が $g_{\mu\nu}$ の逆行列であることを用いれば証明できる。まず, 両者が逆行列の関係にあることを数式で表現すると, $g_{\mu\lambda}g^{\lambda\nu} = \delta_\mu{}^\nu$ となる。座標変換によって得られる計量についても同じ関係が成り立つと仮定すると, $g'_{\mu\lambda}g'^{\lambda\nu} = \delta_\mu{}^\nu$ が成り立つはずである。ここで, この式の両辺に

$$\frac{\partial x^\varepsilon}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\kappa}g^{\eta\kappa},$$

を乗じて, κ, μ, ν について和を計算してみる。左辺 (LHS) と右辺 (RHS) を別々に計算してみると,

$$\begin{aligned}
\mathrm{LHS} &= \frac{\partial x^\varepsilon}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\kappa}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\lambda}g^{\eta\kappa}g_{\alpha\beta}g'^{\lambda\nu} \\
&= \frac{\partial x^\varepsilon}{\partial x'^\nu}\delta_\kappa{}^\alpha\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\lambda}g^{\eta\kappa}g_{\alpha\beta}g'^{\lambda\nu} = \frac{\partial x^\varepsilon}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\lambda}g^{\eta\kappa}g_{\kappa\beta}g'^{\lambda\nu} \\
&= \frac{\partial x^\varepsilon}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\lambda}\delta_\beta{}^\eta g'^{\lambda\nu} = \frac{\partial x^\eta}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial x^\varepsilon}{\partial x'^\nu}g'^{\lambda\nu}, \\
\mathrm{RHS} &= \frac{\partial x^\varepsilon}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\kappa}g^{\eta\kappa}\delta_\mu{}^\nu = \frac{\partial x^\varepsilon}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\kappa}g^{\eta\kappa} = \delta_\kappa{}^\varepsilon g^{\eta\kappa} = g^{\eta\varepsilon},
\end{aligned}$$

が得られる。これらを等号で結ぶと,

$$g^{\varepsilon\eta} = \frac{\partial x^\varepsilon}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x^\eta}{\partial x'^\lambda}g'^{\nu\lambda}, \tag{2.12}$$

となり, 逆ベクトル系の計量 $g^{\varepsilon\eta}$ が 2 階の反変テンソルであることが示された。

計量テンソルは特別なテンソルである。既にみたように, 計量テンソルは線素の 2 次形式を与える係数行列である。その係数行列に空間のすべての情報が詰まっているのである。正確に計量テンソル $g_{\mu\nu}$ がわかれば, その空間の性質がすべてわかるということだ。現時点で, 計量テンソルは単に 2 次軽視を与える係数行列という位置づけに過ぎないが, これから本書で明らかにしていく過程で, すべての空間の性質は計量テンソルから導き出されるのだ。

計量テンソルが線素, すなわち, 微小距離の尺度を与えていることを考えると, 局所的な振る舞いを調べると空間のすべてがわかる, ということだろうか? 現実的にそれは正しいとは言えない。局所的に線素を評価した時点で, 誤差なくけ量テンソルが特定できるならば空間のすべてがわかることになるのだが, 局所的な観測で誤差なく線素を特定することはほぼ不可能である。例えば, 半径 R の球面において, 計量テンソルは $g_{11} = R^2$, $R_{22} = R^2\sin^2\theta$, $g_{12} = g_{21} = 0$ なる要素で構成される。ここで, 球面上の座標として, 天頂

角 $x^1 \equiv \theta$, 方位角 $x^2 \equiv \varphi$ を用いると仮定した。近似的にであるが, 球面の例として地球の表面を考えればよい。計量が正確にわかれば局所的な観測で地球が丸いことがわかるはずなのだ。しかし, $g_{22} = R^2 \sin^2\theta$ なる計量は, 最初から地球が丸いと知っているから設定できるのだ。地球が丸いと知らなければ, 局所的な観測では, x^1 を東向きの長さ, x^2 を北向きの長さとしてとり, $g_{11} = g_{22} = 1$, $g_{12} = g_{21} = 0$ としてしまうだろう。これは 2 次元のカルテシアン座標であり, 平面上に描かれた地図の座標系である。このように, 局所的な観測では, 現実的に空間の曲がりを認識できないことの方が多い。実際, 地球が丸いことに人類が気付いたのは紀元前 2500 年頃, ピタゴラスが最初と言われる[1]。しかし, その知識は広く周知されることなく, ルネサンス以降, コペルニクスなどによって再発見されることになる。

局所的な観測による計量テンソルの特定で認識でないなら, どうやって空間を認識するのか? 後に示すように, 曲がった空間では, 平行移動してもベクトルの位置が徐々に変化する。そのベクトルの変化によって, 観測域を広げていくと徐々に不整合が現れる。その不整合は, 後の章で導入するクリストッフェル記号やリーマン・クリストッフェルの曲率テンソルとして現れるのだ。それらの不整合から, 計量テンソル $g_{\mu\nu}$ を推測することによって正しい空間の姿がわかってくるのだ。

2.5 反変成分と共変成分の変換

既に定義した共変ベクトルと反変ベクトルは, 別々に存在するものではなく, 計量に依存するものである。共変的な性質と反変的な性質は, 計量テンソルを用いて容易に変換することができるのである。ここでは, その事実を検証してみよう。

計量テンソル $g_{\mu\nu}$ はテンソルの共変成分と反変成分を変換するはたらきをもっている。これを示すために, 反変ベクトル v^ν に $g_{\mu\nu}$ を乗じて縮約をとった値 $g_{\mu\nu}v^\nu$ を考えてみよう。これを座標変換すると,

$$g'_{\mu\nu}v'^\nu = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}g_{\alpha\beta}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\kappa}v^\kappa = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}g_{\alpha\beta}v^\beta,$$

となるので, $g_{\alpha\beta}v^\beta$ が共変ベクトルであることがわかる。一方, 共変ベクトル u^ν については, 逆計量テンソル $g^{\mu\nu}$ を用いて反変ベクトルに変換することができる。先ほどと同様に,

$$g'^{\mu\nu}u'_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta}g^{\alpha\beta}\frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\nu}v_\kappa = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}g^{\alpha\beta}v_\beta,$$

となるので, $g^{\alpha\beta}v_\beta$ が反変ベクトルであることが示された。

[1] Devid Deming, "Science and Technology in World History," Volume 1, McFarland & Company, Inc., ISBN 978-0-7864-3932-4, p. 32, 2010.

それでは, 反変ベクトルを $g_{\mu\nu}$ を用いて共変ベクトルに変換した結果を $g^{\mu\nu}$ を用いて反変ベクトルに戻した場合を計算してみよう。すると,

$$g^{\kappa\mu}(g_{\mu\nu}v^{\nu}) = g^{\kappa\mu}g_{\mu\nu}v^{\nu} = \delta_{\nu}{}^{\kappa}v^{\nu} = v^{\kappa},$$

となり, 同一のベクトルに戻ることがわかる。つまり, 計量テンソルによる変換の意味で, 反変ベクトルに対応する共変ベクトルは 1 つしか存在しない。また, その逆も真である。よって, 反変ベクトル v^{μ} に対応する唯一の共変ベクトルを v_{μ} と書くことにすれば,

$$v_{\mu} = g_{\mu\nu}v^{\nu}, \tag{2.13}$$

$$v^{\mu} = g^{\mu\nu}v_{\nu}, \tag{2.14}$$

と書くことができる。これは, 斜交座標系の例で述べた (1.17), (1.18) と同一の関係である。この結果より, 共変ベクトルと反変ベクトルは別々に存在するものではないと結論できる。共変ベクトルと反変ベクトルは, 空間の計量を反変テンソルか共変テンソルのどちらで取り扱うのかに依存するのであって, 共変ベクトルと反変ベクトルが独立に存在するわけはないのだ。したがって, ベクトルの表記は必要に応じて, 共変から反変, またはその逆への変換が常に可能である。

また, ベクトル反変成分と共変成分を掛けて縮約をとった値 $u_{\mu}v^{\mu}$ $(= g_{\mu\nu}v^{\mu}u^{\nu})$ をベクトルの**内積**という。内積は座標変換に対して不変の値, すなわち, スカラであることは容易にわかるであろう。

2.6 ヤコビアン行列と擬テンソル

行列式の定義で用いたレビ・チビタ記号が座標変換に対して面白いふるまいをするので紹介しておこう。レビ・チビタ記号は, 添え字の交換関係を示す記号であるが, 座標変換してみるとテンソルに類似した振る舞いを示すのだ。その前段階として, ヤコビアン行列を思い出してみよう。ヤコビアン行列は, 座標変換において現れる座標成分の偏微分を,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x'^1}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^1}{\partial x^2} & \frac{\partial x'^1}{\partial x^3} & \cdots & \frac{\partial x'^1}{\partial x^n} \\ \frac{\partial x'^2}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^2}{\partial x^2} & \frac{\partial x'^2}{\partial x^3} & \cdots & \frac{\partial x'^2}{\partial x^n} \\ \frac{\partial x'^3}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^3}{\partial x^2} & \frac{\partial x'^3}{\partial x^3} & \cdots & \frac{\partial x'^3}{\partial x^n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x'^n}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^n}{\partial x^2} & \frac{\partial x'^n}{\partial x^3} & \cdots & \frac{\partial x'^n}{\partial x^n} \end{bmatrix}$$

のように表記した行列である。さらに, その行列式を $|\partial x'/\partial x|$ をヤコビアンとよぶ。ヤコビアンは解析学において, 積分変数を変換する際に使用されることが多い。既にみたように, 計量テンソル $g_{\mu\nu}$ は 2 階のテンソルであるので, 座標変換について,

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta},$$

なる関係が成立する。ここで両辺の行列式を計算すると,

$$g' = \left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right|^2 g,$$

となる。この計算には, 行列の積の行列式が, 行列式どうしの積に等しいこと, すなわち, $\det(AB) = \det A \det B$ を利用した。この関係式は, しばしば,

$$\sqrt{g'} = \left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right| \sqrt{g}, \tag{2.15}$$

という形で用いられる。また,

$$\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\alpha} = \delta_\mu{}^\nu,$$

なる関係より, 座標変換の逆変換によるヤコビアン行列は, もとの変換のヤコビアンの逆行列であり,

$$\left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right| \left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right| = 1, \tag{2.16}$$

が成り立つ。

行列式の定義を用いて, 形式的にヤコビアンを展開すると,

$$\left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right| = \epsilon^{\mu_1\mu_2\mu_3\cdots\mu_n}\frac{\partial x'^1}{\partial x^{\mu_1}}\frac{\partial x'^2}{\partial x^{\mu_2}}\frac{\partial x'^3}{\partial x^{\mu_3}}\cdots\frac{\partial x'^n}{\partial x^{\mu_n}}, \tag{2.17}$$

のように書かれる。ここで, $\epsilon^{\mu_1\mu_2\mu_3\cdots\mu_n}$ は前章で紹介したレビ・チビタ記号である。前章で述べた行列式の性質から, 分母の添え字についてもレビ・チビタ記号を使って,

$$\epsilon^{\mu_1\mu_2\mu_3\cdots\mu_n}\frac{\partial x'^{\lambda_1}}{\partial x^{\mu_1}}\frac{\partial x'^{\lambda_2}}{\partial x^{\mu_2}}\frac{\partial x'^{\lambda_3}}{\partial x^{\mu_3}}\cdots\frac{\partial x'^{\lambda_n}}{\partial x^{\mu_n}} = \epsilon^{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\cdots\lambda_n}\left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|, \tag{2.18}$$

が成り立つことがわかる。また, ヤコビアン行列の逆行列についても同様の考察によって展開でき,

$$\epsilon_{\mu_1\mu_2\mu_3\cdots\mu_n}\frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial x'^{\lambda_1}}\frac{\partial x^{\mu_2}}{\partial x'^{\lambda_2}}\frac{\partial x^{\mu_3}}{\partial x'^{\lambda_3}}\cdots\frac{\partial x^{\mu_n}}{\partial x'^{\lambda_n}} = \epsilon_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\cdots\lambda_n}\left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right|, \tag{2.19}$$

となることも明らかである。

ところで, レビ・チビタ記号は添え字の並びによって決まる量であるので, 座標変換によって変化することはない。仮に, x' 系におけるレビ・チビタ記号を $\epsilon'^{\mu_1\mu_2\mu_3\cdots\mu_n}$ と書いた

とするなら, $\epsilon'^{\mu_1\mu_2\mu_3\cdots\mu_n} = \epsilon^{\mu_1\mu_2\mu_3\cdots\mu_n}$ が成り立つべきである。この関係を (2.18) に代入すると,

$$\epsilon'^{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\cdots\lambda_n} = \epsilon^{\mu_1\mu_2\mu_3\cdots\mu_n}\frac{\partial x'^{\lambda_1}}{\partial x^{\mu_1}}\frac{\partial x'^{\lambda_2}}{\partial x^{\mu_2}}\frac{\partial x'^{\lambda_3}}{\partial x^{\mu_3}}\cdots\frac{\partial x'^{\lambda_{n1}}}{\partial x^{\mu_{n1}}}\left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right| = \epsilon^{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\cdots\lambda_n}, \tag{2.20}$$

なる式を得る。これを見ると, レビ・チビタ記号がテンソルのように見えてくる。しかしながら, 余計な因数 $|\partial x/\partial x'|$ があるので, レビ・チビタ記号はテンソルではない。当然, (2.19) についても同様のことが言えるので,

$$\epsilon'_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\cdots\lambda_{n1}} = \epsilon_{\mu_1\mu_2\mu_3\cdots\mu_n}\frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial x'^{\lambda_1}}\frac{\partial x^{\mu_2}}{\partial x'^{\lambda_2}}\frac{\partial x^{\mu_3}}{\partial x'^{\lambda_3}}\cdots\frac{\partial x^{\mu_n}}{\partial x'^{\lambda_n}}\left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right| = \epsilon_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\cdots\lambda_n}, \tag{2.21}$$

が成り立つはずである。テンソルではないが, (2.20) のような変換則をもつ量を**擬テンソル**, さらに, (2.21) のような変換則をもつ量を**擬テンソル密度**という。つまり, レビ・チビタ記号 $\epsilon^{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\cdots\lambda_n}$ は擬テンソルである。

上に述べた事実に基づき, レビ・チビタ記号を用いてテンソルを作ることができる。まず, (2.20) の両辺に $1/\sqrt{g'}$ を乗じた量を計算してみよう。この計算に関して, (2.15) の関係に注意すると,

$$\frac{1}{\sqrt{g'}}\epsilon'^{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\cdots\lambda_n} = \frac{1}{\sqrt{g}}\epsilon^{\mu_1\mu_2\mu_3\cdots\mu_n}\frac{\partial x'^{\lambda_1}}{\partial x^{\mu_1}}\frac{\partial x'^{\lambda_2}}{\partial x^{\mu_2}}\frac{\partial x'^{\lambda_3}}{\partial x^{\mu_3}}\cdots\frac{\partial x'^{\lambda_n}}{\partial x^{\mu_n}}, \tag{2.22}$$

となる。同様に, (2.15) の関係にしながら (2.21) の両辺に $\sqrt{g'}$ を乗じると,

$$\sqrt{g'}\,\epsilon'_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\cdots\lambda_n} = \sqrt{g}\,\epsilon_{\mu_1\mu_2\mu_3\cdots\mu_n}\frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial x'^{\lambda_1}}\frac{\partial x^{\mu_2}}{\partial x'^{\lambda_2}}\frac{\partial x^{\mu_3}}{\partial x'^{\lambda_3}}\cdots\frac{\partial x^{\mu_n}}{\partial x'^{\lambda_n}}, \tag{2.23}$$

が得られる。つまり, $\epsilon^{\mu_1\mu_2\mu_3\cdots\mu_n}/\sqrt{g}$ が反変テンソルであり, $\sqrt{g}\,\epsilon_{\mu_1\mu_2\mu_3\cdots\mu_n}$ が共変テンソルになっているのである。

2.7 対称テンソルと反対称テンソル

物理学で用いるテンソルは, 対称性をもつことが多い。ここでは, 対称性をもつテンソルについて紹介しておこう。一つは対称テンソル, もう一つは反対称テンソルである。

テンソル $T^{\mu_0\mu_1\cdots\mu_{r-1}}$ が, 任意の二つの添え字を交換しても値が等しい交換条件:

$$T^{\mu_0\mu_1\cdots\mu_i\cdots\mu_j\cdots\mu_{r-1}} = T^{\mu_0\mu_1\cdots\mu_j\cdots\mu_i\cdots\mu_{r-1}}, \tag{2.24}$$

が成立する場合, そのテンソルは**対称テンソル**と呼ばれる。反変テンソルに限らず, 共変テンソルであってもこの関係が成り立てば対称テンソルと呼ばれる。例えば 2 階のテンソルの場合,

$$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu},$$

が成立する。見かけの上では, 2 階の対称テンソルは対称行列に類似している。既に出てきた例をあげると, 計量テンソル $g_{\mu\nu}$ とその逆行列 $g^{\mu\nu}$ は対称テンソルである。物理学では対称テンソルといえば 2 階のテンソルくらいしか見かけないが, 3 階テンソルの場合には,

$$T^{\lambda\mu\nu} = T^{\lambda\nu\mu} = T^{\nu\lambda\mu} = T^{\nu\mu\lambda} = T^{\mu\nu\lambda} = T^{\mu\lambda\nu},$$

なる添え字の交換関係が成り立ち, 等しくなるテンソルの成分が 6 個存在する。さらに, r 階のテンソルに対称テンソルを発展させると, テンソル成分 $T^{\mu_0\mu_1\cdots\mu_{r-1}}$ に等しくなるテンソルの成分は, 自分自身を入れて $r!$ 個も存在する。そう考えると, 対称テンソルの独立成分の数は, 全成分の数 n^r に比べて非常に小さいと予想される。対称テンソルの独立成分の数は, 後で考えることにする。

反対称テンソルは, 任意の添え字の入れ替えに対して, テンソル成分の数値の符号が入れ替わる:

$$T^{\mu_0\mu_1\cdots\mu_i\cdots\mu_j\cdots\mu_{r-1}} = -T^{\mu_0\mu_1\cdots\mu_j\cdots\mu_i\cdots\mu_{r-1}}, \tag{2.25}$$

なる交換関係が成り立つテンソルのことを言う。当然, 共変テンソルの添え字の入れ替え関してこの性質が成り立てば, そのテンソルはやはり反対称テンソルである。この交換関係からわかることとして, 反対称テンソルの成分は, T^{01231} のように添え字に同じ数字が重複する場合, 必然的にゼロになる。つまり, ゼロではない反対称テンソルの成分は, その添え字がすべて異なる値である。したがって, n 次元の反対称テンソルの階数 r には上限があり, その上限値は $r = n$ である。例えば, 2 階のテンソルについて交換関係を書くと,

$$T^{\mu\nu} = -T^{\nu\mu},$$

である。この性質をもつテンソルは本書ではまだ現れていないが, 2 階の反対称テンソルは物理学でもよく現れる。さらに, 3 階のテンソルの反対称テンソルには,

$$T^{\lambda\mu\nu} = -T^{\lambda\nu\mu} = T^{\nu\lambda\mu} = -T^{\nu\mu\lambda} = T^{\mu\nu\lambda} = -T^{\mu\lambda\nu},$$

なる交換関係が成り立つ。一般的な r 階の反対称テンソルの任意の成分 $T^{\mu_0\mu_1\cdots\mu_{r-1}}$ は, 対称テンソルの場合と同様に, 従属関係にある成分が自分自身を含め $r!$ 個存在する。さらに, 上で述べたように, 反対称テンソルの成分は, 重複する添え字をもつ場合, 必然的にゼロになるので独立成分の数は対称テンソルよりもかなり少ない。空間が n 次元で, r 階の反対称テンソルの独立な成分の数は, n 個の整数から r 個を選び出す組み合わせの数であるので,

$$N_-(n, r) = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}, \tag{2.26}$$

となる。例えば, 4 次元の反対称テンソルの場合, 2 階のテンソルなら独立成分は 6 個, 3 階のテンソルなら 4 個しかない。さらに, 4 階のテンソルでは独立成分は 1 個しか存在しないのである。

さて, 先ほど後回しにした対称テンソルの独立成分の数はどうであろうか。いきなり結果を書くと, n 次元の r 階の対称テンソルの独立な成分の数は,

$$N_+(n,r) = \frac{(n+r-1)!}{r!\,(n-1)!}, \tag{2.27}$$

となる。順を追ってこの関係式を導いてみよう。例えば, 5 次元の 3 階テンソルを考えると, その独立な成分は,

$$\begin{array}{ccccc}
(1,1,1), & (1,1,2), & (1,1,3), & (1,1,4), & (1,1,5), \\
(1,2,2), & (1,2,3), & (1,2,4), & (1,2,5), & (1,3,3), \\
(1,3,4), & (1,3,5), & (1,4,4), & (1,4,5), & (1,5,5), \\
(2,2,2), & (2,2,3), & (2,2,4), & (2,2,5), & (2,3,3), \\
(2,3,4), & (2,3,5), & (2,4,4), & (2,4,5), & (2,5,5), \\
(3,3,3), & (3,3,4), & (3,3,5), & (3,5,5), & (3,4,5), \\
(3,5,5), & (4,4,4), & (4,4,5), & (4,5,5), & (5,5,5)
\end{array}$$

のように, すなわち, 添え字の値が $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \mu_3 \leq \cdots$ となるように成分を並べればよい。この組み合わせをつくるには, まず, 図 2.3 の Step 0 のように, 8 $(= 5+3)$ 個の円を横に並べる。続いて, 最も左を除く 7 $(= 5+3-1)$ 個の円のうち 3 個を選んで塗りつぶす (Step 1)。塗りつぶす円の選び方は, 最も左の円を選ばない, 重複した円を選ばない, という規則さえ守られていれば自由である。例えば, 連続した 3 つを選んでもよい。次のステップ (Step2) として, 塗られていない円に左から順に番号をつける。左側の塗りつぶされた円から順に, それらのすぐ左に位置する数値を読み取っていけば, 対称テンソルの独立成分の組み合わせが得られる。図 2.3 の例では, $(2,4,4)$ が得られる。上に書いた規則か

Step 0:	○	○	○	○	○	○	○	○
Step 1:	○	○	●	○	○	●	●	○
Step 2:	1	2	●	3	4	●	●	5

図 2.3: 5 次元 3 階の対称テンソルの独立成分の選び方の例

ら, 5 次元 3 階の対称テンソルの独立成分の数は, 8 個の円から塗りつぶす 3 個を選ぶ組み合わせの数であるので, その数は $7!/(3!\cdot 4!) = 35$ となり, 上に書き下した独立成分の数と一致していることがわかるだろう。これを一般化して, n 次元 r 階の対称テンソルを考えた場合, その独立成分の数は, $n+r-1$ 個の円から塗りつぶす r 個を選ぶ組み合わせの数となる。したがって,

$$N_+(n,r) = \frac{(n+r-1)!}{r!\,(n-1)!},$$

が得られる。相対性理論で扱われる 4 次元空間における対称テンソルの場合, 2 階テンソルならば 10 個, 3 階テンソルならば 20 個, 4 階テンソルならば 35 個の独立成分が存在する。

既に述べたように, 反対称テンソルでは異なる添え字に同一の数字が現れる場合, そのテンソル成分が必然的にゼロとなる。そのような成分の数は, 対称テンソルの独立成分と反対称テンソルの独立成分の数の差で表すことができる。例えば, n 次元空間の場合, 2 階の反対称テンソルでは n 個, 3 階の反対称テンソルでは n^2 個, 4 階の反対称テンソルでは $(n^2+1)n/2$ 個が必然的なゼロ成分である。具体例として, 相対性理論が扱う 4 次元時空における反対称テンソルの必然的なゼロ成分は, 2 階テンソルでは 4 個, 3 階テンソルでは 16 個, 4 階テンソルでは 34 個である。

2.8 面積素と体積素

取り扱っている n 次元空間の微小座標変位 $\mathrm{d}x^\mu$ で囲まれる平行超立体の微小体積 (体積素) を考えてみよう。平行超立体の微小体積は, n 次元空間の積分を記述するときに必要要素であり, その微小体積が座標変換に対してどのように振る舞うのかが興味のあることである。

いきなり n 次元というのも想像しにくいだろうから 2 次元から始めよう。その場合, 微小変位 $\mathrm{d}x^1$ と $\mathrm{d}x^2$ で張られる平行四辺形の面積が 2 次元における体積素 (面積素) である。曲がっている空間を取り扱っているとはいえ, 微小な面積を取り扱うので, 空間の曲がりを気にすることなく, 斜交座標と同じように考えればよい。注意すべきことは, 基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1$ と $\boldsymbol{e}_2$ が直交しているとは限らず, しかも, 基本ベクトルの長さも 1 とは限らないということである。つまり, 面積素は単に $\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2$ になるのではなく, 基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1$ と $\boldsymbol{e}_2$ が張る平行四辺形の面積に $\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2$ を乗じた積である。基本ベクトルがなす平行四辺形は図 2.4 のような図形を考えるとよい。ここで, 2 つの基本ベクトルのなす角を α とし, $\boldsymbol{e}_1$ と $\boldsymbol{e}_2$ の長さを, それぞれ, e_1, e_2 としよう。そのとき, それらの基本ベクトルが張る平行四辺形の面積の自乗 S^2 は,

$$
\begin{aligned}
S^2 &= (e_1 e_2 \sin\alpha)^2 = (e_1)^2(e_2)^2 - (e_1 e_2 \cos\alpha)^2 \\
&= (\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_1)(\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_2) - (\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2)^2,
\end{aligned}
$$

となる。さらに, 計量テンソルが $g_{\mu\nu} = \boldsymbol{e}_\mu\cdot\boldsymbol{e}_\nu$ であることを思い出すと, 上の結果は,

$$
S^2 = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_1) & (\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2) \\ (\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_1) & (\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix},
$$

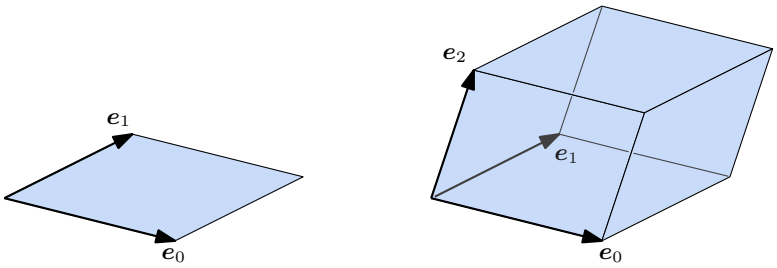
となる。つまり, 2 次元の場合, 微小変位 $\mathrm{d}x^1$ と $\mathrm{d}x^2$ が張る面積素は $\sqrt{g}\,\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2$ と書くことができる。

次に 3 次元の場合を考えてみよう。基本ベクトルを $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ とし, それらの長さを, それぞれ, e_1, e_2, e_3 とする。さらに, $\boldsymbol{e}_\mu$ と $\boldsymbol{e}_\nu$ のなす角を $\theta_{\mu\nu}$ とする。この場合の体積素は, 3

つの基本ベクトルが張る平行 6 面体の体積を $\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3$ 倍した量である。まず, 3 つの基本ベクトルが張る平行 6 面体の体積の自乗 V^2 は,

$$V^2 = \begin{vmatrix} (e_1)^2 & e_1e_2\cos\theta_{12} & e_1e_3\cos\theta_{13} \\ e_2e_1\cos\theta_{21} & (e_2)^2 & e_2e_3\cos\theta_{23} \\ e_3e_1\cos\theta_{31} & e_3e_2\cos\theta_{32} & (e_3)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix},$$

となる。したがって, 3 次元の面積素も $\sqrt{g}\,\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3$ と表すことができる。以上の考察を n 次元に拡張すると, n 次元の体積素は $\sqrt{g}\,\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\cdots\mathrm{d}x^n$ となる。



(a) Two dimensional. (b) Three dimensional.

図 2.4: 2 次元と 3 次元の体積素の例

座標系 x^μ から異なる座標系座標系 x'^μ に変換した場合, 体積素がどのように変換されるか考えてみよう。ここで, 計量テンソルの行列式の座標変換と, 重積分におけるヤコビの定理を用いると,

$$\begin{aligned} \sqrt{g'}\,\mathrm{d}x'^1\mathrm{d}x'^2\cdots\mathrm{d}x'^n &= \left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right|\sqrt{g}\cdot\left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\cdots\mathrm{d}x^n \\ &= \sqrt{g}\,\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\cdots\mathrm{d}x^n, \end{aligned} \tag{2.28}$$

が得られる。つまり, 体積素は座標の選び方には無関係, すなわち, スカラである。座標変換によって座標を変換したとはいえ, 体積自体が変化してはならないので, 当然として成立する事実が導出できたわけだ。

2.9 面テンソルと立体テンソル

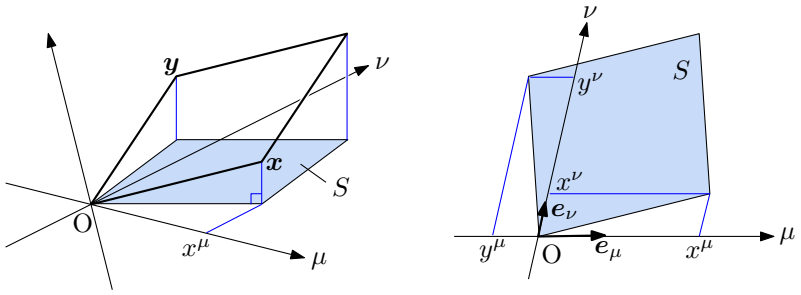
本節では面テンソルと立体テンソルを紹介しよう。まず, n 次元空間に 2 つのベクトル $\boldsymbol{x} = x^\lambda\boldsymbol{e}_\lambda$ と $\boldsymbol{y} = y^\lambda\boldsymbol{e}_\lambda$ がある。この 2 つのベクトルが張る平行四辺形について考えてみよう。この平行四辺形を, $\boldsymbol{e}_\mu$ と $\boldsymbol{e}_\nu$ が張る平面 ($\mu\nu$ 平面と呼ぶことにする) に投影してできる平行四辺形を考えよう。その投影面上の平行四辺形は, $x^\mu\boldsymbol{e}_\mu + x^\nu\boldsymbol{e}_\nu$ と $y^\mu\boldsymbol{e}_\mu + y^\nu\boldsymbol{e}_\nu$ によって張られる平行四辺形となるはずである。その $\mu\nu$ 平面に投影された平行四辺形の面積は,

$$S = (x^\mu y^\nu - x^\nu y^\mu)S_{(\mu)(\nu)},$$

となる。ここで, $S_{(\mu)(\nu)}$ は基本ベクトル $\boldsymbol{e}_\mu$ と $\boldsymbol{e}_\nu$ が張る平行四辺形の面積である。また, この面積の添え字に括弧をつけているのは, μ と ν についてアインシュタインの総和の規約を適用しないことを意味する。面積 S を基本ベクトルが張る平行四辺形の面積 $S_{(\mu)(\nu)}$ で割った商:

$$\xi^{\mu\nu} = x^\mu y^\nu - x^\nu y^\mu, \tag{2.29}$$

は, 2 階の反変テンソルである。このテンソルは, 定義式からわかるように, $\xi^{\mu\nu} = -\xi^{\nu\mu}$ なる反対称性がある。このように定義された 2 階の反対称テンソルを**面テンソル**と呼ぶ。



(a) Perspective. (b) $\mu\nu$-plane.

図 2.5: 空間中の平行四辺形とその投影図

同様の定義が 3 階のテンソルに関しても可能である。三つのベクトル $\boldsymbol{x} \equiv x^\mu \boldsymbol{e}_\mu$, $\boldsymbol{y} \equiv y^\mu \boldsymbol{e}_\mu$, $\boldsymbol{z} \equiv z^\mu \boldsymbol{e}_\mu$ は平行 6 面体を張る。次元数が 3 を超える空間での射影なので理解に苦しむかもしれないが, その平行 6 面体を $\lambda\mu\nu$ 立体に投影してできた平行 6 面体 $\boldsymbol{e}_\lambda$, $\boldsymbol{e}_\mu$, $\boldsymbol{e}_\nu$ が張る平行 6 面体の体積で割った商は,

$$\xi^{\lambda\mu\nu} = \begin{vmatrix} x^\lambda & y^\lambda & z^\lambda \\ x^\mu & y^\mu & z^\mu \\ x^\nu & y^\nu & z^\nu \end{vmatrix}, \tag{2.30}$$

となる。このように定義された量 $\xi^{\lambda\nu\mu}$ を**立体テンソル**と呼ぶ。この定義式から, 立体テンソルには,

$$\xi^{\alpha\beta\gamma} = -\xi^{\alpha\gamma\beta} = \xi^{\beta\gamma\alpha} = -\xi^{\beta\alpha\gamma} = \xi^{\gamma\alpha\beta} = -\xi^{\gamma\beta\alpha},$$

なる反対称関係がある。この反対称性を具体的に説明すると, 添え字 α, β, γ に同じ添え字が存在した場合, $\xi^{\lambda\nu\mu} = 0$ となる。また, 任意の 2 つの添え字を入れ替えた場合, 立体テンソルの値は符号が逆転する。

2.10 デュアルテンソル

反対称のテンソルは, デュアルテンソルと呼ばれる双対関係のテンソルを定義すると便利なことがある。デュアルテンソルは単に数学的な表現に過ぎないように見えるが, 物理

学において, そのテンソルが表現する物理的意味を理解しやすい記述に変換するためにデュアルテンソルを用いることがある。

例として, 4 次元の場合を考えよう。反変テンソル $F^{\mu\nu}$ と $F^{\lambda\mu\nu}$ は, それぞれ, 次のように定義される $F^*_{\alpha\beta}$ と F^*_α と双対な関係にある。

$$F^*_{\alpha\beta} = \frac{\sqrt{g}}{2}\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}F^{\mu\nu}, \qquad F^*_\alpha = \frac{\sqrt{g}}{6}\epsilon_{\alpha\lambda\mu\nu}F^{\lambda\mu\nu}.$$

ここで, $F^{\mu\nu}$ と $F^{\lambda\mu\nu}$ が反対称テンソルであることを用いると, 上の定義式は次のようになる。

$$\begin{aligned}
&F^*_{12} = \sqrt{g}\,F^{34}, \quad F^*_{13} = \sqrt{g}\,F^{42}, \quad F^*_{14} = \sqrt{g}\,F^{23},\\
&F^*_{34} = \sqrt{g}\,F^{12}, \quad F^*_{42} = \sqrt{g}\,F^{13}, \quad F^*_{23} = \sqrt{g}\,F^{14},\\
&F^*_{1} = \sqrt{g}\,F^{234}, \quad F^*_{2} = \sqrt{g}\,F^{314}, \quad F^*_{3} = \sqrt{g}\,F^{124}, \quad F^*_{4} = \sqrt{g}\,F^{132}.
\end{aligned}$$

取り扱う空間を n 次元としたとき, r 階の反変テンソル $T^{\mu_s\mu_{s+1}\cdots\mu_{r-1}}$ に対応するデュアルテンソルは,

$$T^*_{\mu_r\mu_{r+1}\cdots\mu_{n-1}} = \frac{\sqrt{g}}{r!}\epsilon_{\mu_0\mu_1\cdots\mu_{r-1}\mu_r\mu_{r+1}\cdots\mu_{n-1}}T^{\mu_0\mu_1\cdots\mu_{r-1}}, \tag{2.31}$$

と定義される。前節で学んだように, $\sqrt{g}\,\epsilon_{\mu_1\cdots\mu_n}$ がテンソルであるので, 名前のとおりデュアルテンソルはテンソルとしての性質をもつ。一方, r 階の反変テンソル $T_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_r}$ に対応するデュアルテンソルも,

$$T^{*\mu_{r+1}\mu_{r+2}\cdots\mu_n} = \frac{1}{\sqrt{g}\,r!}\epsilon^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_r\mu_{r+1}\mu_{r+2}\cdots\mu_n}T_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_r}, \tag{2.32}$$

のように定義される。やはり, 前節で学んだように $\epsilon^{\mu_1\cdots\mu_n}/\sqrt{g}$ がテンソルであるので, このデュアルテンソルもテンソルとしての性質をもつ。さらに, もとのテンソルが r 階であるなら, それに対応するデュアルテンソルは $n-r$ 階のテンソルである。さらに, 反変テンソルのデュアルテンソルは共変テンソルであり, 共変テンソルのデュアルテンソルは反変テンソルである。

デュアルテンソルの例として, 3 次元共変ベクトル v_μ の回転テンソルについて考えよう。後の章で説明するが, 共変ベクトルの回転テンソルは,

$$T_{\mu\nu} = \nabla_\mu v_\nu - \nabla_\nu v_\mu = \frac{\partial v_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial v_\mu}{\partial x^\nu},$$

のように定義される。この回転テンソルの 3 次元空間におけるデュアルテンソルは,

$$T^{*\lambda} = \frac{1}{2\sqrt{g}}\epsilon^{\mu\nu\lambda}T_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{g}}\epsilon^{\mu\nu\lambda}\,\frac{\partial v_\nu}{\partial x^\mu},$$

となる。このように, 3 次元空間の 2 階共変テンソルのデュアルテンソルは反変ベクトルとなる。その反変ベクトルの成分を書くと,

$$
\begin{aligned}
T^{*1} &= \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial v_3}{\partial x^2} - \frac{\partial v_2}{\partial x^3}\right), \\
T^{*2} &= \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x^3} - \frac{\partial v_3}{\partial x^1}\right), \\
T^{*3} &= \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x^1} - \frac{\partial v_1}{\partial x^2}\right),
\end{aligned}
$$

となる。例えば, カルテシアン座標を考えた場合, $g = 1$ となるので, このデュアルテンソルが 3 次元のカルテシアン座標系では回転ベクトルと一致することがわかる。カルテシアン座標系だけでなく, 一般の座標系についても 3 次元空間の回転ベクトルが, 回転テンソルのデュアルテンソルであることを次の章で説明する。

最初に説明したように, 一般の n 次元でもデュアルテンソルは定義できる。詳しくは述べないが, 相対性理論で取り扱う 4 次元時空でのデュアルテンソルの例として電磁場テンソル $F_{\mu\nu}$ があげられる[2]。このテンソルの F_{0k} $(k = 1, 2, 3)$ は電場ベクトルを表す。それに対応する電磁場のデュアルテンソルの成分 F^{*0k} は磁束密度ベクトルを表す。

[2]繰り返し説明するとおり, 相対性理論なので添え字は 0 から開始する。添え字 0 が時間に対応し, 1 から 3 が空間座標 $[x, y, z]$ に対応する。