第7章　部分空間と曲面論

本章では, n 次元空間の中の部分空間を取り扱う。部分空間とは, 空間の制限された領域ではなく, 少ない次元で取り扱える空間である。例えば, 3 次元空間中の球面は, 天頂角と方位角で場所を特定できるので, 2 次元となる。それが部分空間の例である。現実に我々が視覚的に認識できるのは 3 次元空間までなので, 身近な部分空間とは, 3 次元中の曲面 (2 次元空間), せいぜい, その中に存在する曲線 (1 次元空間) であろう。本章では, 一般的な n 次元空間を取り扱うため, 3 次元空間中の曲面をさらに拡張した理論を構成する。その理論の副産物として, 球面における測地線が大円でなければならないことなどが導かれる。

7.1　部分空間

部分空間とは, 単に体積的に制限された領域ではない。もとの空間の一部分であり, かつ, 特定の条件ものとで少ない次元で取り扱える空間のことである。例えば, 3 次元のカルテシアン座標系 $[x, y, z]$ において, $z = 0$ のみを取り扱うのであれば, 座標 $[x, y]$ のみで位置を特定できる。これが部分空間の例である。この場合, 部分空間は 3 次元空間中の平面ということだ。別の例として, 定数 a を用いて,

$$x = a\sin\theta\cos\varphi, \quad y = a\sin\theta\sin\varphi, \quad z = a\cos\theta,$$

のように, 三つの座標成分が二つのパラメータ $[\theta, \varphi]$ で一意的に決まるような空間を考えることができる。その空間は, 3 次元空間中の球面である。二つのパラメータで位置が特定できるので, 球面は 2 次元である。したがって, 球面も 3 次元の部分空間の例である。

7.1.1　第 1 基本テンソル

本項で示すように, リーマン空間中の部分空間もリーマン空間である。その事実によって, 部分空間中の線素も, 後に示すように計量テンソルを用いた 2 次形式で記述できる。特に, 部分空間の計量テンソルは第 1 基本テンソルとも呼ばれる。

部分空間の導入にあたり, これまで考えてきた n 次元のリーマン空間を V_n なる記号で記述することにしよう。その空間から m 次元 $(m < n)$ の空間 V_m を取りだす。いうまでもなく, n 次元空間の任意の点は座標 $[x^1, x^2, \ldots, x^n]$ で特定され, 微小距離は $\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu$ で与えられる。空間 V_n において, 座標 x^μ が m 個のパラメータで表現できるように点の集合が選ばれたとき, その集合は n 次元空間中に m 次元の部分空間をつくっている。座標 x^μ が m 個のパラメータで表現できるとは,

$$x^\mu = x^\mu(\hat{x}^1, \hat{x}^2, \ldots, \hat{x}^m) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, n),$$

のように, 座標 x^μ が, $\hat{x}^1, \hat{x}^2, \ldots, \hat{x}^m$ の関数として記述できることを意味する。この関数は, これまでの議論と同様, 1 価関数であれば非線形であっても構わない。部分空間の次元が m であることは, 座標 x^μ をパラメータ $\hat{x}^j$ について偏微分して得られる行列:

$$B_j{}^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \hat{x}^j} \quad (\mu = 1, 2, \ldots, n; \quad j = 1, 2, \ldots, m),$$

の階数 (rank) が m であるという意味である。このとき, パラメータ $[\hat{x}^1, \hat{x}^2, \ldots, \hat{x}^m]$ が m 次元部分空間の座標であると考えるのだ。なお, 本章において, 座標や他の数学的量で部分空間で定義される量であることを区別するために, $\hat{x}$ や $\bar{g}$ のように, 文字の上にアクセント記号を付して記述することにする。

空間中の微小距離も, 部分空間の座標 $[\hat{x}^1, \hat{x}^2, \ldots, \hat{x}^m]$ で書き換えることができる。空間 V_n において, 空間中の微小距離 $\mathrm{d}s$ は, 計量テンソル $g_{\mu\nu}$ を用いて $\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu$ のように与えられる。この数式を変形すると,

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu = g_{\mu\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial \hat{x}^j}\frac{\partial x^\nu}{\partial \hat{x}^k}\mathrm{d}\hat{x}^j\mathrm{d}\hat{s}^k = B_j{}^\mu B_k{}^\nu\, g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}\hat{x}^j\mathrm{d}\hat{x}^k,$$

となるので, 部分空間 V_m の計量 $\hat{g}_{jk}$ を用いて,

$$\mathrm{d}s^2 = \hat{g}_{jk}\,\mathrm{d}\hat{x}^j\mathrm{d}\hat{x}^k, \tag{7.1}$$

なる形で微小距離が記述できそうだ。ここで, 変換行列 $B_j{}^\mu$ は,

$$B_j{}^\mu \equiv \frac{\partial x^\mu}{\partial \hat{x}^j},$$

のように定義した。この変換行列を用いて, 部分空間における計量テンソルが,

$$\hat{g}_{jk} = B_j{}^\mu B_k{}^\nu\, g_{\mu\nu}, \tag{7.2}$$

のように変換される。線素が (7.1) のように記述できるので, 部分空間も m 次元のリーマン空間である。なお, 部分空間 V_m の計量テンソル $\hat{g}_{jk}$ は**第 1 基本テンソル**と呼ばれる。

空間 V_n の中で選ばれた二つの微小ベクトル $\mathrm{d}x^\mu$ と δx^μ がなす角は, 部分空間 V_m において測った角度と等しい。この性質は, $\mathrm{d}x^\mu$ と δx^μ の内積と, ベクトルの大きさの関係を調べれば正当性を示すことができる。計算する前に,

$$\mathrm{d}x^\mu = B_j{}^\mu \mathrm{d}\hat{x}^j, \qquad \delta x^\mu = B_j{}^\mu \delta\hat{x}^j,$$

であることに注意しておこう。二つのベクトルがなす角を θ とし, リーマン空間におけるなす角 θ の定義にしたがって, 余弦関数 $\cos\theta$ を計算すると,

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \delta x^\nu}{\sqrt{g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu}\sqrt{g_{\mu\nu}\delta x^\mu \delta x^\nu}} \\ &= \frac{g_{\mu\nu}B_j{}^\mu B_k{}^\nu \mathrm{d}\hat{x}^j \delta\hat{x}^k}{\sqrt{g_{\mu\nu}B_j{}^\mu B_k{}^\nu \mathrm{d}\hat{x}^j \mathrm{d}\hat{x}^k}\sqrt{g_{\mu\nu}B_j{}^\mu B_k{}^\nu \delta\hat{x}^j \delta\hat{x}^k}} \\ &= \frac{\hat{g}_{jk}\mathrm{d}\hat{x}^j \delta\hat{x}^k}{\sqrt{\hat{g}_{jk}\mathrm{d}\hat{x}^j \mathrm{d}\hat{x}^k}\sqrt{\hat{g}_{jk}\delta\hat{x}^j \delta\hat{x}^k}},\end{aligned}$$

が得られる。この数式の左辺は V_n における角度に相当し, 右辺は部分空間 V_m における角度に相当する。したがって, 二つのベクトルがなす角は, 部分空間から見ても等しいということだ。

部分空間 V_m から見た角度とそれを包含する高次元空間 V_n から見た角度が等しいのは当然と思える結果かもしれない。例えば, 図 7.1 に示すように, 球面に二つのベクトルを配置して, それらがなす角を球面上測ったとき θ が得られたとする。その角度を 3 次元空間から測っても θ が得られるということだ。そもそも, その操作は, 同一の角度を測っている

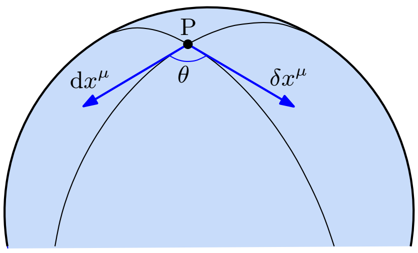

図 7.1: 球面に接する二つのベクトル間の角度

るわけであって, V_m から測るか V_n から測るかは, 分度器の当て方を指定しているに過ぎない。そのような状況を想像すると, 角度が等しいというのは, ごく当然の性質ということだ。

球面座標系　部分空間の例として, 3 次元空間中の球面座標について調べてみよう。カルテシアン座標系 $[x, y, z]$ において, 原点 O に半径 a の球が存在し, その球面の位置を $[\theta, \varphi]$

なる二つのパラメータで特定する。ここで, θ は天頂角, φ は方位角であるとする。このとき, 3 次元空間中の座標 $[x, y, z]$ は,

$$x = a\sin\theta\cos\varphi, \quad y = a\sin\theta\sin\varphi, \quad z = a\cos\theta,$$

によって $[\theta, \varphi]$ と関係づけられる。ここで, $[x^1, x^2, x^3] \equiv [x, y, z]$, $[\hat{x}^0, \hat{x}^1] \equiv [\theta, \varphi]$ のように記号を設定しよう。そのとき, 変換行列は,

$$[B_j{}^\mu] = \begin{bmatrix} a\cos\theta\cos\varphi & a\cos\theta\sin\varphi & -a\sin\theta \\ -a\sin\theta\sin\varphi & a\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{bmatrix},$$

のように, 2 行 3 列の行列として設定できる。ここで, $B_j{}^\mu$ の添え字 j が行に対応し, μ が列に対応する。この変換行列を用いて部分空間における第 1 基本テンソル (計量テンソル) $\hat{g}_{jk}$ を算出してみるのだ。なお, 3 次元のカルテシアン座標系の計量テンソル $g_{\mu\nu}$ は 3 行 3 列の単位行列である。第 1 基本テンソルまでの中間形態として, $B_k{}^\nu g_{\mu\nu}$ を計算すると,

$$\begin{aligned}[B_k{}^\nu g_{\mu\nu}] &= \begin{bmatrix} a\cos\theta\cos\varphi & a\cos\theta\sin\varphi & -a\sin\theta \\ -a\sin\theta\sin\varphi & a\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a\cos\theta\cos\varphi & a\cos\theta\sin\varphi & -a\sin\theta \\ -a\sin\theta\sin\varphi & a\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{bmatrix},\end{aligned}$$

が得られる。ここで, k が行に, μ が列に対応するように行列表記した。カルテシアン座標系の計量テンソルが単位行列なので, $B_k{}^\nu g_{\mu\nu}$ は外見的に $B_k{}^\nu$ と同じである。続いて, $\hat{g}_{jk} = B_j{}^\mu(B_k{}^\nu g_{\mu\nu})$ を計算すると,

$$\begin{aligned}[\hat{g}_{jk}] &= \begin{bmatrix} a\cos\theta\cos\varphi & a\cos\theta\sin\varphi & -a\sin\theta \\ -a\sin\theta\sin\varphi & a\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a\cos\theta\cos\varphi & -a\sin\theta\sin\varphi \\ a\cos\theta\sin\varphi & a\sin\theta\cos\varphi \\ -a\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2\sin^2\theta \end{bmatrix},\end{aligned}$$

が得られる。この結果によって, $\mathrm{d}s^2 = a^2\,\mathrm{d}\theta^2 + a^2\sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2$ が得られるわけだ。この結果は球面座標におけるよく知られた微小距離と一致するはずだ。いうまでもなく, 球面座標は 3 次元空間中に設定される部分空間の一例である。よく知られた部分空間の例において第 1 基本テンソルを計算することによって, 部分空間イメージができたのではないだろうか。

7.1.2　接線と法線

部分空間は, 3 次元空間中における球面のように, 特定の条件にしたがって空間の一部を占める点の集合である。球面の例では, 球面に接する線 (接線) や, 球面に垂直なベクトル (法線) が設定できる。同様に, 一般の部分空間に対して, 接線や法線が設定できる。

上のように言ったものの, 一般の n 次元空間において, m 次元の部分空間に接する状況が想像できないだろう。我々は 3 次元までしか視角的に見えないのだから仕方のないことだ。そのような理由で, 残念ながら, 3 次元中の曲面の接線・法線までしか想像できない。あとはルールを決めるのだ。部分空間 V_m でのベクトルが $\hat{v}^j$ で, そのベクトルを空間 V_n の座標系で表現すると v^μ になる仮定する。そのとき, n 次元のベクトル v^μ は V_m への接ベクトルである, という決まりごとにしたがって議論を発展させるのだ。

部分空間 V_m における微小ベクトル $\mathrm{d}x^\mu$ は, 空間 V_n から見ると, 部分空間を構成する曲面のような空間[1] に含まれる微小ベクトルである。その微小ベクトルは, そのような曲面 (すなわち V_m) に接する直線を与えると考えることができる。ここで, 部分空間 V_m の中の微小ベクトル $\mathrm{d}x^\mu$ を数式で表現すると,

$$\mathrm{d}x^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \hat{x}^j}\mathrm{d}\hat{x}^j = B_j{}^\mu \mathrm{d}\hat{x}^j,$$

が得られる。このように数式を書くと, $B_j{}^\mu$ が空間 V_n において, 部分空間 V_m への接ベクトルであるとの解釈ができる。わかりにくいので解説しよう。空間 V_n の基本ベクトルを $\boldsymbol{e}_\mu$, 部分空間 V_m の基本ベクトルを $\hat{\boldsymbol{e}}_j$ とする。部分空間 V_m 上の微小ベクトルの反変成分を $\mathrm{d}\hat{x}^j$ とし, それを V_n から見たときの反変成分を $\mathrm{d}x^\mu$ とする。そのとき,

$$\boldsymbol{e}_\nu\, \mathrm{d}x^\nu = \hat{\boldsymbol{e}}_j\, \mathrm{d}\hat{x}^j,$$

が成立する。この数式に逆基本ベクトル $\boldsymbol{e}^\mu$ を内積すると,

$$\mathrm{d}x^\mu = \boldsymbol{e}^\mu \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_j\, \mathrm{d}\hat{x}^j,$$

が得られる。ここで, 基本ベクトルの性質 $\boldsymbol{e}^\mu \cdot \boldsymbol{e}_\nu = \delta^\mu{}_\nu$ を利用した。この関係式から, $B_j{}^\mu = \hat{\boldsymbol{e}}_j \cdot \boldsymbol{e}^\mu$ であることがわかる。つまり, $B_j{}^\mu$ は部分空間 V_m の基本ベクトル $\hat{\boldsymbol{e}}_j$ を空間 V_n から見たときの第 μ 反変成分である。部分空間 V_m 上のベクトルは, 空間 V_n から見ると V_m への接ベクトルである。したがって, $B_j{}^\mu$ は空間 V_m への接ベクトルを与える。なお, 既に書いたように, $B_j{}^\mu$ を配列した行列の階数が m であるので, V_m に接する独立なベクトルは m 個とれる。つまり, $B_j{}^\mu$ に関して, 添え字 j は m 個存在する接ベクトルを区

[1] 2 次元を超えた次元であるが n 次元全体より小さいので, 超曲面と呼びたいところだ。しかし, 超曲面は $n-1$ 次元空間に与えられた専門用語であるので, その名称は適切ではない。ということで, 曲面のような空間と呼ぶしかないか。

別するための番号 $(j=1,2,\ldots,m)$ あり, 添え字 μ はベクトルの反変成分を指定する番号 $(\mu=1,2,\ldots,n)$ である。

上に書いたように, ${B_j}^\mu$ は V_m 上の基本ベクトル $\hat{\boldsymbol{e}}_j$ の第 μ 反変成分を与えるので, 基本ベクトル $\hat{\boldsymbol{e}}_j$ は, $\hat{\boldsymbol{e}}_j = {B_j}^\mu \boldsymbol{e}_\mu$ のように表現できる。基本ベクトル $\hat{\boldsymbol{e}}_j$ の 1 次結合も V_m 上のベクトルであるので, V_n からみると V_m への接ベクトルである。つまり,

$$\boldsymbol{v} = \hat{v}^j \hat{\boldsymbol{e}}_j = {B_j}^\mu \hat{v}^j \boldsymbol{e}_\mu,$$

は V_m への接ベクトルということだ。したがって,

$$v^\mu = {B_j}^\mu \hat{v}^j, \tag{7.3}$$

は V_m への接ベクトルの反変成分を与える。なお, $\hat{v}^\mu$ は任意の実数である。

空間 V_n は n 次元空間であるから, n 個だけ独立なベクトルがとれる。部分空間 V_m に接する位置で, 既に m 個だけ独立なベクトルが V_m への接ベクトルとして確保されているので, 残りの $n-m$ 個は V_m と垂直なベクトル, すなわち, 法線ベクトルである。法線ベクトルを与える要素として, ${B_P}^\mu$ $(P=m+1,m+2,\ldots,n)$ をとることにしよう。このような仮定において,

$$g_{\mu\nu}{B_j}^\mu {B_P}^\nu = 0, \quad g_{\mu\nu}{B_P}^\mu {B_Q}^\nu = \delta_{PQ} \quad (P,Q=m,m+1,\ldots,n-1),$$

が成立する。つまり, 反変ベクトル ${B_P}^\mu$ は, いかなる ${B_j}^\mu$ と直交する。言い換えると, 反変ベクトル ${B_P}^\mu$ は V_m に対して法線ベクトルとして振る舞う。一方, 法線ベクトルどうし (${B_P}^\mu$ と ${B_Q}^\mu$) も互いに直交する。このように定義された ${B_P}^\mu$ は**単位法線**と呼ばれる。接線ベクトルは, $v^\mu = {B_j}^\mu \hat{v}^j$ のように V_n と V_m の間で変換できたが, 法線ベクトルは変換ができない。なぜなら, 法線ベクトルは部分空間 V_m では定義できないからだ。

変換行列 ${B_j}^\mu$ の反変成分と共変成分を変換するため, 一般の空間 V_n と同様に, 反変基本テンソル $\hat{g}^{jk}$ を定義しよう。定義された反変基本テンソルを用いて,

$$B^j{}_\mu = g_{\mu\nu}\hat{g}^{jk}{B_k}^\nu,$$

のように反変成分と共変成分を互いに変換できるとする。そのように定義すれば,

$$B^j{}_\lambda {B_k}^\lambda = g_{\nu\lambda}\hat{g}^{ja}{B_a}^\nu {B_k}^\lambda = \hat{g}_{ak}\hat{g}^{ja},$$

が成立するはずだ。ここで, 計量テンソルの座標変換 $\hat{g}_{ak} = g_{\nu\lambda}{B_a}^\nu {B_k}^\lambda$ を利用した。また, V_m の法線に関して, $B_{P\lambda} = g_{\mu\nu}{B_P}^\nu$ と考えれば,

$$B_\mu{}^j {B_k}^\mu = \delta^j{}_k, \quad B_{P\mu}{B_Q}^\mu = \delta_{PQ}, \quad B^j{}_\mu B^\mu{}_P = 0, \quad B_{P\lambda}{B_k}^\mu = 0, \tag{7.4}$$

が成立する。トリッキーな記述だが, これらの等式は, $[B^j{}_\mu, B_{P\mu}]$ からつくった n 行 n 列の行列と, $[B_j{}^\mu, B_P{}^\mu]$ からつくった n 行 n 列の行列が互いに逆行列の関係にあることを示唆している。これらの数式をまとめて,

$$B^j{}_\mu B_j{}^\nu + B_{P\mu} B_P{}^\nu = \delta_\mu{}^\nu, \tag{7.5}$$

のように書くこともできる。ここで, P にも $P = m+1, m+2, \ldots, n$ の範囲でアインシュタインの総和の規約が適用される。この数式から,

$$\hat{g}^{jk} B_j{}^\eta B_k{}^\lambda + B_P{}^\eta B_P{}^\lambda = g^{\lambda\eta}, \tag{7.6a}$$

$$\hat{g}^{jk} B^j{}_\mu B^k{}_\eta + B_{P\mu} B_{P\eta} = g_{\mu\eta}, \tag{7.6b}$$

が得られる。第 1 式は (7.5) に $g^{\mu\eta}$ を乗じて縮約をとることによって得られる。第 2 式は $g^{\lambda\eta}$ を乗じて縮約をとることによって得られる。

7.1.3　クリストッフェル記号

部分空間 V_m もリーマン空間となるので, クリストッフェル記号を定義できる。クリストッフェル記号は計量テンソルを座標で偏微分することによって実現できる。既に示したように, 部分空間での計量テンソルは,

$$\hat{g}_{jk} = B_j{}^\mu B_k{}^\nu g_{\mu\nu},$$

によって与えられる。部分空間 V_m でのクリストッフェル記号は, 空間 V_n と同様に,

$$\hat{\varGamma}^h{}_{jk} = \frac{\hat{g}^{ha}}{2}\left(\frac{\partial \hat{g}_{ka}}{\partial \hat{x}^j} + \frac{\partial \hat{g}_{ja}}{\partial \hat{x}^k} - \frac{\partial \hat{g}_{jk}}{\partial \hat{x}^a}\right),$$

によって定義される。ここで, 偏微分が部分空間の座標 $\hat{x}^\mu$ について演算されることに注意が必要だ。クリストッフェル記号を得るため, 計量テンソルを偏微分すると,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{g}_{ka}}{\partial \hat{x}^j} &= \frac{\partial B_k{}^\mu}{\partial \hat{x}^j} B_a{}^\nu g_{\mu\nu} + B_k{}^\mu \frac{\partial B_a{}^\nu}{\partial \hat{x}^j} g_{\mu\nu} + B_k{}^\mu B_a{}^\nu B_j{}^\lambda \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda},\\
\frac{\partial \hat{g}_{ja}}{\partial \hat{x}^k} &= \frac{\partial B_j{}^\mu}{\partial \hat{x}^k} B_a{}^\nu g_{\mu\nu} + B_j{}^\mu \frac{\partial B_a{}^\nu}{\partial \hat{x}^k} g_{\mu\nu} + B_j{}^\mu B_a{}^\nu B_k{}^\lambda \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda},\\
\frac{\partial \hat{g}_{jk}}{\partial \hat{x}^a} &= \frac{\partial B_j{}^\mu}{\partial \hat{x}^a} B_k{}^\nu g_{\mu\nu} + B_j{}^\mu \frac{\partial B_k{}^\nu}{\partial \hat{x}^a} g_{\mu\nu} + B_j{}^\mu B_k{}^\nu B_a{}^\lambda \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda},
\end{aligned}$$

が得られる。右辺の第 3 項は, 空間 V_n の座標についての偏微分で記述するため, $\partial/\partial \hat{x}^j = B_j{}^\lambda (\partial/\partial x^\lambda)$ なる関係を利用した。計算を進めるにあたり,

$$\frac{\mathrm{d}B_j{}^\mu}{\mathrm{d}\hat{x}^k} = \frac{\mathrm{d}B_k{}^\mu}{\mathrm{d}\hat{x}^j} = \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial \hat{x}^j \partial \hat{x}^k},$$

に注意すると, 上記の偏微分を組み合わせて,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \hat{g}_{ka}}{\partial \hat{x}^j}+\frac{\partial \hat{g}_{ja}}{\partial \hat{x}^k}-\frac{\partial \hat{g}_{jk}}{\partial \hat{x}^a}\right)=\frac{1}{2}B_a{}^{\nu}B_j{}^{\lambda}B_k{}^{\mu}\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}}+\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}}-\frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^{\nu}}\right)+B_a{}^{\nu}\frac{\partial B_k{}^{\mu}}{\partial \hat{x}^j}g_{\mu\nu},$$

が得られる。クリストッフェル記号 $\hat{\Gamma}^h{}_{jk}$ を計算するには, この数式に $\hat{g}^{ha}$ を乗じて縮約をとればよいので,

$$\begin{aligned}
\hat{\Gamma}^h{}_{jk}&=\frac{\hat{g}^{ha}}{2}\left(\frac{\partial \hat{g}_{ka}}{\partial \hat{x}^j}+\frac{\partial \hat{g}_{ja}}{\partial \hat{x}^k}-\frac{\partial \hat{g}_{jk}}{\partial \hat{x}^a}\right)\\
&=\hat{g}^{ha}B_a{}^{\nu}\left[\frac{1}{2}B_j{}^{\lambda}B_k{}^{\mu}\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}}+\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}}-\frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^{\nu}}\right)+\frac{\partial B_k{}^{\mu}}{\partial \hat{x}^j}g_{\mu\nu}\right]\\
&=B^h{}_{\eta}\left[B_j{}^{\lambda}B_k{}^{\mu}\cdot\frac{g^{\eta\nu}}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}}+\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}}-\frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^{\nu}}\right)+\frac{\partial B_k{}^{\eta}}{\partial \hat{x}^j}\right],
\end{aligned}$$

のように計算される。ここで, $B^h{}_{\eta}=\hat{g}^{ha}g_{\eta\nu}B_a{}^{\nu}$ である。したがって, 部分空間 V_m におけるクリストッフェル記号は,

$$\hat{\Gamma}^h{}_{jk}=B^h{}_{\eta}\left(B_j{}^{\lambda}B_k{}^{\mu}\,\Gamma^{\eta}{}_{\mu\nu}+\frac{\partial B_k{}^{\eta}}{\partial \hat{x}^j}\right),\tag{7.7}$$

なる公式によって空間 V_n のクリストッフェル記号と関係づけられる。なお, 右辺の第 2 項はクリストッフェル記号がテンソルでないことに起因する。関係式 (7.7) は, クリストッフェルの記号が $\Gamma^{\mu}{}_{\nu\lambda}=(\partial \boldsymbol{e}_{\nu}/\partial x^{\lambda})\cdot\boldsymbol{e}^{\mu}$ のように, 基本ベクトルの導関数によって定義されることを利用すると,

$$\begin{aligned}
\hat{\Gamma}^h{}_{jk}&=\frac{\partial \hat{\boldsymbol{e}}_j}{\partial \hat{x}^k}\cdot\hat{\boldsymbol{e}}^h=\frac{\partial(B_j{}^{\mu}\boldsymbol{e}_{\mu})}{\partial \hat{x}^k}\cdot\hat{\boldsymbol{e}}^h\\
&=\frac{\partial B_j{}^{\mu}}{\partial \hat{x}^k}\boldsymbol{e}_{\mu}\cdot\hat{\boldsymbol{e}}^h+B_j{}^{\nu}\,\frac{\partial \boldsymbol{e}_{\nu}}{\partial \hat{x}^k}\cdot\hat{\boldsymbol{e}}^h\\
&=\frac{\partial B_j{}^{\mu}}{\partial \hat{x}^k}\boldsymbol{e}_{\mu}\cdot\hat{\boldsymbol{e}}^h+B_j{}^{\nu}\,\frac{\partial \boldsymbol{e}_{\nu}}{\partial x^{\lambda}}B_k{}^{\lambda}\cdot\hat{\boldsymbol{e}}^h\\
&=\frac{\partial B_j{}^{\mu}}{\partial \hat{x}^k}\boldsymbol{e}_{\mu}\cdot\hat{\boldsymbol{e}}^h+B_j{}^{\nu}B_k{}^{\lambda}B^h{}_{\mu}\,\frac{\partial \boldsymbol{e}_{\nu}}{\partial x^{\lambda}}\cdot\boldsymbol{e}^{\mu}\\
&=\frac{\partial B_j{}^{\mu}}{\partial \hat{x}^k}B^h{}_{\mu}+B_j{}^{\nu}B_k{}^{\lambda}B^h{}_{\mu}\,\Gamma^{\mu}{}_{\nu\lambda},
\end{aligned}$$

のように部分空間中のクリストフェルの記号が計算される。この計算結果は, (7.7) と同一である。むしろ, この導出方法の方が少ない計算で公式 (7.7) が導出できる。

球面座標系　本節で導出した (7.7) の正当性を確認するため, 球面座標系のクリストッフェル記号を計算しよう。ここで, V_n は 3 次元のカルテシアン座標, V_m が 3 次元空間中の球面

を表す 2 次元の座標系であるとする。カルテシアン座標系ではクリストッフェル記号が完全にゼロになるので, 計算すべき数式は,

$$\hat{\Gamma}^h{}_{jk} = B^h{}_\eta \frac{\partial B_k{}^\eta}{\partial \hat{x}^j},$$

である。変換行列 $B_k{}^\eta$ は前に計算した。その変換行列の反変成分と共変成分の立場を変え, $B^h{}_\eta$ を計算しよう。この計算には, 計量テンソルの逆行列 $\hat{g}^{ha}$ が必要であるが, 既に計算された計量テンソル $\hat{g}_{ha}$ から容易に計算できる。そのように既に得られた計算材料を用いると, $B^h{}_\eta$ は,

$$\begin{aligned}
[B^h{}_\eta] &= \begin{bmatrix} \dfrac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{a^2\sin^2\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a\cos\theta\cos\varphi & a\cos\theta\sin\varphi & -a\sin\theta \\ -a\sin\theta\sin\varphi & a\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \dfrac{\cos\theta\cos\varphi}{a} & \dfrac{\cos\theta\sin\varphi}{a} & -\dfrac{\sin\theta}{a} \\ -\dfrac{\sin\varphi}{a\sin\theta} & \dfrac{\cos\varphi}{a\sin\theta} & 0 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

のように計算される。ここで, h と η は, それぞれ, 行と列に対応する。続いて, $\partial B_k{}^\eta / \partial \hat{x}^j$ を計算すると,

$$\left[\frac{\partial B_k{}^\eta}{\partial \hat{x}^j}\right] = \left[\begin{array}{ccc} -a\sin\theta\cos\varphi & -a\sin\theta\sin\varphi & -a\cos\theta \\ -a\cos\theta\sin\varphi & a\cos\theta\cos\varphi & 0 \\ \hline -a\cos\theta\sin\varphi & a\cos\theta\cos\varphi & 0 \\ -a\sin\theta\cos\varphi & -a\sin\theta\sin\varphi & 0 \end{array}\right],$$

が得られる。この行列は, 2 行 3 列の小行列を 2 行 1 列の大行列に含む形で記述した。小行列の行と列は, それぞれ, k と η に対応する。一方, 大行列の行は j に対応する。これらの計算結果を用いてクリストッフェル記号を計算すると,

$$[\hat{\Gamma}^h{}_{jk}] = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & -\sin\theta\cos\theta \\ \hline 0 & \cot\theta \\ \cot\theta & 0 \end{array}\right],$$

が得らえる。この計算結果において, 小行列の行と列は, それぞれ, j と k に対応し, 大行列の行は h に対応する。当然であるが, この計算結果は第 3 章で計算されたクリストッフェルの記号と一致する。

7.1.4 オイラー・スカウテンの曲率テンソル

空間 V_n と部分空間 V_m との間の変換行列 ${B_j}^\mu$ は, 添え字 j に関して共変ベクトル, μ に関して反変ベクトルである。なぜなら, 既に書いたように, ${B_j}^\mu = \hat{\boldsymbol{e}}_j \cdot \boldsymbol{e}^\mu$ であることから, ${B_j}^\mu$ は, 空間 V_n から見た基本ベクトル $\hat{\boldsymbol{e}}_j$ の第 μ 成分である。これと同時に, ${B_j}^\mu$ は空間 V_m から見た逆基本ベクトル $\boldsymbol{e}^\mu$ の第 j 共変成分である。その意味で, ${B_j}^\mu$ は反変ベクトルと共変ベクトルの性質をもち合わせている。

反変ベクトルや共変ベクトルは, 共変微分に関して, 若干異なる性質を示す。任意の反変ベクトル u^μ と共変ベクトル u_μ の共変微分は, 第 4 章で導出したように,

$$\delta u^\mu = \mathrm{d}u^\mu + {\mathit{\Gamma}^\mu}_{\nu\lambda}\,\mathrm{d}x^\nu\, u^\lambda, \quad \delta u_\mu = \mathrm{d}u_\mu + {\mathit{\Gamma}^\alpha}_{\lambda\mu}\,\mathrm{d}x^\lambda\, u_\alpha,$$

となる。このように, 右辺第 2 項は, 基本ベクトルが座標によって変化することに対する補正項として追加されている。変換行列 ${B_j}^\mu$ の共変微分は, 基本的には第 4 章にしたがうのだが, 注意すべきことがある。それは, 反変性は空間 V_n で, 共変性は空間 V_m で, というように性質ごとに対象とする空間が異なることである。その取り扱いを決めるため, $\hat{u}_j v^\mu$ のように, 空間 V_m で定義された共変ベクトル $\hat{v}_j$ と空間 V_n で定義された反変ベクトル v^μ の積を共変微分してみよう。微積分の公式にしたがって計算すると,

$$\begin{aligned}
\delta(\hat{u}_j v^\mu) &= (\delta\hat{u}_j)\, v^\mu + \hat{u}_j\,(\delta v^\mu) \\
&= (\mathrm{d}\hat{u}_j - {\hat{\mathit{\Gamma}}^h}_{kj}\,\mathrm{d}\hat{x}^k\,\hat{u}_h)\, v^\mu + \hat{u}_j\,(\mathrm{d}v^\mu + {\mathit{\Gamma}^\mu}_{\nu\lambda}\,\mathrm{d}x^\nu\, v^\lambda) \\
&= \mathrm{d}(\hat{u}_j v^\mu) + {\mathit{\Gamma}^\mu}_{\nu\lambda}\,\mathrm{d}x^\nu\,\hat{u}_j v^\lambda - {\hat{\mathit{\Gamma}}^h}_{kj}\,\mathrm{d}\hat{x}^k\,\hat{u}_h v^\mu,
\end{aligned}$$

が得られる。これを参考に ${B_j}^\mu$ の共変微分を書き下すのだ。そもそも, ${B_j}^\mu$ が $\hat{u}_j v^\mu$ のような構造であるはずなので, 同一の規則性で共変微分が記述できるはずなのだ。上の計算結果を適用すると,

$$\delta {B_j}^\mu = \mathrm{d}{B_j}^\mu + {\mathit{\Gamma}^\mu}_{\nu\lambda}\,\mathrm{d}x^\nu\,{B_j}^\lambda - {\hat{\mathit{\Gamma}}^h}_{kj}\,\mathrm{d}\hat{x}^k\,{B_h}^\mu, \tag{7.8}$$

が得られる。これが ${B_j}^\mu$ の共変微分というわけだ。この数式から共変微分係数 $\hat{\nabla}_k {B_j}^\mu$ に書き換えたいのだが, 上の数式には $\mathrm{d}x^\nu$ と $\mathrm{d}\hat{x}^k$ が混在するので注意が必要だ。ここで,

$$\mathrm{d}x^\nu = \frac{\partial x^\nu}{\partial \hat{x}^k}\,\mathrm{d}\hat{x}^k = {B_k}^\nu\,\mathrm{d}\hat{x}^k,$$

を利用すれば, 微小変化量は $\mathrm{d}\hat{x}^k$ で統一できる。したがって, ${B_j}^\mu$ の共変微分係数は,

$$\hat{\nabla}_k {B_j}^\mu = \frac{\partial {B_j}^\mu}{\partial \hat{x}^k} + {\mathit{\Gamma}^\mu}_{\nu\lambda}{B_k}^\nu {B_j}^\lambda - {\hat{\mathit{\Gamma}}^h}_{kj}{B_h}^\mu, \tag{7.9}$$

のように書くことができる。このように定義された共変微分係数は, V_m に沿って拡張された共変微分係数, または, ファン・デア・ベルデン-ボルトロッティの共変微分係数と呼

ばれる。ここまでたどってきた数式変形によって明らかなように, この種の共変微分係数はテンソルとして振る舞う。

変換行列の共変微分係数 $\hat{\nabla}_k B_j{}^{\nu}$ は, **オイラー・スカウテンの曲率テンソル**として定義される。その定義を見るには, $B_j{}^{\mu} = \partial x^{\mu}/\partial \hat{x}^j$ に注意して共変微分係数を書き直す。計算過程も書くと,

$$\begin{aligned}\hat{\nabla}_k B_j{}^{\mu} &= \frac{\partial B_j{}^{\mu}}{\partial \hat{x}^k} + \Gamma^{\mu}{}_{\nu\lambda} B_k{}^{\nu} B_j{}^{\lambda} - \hat{\Gamma}^h{}_{kj} B_h{}^{\mu} \\ &= \frac{\partial^2 x^{\mu}}{\partial \hat{x}^k \partial \hat{x}^j} + \Gamma^{\mu}{}_{\nu\lambda} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \hat{x}^k} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \hat{x}^j} - \hat{\Gamma}^h{}_{kj} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \hat{x}^h},\end{aligned}$$

となる。これが**オイラー・スカウテンの曲率テンソル**だ。オイラー・スカウテンの曲率テンソルは, $H_{kj}{}^{\mu}$ なる記号で記述される。その定義を改めて書くと,

$$H_{kj}{}^{\mu} = \hat{\nabla}_k B_j{}^{\mu} = \frac{\partial^2 x^{\mu}}{\partial \hat{x}^k \partial \hat{x}^j} + \Gamma^{\mu}{}_{\nu\lambda} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \hat{x}^k} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \hat{x}^j} - \hat{\Gamma}^h{}_{kj} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \hat{x}^h}, \tag{7.10}$$

となるわけだ。オイラー・スカウテンの曲率テンソルは, 空間 V_n に対する部分空間 V_m の曲率テンソルとも呼ばれる。なお, このテンソルが曲率テンソルと呼ばれる理由は, 本項の後に示すように, V_m が V_n 中の平面からどれくらい逸脱するかを表現することに由来する。

定義式 (7.10) から明らかなように, オイラー・スカウテンの曲率テンソル $H_{kj}{}^{\mu}$ は j と k に関して対称である。さらに, $B^a{}_{\mu} H_{jk}{}^{\mu} = 0$ なる性質を満足する。その性質を示すには, 実際に計算してみるとよい。オイラー・スカウテンの曲率テンソルの定義に注意して計算すると,

$$\begin{aligned}B^a{}_{\mu} H_{jk}{}^{\mu} &= B^a{}_{\mu} \left(\frac{\partial B_j{}^{\mu}}{\partial \hat{x}^k} + \Gamma^{\mu}{}_{\nu\lambda} B_k{}^{\nu} B_j{}^{\lambda} - \hat{\Gamma}^h{}_{kj} B_h{}^{\mu} \right) \\ &= B^a{}_{\mu} \left(\frac{\partial B_j{}^{\mu}}{\partial \hat{x}^k} + \Gamma^{\mu}{}_{\nu\lambda} B_k{}^{\nu} B_j{}^{\lambda} \right) - \hat{\Gamma}^a{}_{kj},\end{aligned}$$

が得られる。第 2 行目に (7.7) を適用すると,

$$B^a{}_{\mu} H_{jk}{}^{\mu} = 0, \tag{7.11}$$

が得られる。オイラー・スカウテンの曲率テンソル $H_{jk}{}^{\mu}$ は, 添え字 μ に関して V_n の反変ベクトルであると解釈すれば, あらゆる $B_j{}^{\mu}$ に直交する。つまり, $H_{jk}{}^{\mu}$ は V_m に垂直なベクトルを与える。したがって, $H_{jk}{}^{\mu}$ は,

$$H_{jk}{}^{\mu} = H_{jk\,P} B_P{}^{\mu},$$

のように, $B_P{}^{\mu}$ の 1 次結合として表される。ここで, $H_{jk\,P}$ は 1 次結合のために導入した展開係数であり,

$$H_{jk\,P} = g_{\mu\nu} H_{jk}{}^{\mu} B_P{}^{\nu},$$

によって算出される。この定義式から明らかなように, 添え字 j と k に対してテンソルとして振る舞う。曲率テンソル $H_{jk\,P}$ は, 部分空間 V_m の**第 2 基本テンソル**と呼ばれる。

超曲面の法線　部分空間の次元が $m=n-1$ の場合, その部分空間がなす幾何学形態は超曲面と呼ばれる。その場合, 部分空間 V_m に垂直なベクトルは, 一つしか独立にとることはできない。区別の必要性がないので, 添え字 P を廃止し,

$$B^\mu \equiv B_n{}^\mu, \qquad H_{jk,n-1} \equiv H_{jk},$$

とおけば,

$$H_{jk}{}^\mu = H_{jk} B^\mu,$$

となる。さらに, 特別な例として, V_n が 3 次元のユークリッド空間 (すなわち, $n=3$) で, $m=2$ のとき, H_{jk} は,

$$\mathrm{II} = H_{11}\,\mathrm{d}x^1\,\mathrm{d}x^1 + 2H_{12}\,\mathrm{d}x^1\,\mathrm{d}x^2 + H_{22}\,\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^2,$$

のような微分幾何学における第 2 基本形式を与える。第 2 基本形式が 3 次元中の曲面が平面から逸脱する度合いを表示するので, オイラー・スカウテンの曲率テンソル $H_{jk}{}^\mu$ は, 部分空間 V_m が V_n 中の平面からの逸脱度合いを表すための係数と考えればよいだろう。

球面座標でのオイラー・スカウテンの曲率テンソル　球面座標について $H_{jk}{}^\mu$ を計算し, 幾何学的なイメージをつかむことにしよう。空間 V_n が 3 次元のカルテシアン座標系とすれば, $\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}=0$ である。その場合, オイラー・スカウテンの曲率テンソルは,

$$H_{kj}{}^\mu = \frac{\partial B_j{}^\mu}{\partial \hat{x}^k} - \hat{\Gamma}^h{}_{kj} B_h{}^\mu,$$

によって計算できる。変換行列 $B_j{}^\mu$ やクリストッフェル記号 $\hat{\Gamma}^h{}_{kj}$ は, 既に本章で計算された結果を使うことにする。その結果, オイラー・スカウテンの曲率テンソルは,

$$[H_{kj}{}^\mu] = \left[\begin{array}{ccc} -a\sin\theta\cos\varphi & -a\sin\theta\sin\varphi & -\cos\theta \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ -a\sin^2\theta\cos\varphi & -a\sin^2\theta\cos\varphi & -a\sin^2\theta\cos\theta \end{array}\right],$$

が得られる。結果を示す数式は, 2 行 2 列の小行列が 2 行 1 列に並んだ形で記述している。小行列の行と列が添え字 j と μ に対応する。大行列の列は k に対応する。この行列表記に関して, 添え字 μ に関してベクトルとして解釈すると, $H_{kj}{}^\mu$ は球面 V_m の法線ベクトルであることがわかる。ここで,

$$[H_{kj}] = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & -a\sin^2\theta \end{bmatrix}, \qquad [B^\mu] = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{bmatrix},$$

なる行列を定義すれば, オイラー・スカウテンの曲率テンソルは, $H_{kj}{}^\mu = H_{kj}B^\mu$ のように書ける。ここで, B^μ は V_m の単位法線ベクトルである。いうまでもなく, そのベクトルは空間 V_m に含まれず, 空間 V_n のベクトルである。

7.2 部分空間上の曲線

部分空間が 2 次元以上の次数をもつとき, 部分空間上に曲線を描くことが可能だ。本節では, 部分空間 V_m に描いた曲線の性質について調べてみる。曲線は部分空間における座標 $\hat{x}^h$ を用い, $\hat{x}^h(s)$ のように長さ s の関数として表現するものとする。また, これを空間 V_n から見たとき, その曲線は $x^\mu(\hat{x}^1, \hat{x}^2, \ldots, \hat{x}^m)$ のように $\hat{x}^h$ の関数として記述される。

曲線の性質を調べるには, 絶対曲率, 相対曲率, 法曲率というパラメータを使用する。それらのパラメータを特定してみよう。空間 V_n から見た曲線 x^μ について, 長さで微分すると,

$$\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s} = B_j{}^\mu \frac{\mathrm{d}\hat{x}^j}{\mathrm{d}s}, \tag{7.12}$$

が得られる。ここで, $B_j{}^\mu = \partial x^\mu / \partial \hat{x}^j$ である。この微分は, 曲線に沿った微小変位を長さで正規化したベクトルを与える。言い換えると, 単位接線ベクトルを与えるわけだ。この接線ベクトルを曲線に沿って共変微分すると,

$$\frac{\delta}{\delta s}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s} = B_j{}^\mu \frac{\delta}{\delta s}\frac{\mathrm{d}\hat{x}^j}{\mathrm{d}s} + H_{jk}{}^\mu \frac{\mathrm{d}\hat{x}^j}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\hat{x}^k}{\mathrm{d}s}, \tag{7.13}$$

が得られる。ここで, $H_{jk}{}^\mu \equiv \hat{\nabla}_j B_k{}^\mu$ はオイラー・スカウテンの曲率テンソルである。この場合, 共変部分の対象に $B_h{}^\mu$ が含まれるので, 必然的にオイラー・スカウテンの曲率テンソルが出現するわけだ。後に改めて説明するが, 算出された導関数は添え字 μ についてベクトルとして見るとよい。右辺の第 1 項は $B_k{}^\mu$ によって V_m 上のベクトルであり, 第 2 項は $H_{jk}{}^\mu$ によって V_m の法線ベクトルである。

導関数 (7.13) の全体 (または左辺) は, **絶対曲率ベクトル**と呼ばれ, 右辺の第 1 項は**相対曲率ベクトル**, 第 2 項は**法曲率ベクトル**である。さらに, 曲率ベクトルの長さは, それぞれ, **絶対曲率**, **相対曲率**, **法曲率**なる名称で呼ばれている。上で述べたように, $B_h{}^\mu$ をベクトル成分とする相対曲率ベクトルは V_m の接ベクトルである。一方, $H_{jk}{}^\mu$ をベクトル成分とする法曲率ベクトルは V_m の法線ベクトルである。

定理 7.1 絶対曲率ベクトルは, 相対曲率ベクトルと法曲率ベクトルの和である。

この性質は, 数式 (7.13) に記載したとおり, つまり, 曲率ベクトルの定義そのものである。それ以外の説明は特にない。

定理 7.2 絶対曲率の自乗は, 相対曲率と法曲率の二乗和に等しい。

この性質も, (7.13) に記載した曲率ベクトルの定義から直接的にわかる性質である。相対曲率ベクトルが V_m の接ベクトルであり, 法曲率ベクトルが V_m の法線ベクトルである

ので, それらベクトルは互いに直交する。絶対曲率ベクトルはそれらの合成ベクトルである。したがって, 絶対曲率は, 相対曲率と法曲率を底辺, 高さとする直角三角形の斜辺に相当するので, 性質 2 が成立する。

定理 7.3 絶対曲率を A, 法曲率を N, 絶対曲率ベクトルと法曲率ベクトルがなす角度を θ とすると, $N = A\cos\theta$ が成立する。

この性質も, 定義から即座にわかる。絶対曲率ベクトルを A^μ, 法曲率ベクトルを N^μ としたとき, $g_{\mu\nu}A^\mu N^\nu = AN\cos\theta$ が成立する。これは, リーマン幾何学における $\cos\theta$ の定義からただちに導かれる事実である。

定理 7.4 曲線 x^μ が V_n の測地線であれば, x^μ は部分空間 V_m の測地線である。

測地線の方程式は, 接線ベクトル $\mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}s$ の共変微分がゼロになるという方程式である。つまり, x^μ が V_n 測地線であるということは,

$$\frac{\delta}{\delta s}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s} = B_j{}^\mu \frac{\delta}{\delta s}\frac{\mathrm{d}\hat{x}^j}{\mathrm{d}s} + H_{jk}{}^\mu \frac{\mathrm{d}\hat{x}^j}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\hat{x}^k}{\mathrm{d}s} = 0,$$

が成立するということだ。しかも, $B_j{}^\mu$ と $H_{jk}{}^\mu$ が互いに直交するベクトルであるので, 第 2 項と第 3 項は個別にゼロでなければならない。そのうち, 第 2 項がゼロになる条件は,

$$\frac{\delta}{\delta s}\frac{\mathrm{d}\hat{x}^j}{\mathrm{d}s} = 0,$$

に書き換えることができ, それは V_m 上での測地線の方程式である。したがって, x^μ が V_n で測地線になっていれば部分空間 V_m でも測地線である。

定理 7.5 曲線 $\hat{x}^j(s)$ が V_m 上の測地線であるための必要十分条件は, 曲線 $x^\mu(s)$ の絶対曲率ベクトルが V_m に垂直であることだ。

曲線 $\hat{x}^j$ が V_m 上の測地線であるならば, $\mathrm{d}\hat{x}^j/\mathrm{d}s$ の共変微分がゼロである。すなわち, (7.13) の右辺の第 1 項がゼロであるので,

$$\frac{\delta}{\delta s}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s} = H_{jk}{}^\mu \frac{\mathrm{d}\hat{x}^j}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\hat{x}^k}{\mathrm{d}s},$$

が成立しなければならない。この数式によると, 絶対曲率ベクトルに $B_j{}^\mu$ が含まれないため, 絶対曲率ベクトルが V_m に垂直になっている。したがって, 必要条件が証明された。

絶対曲率ベクトルが V_m に垂直であると仮定しよう。そのような条件のもとでは, 測地線の方程式 (7.13) の右辺の右辺の第 1 項はゼロでなければならない。右辺の第 1 項がゼロとなるには,

$$\frac{\delta}{\delta s}\frac{\mathrm{d}\hat{x}^j}{\mathrm{d}s} = 0,$$

であるはずであり, これは $\hat{x}^j$ が V_m 上の測地線であることを意味している。ゆえに, 十分条件も証明できた。したがって, 定理 7.5 が証明できた。¶

考えてみれば, V_m における測地線の絶対曲率が V_m に垂直であるのは当然の性質である。それを満たさなければ, 曲率が V_m から観測できてしまうということだ。曲率が V_m から観測できるということは, その曲線の湾曲を V_m から認識できることを意味するので, V_m における測地線として矛盾するわけだ。

定理 7.5 からただちに, 球面上の測地線が大円コースとなることという事実に納得がいく。大円は, 3 次元空間中の平面に描かれた円であるので, $\mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}s$ を s について共変微分すると, 図 7.2 に示すように, その結果は円の中心に向かうベクトルとなる。そのベクトルは円周と直交する。それは, 球面と直交することを意味する。この場合, 3 次元空間が V_n, 球面

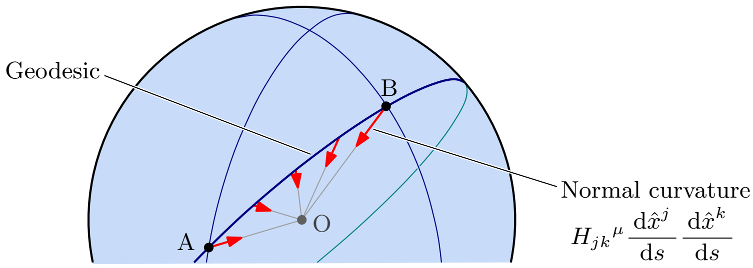

図 7.2: 大円コースの曲率ベクトル

が V_m であるので, 絶対距離率ベクトルが V_m に垂直であり, 相対曲率がゼロである。大円から少しでもはずれた経路をとると, 相対曲率をもつことになり, 曲線が曲がっていることが V_m から認識できる。そうなると, V_m において測地線ではなくなるのだ。そのように考えると, 球面における測地線は大円コース以外にあり得ない。

定理 7.6 部分空間中の曲線上の 1 点における法曲率ベクトルは, この点でこの曲線に接する部分空間の測地線の法曲率ベクトルに等しい。

法曲率ベクトル $H_{jk}{}^{\mu}(\mathrm{d}\hat{x}^j/\mathrm{d}s)(\mathrm{d}\hat{x}^k/\mathrm{d}s)$ は, 曲線の方向 $\mathrm{d}\hat{x}^j/\mathrm{d}s$ のみで決まるので, $\mathrm{d}\hat{x}^j/\mathrm{d}s$ が同一であれば, 異なる部分空間であっても, 必ず, 等しくなる。さらに, $(\delta/\delta s)\mathrm{d}\hat{x}^j/\mathrm{d}s = 0$ であれば,

$$\frac{\delta}{\delta s}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s} = H_{jk}{}^{\mu}\frac{\mathrm{d}\hat{x}^j}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\hat{x}^k}{\mathrm{d}s},$$

である。つまり, 絶対曲率ベクトルが法曲率ベクトルと等しくなる。その場合, 異なる部分空間であっても法曲率ベクトルが等しくなるはずだ。¶

7.2.1 平均曲率

部分空間 V_m は m 次元であるので, 互いに直交する m 個の単位ベクトルが選択できるはずだ。部分空間 V_m の座標で記述したとき, それらを $\hat{h}_{(a)}^{\ j}$ としよう。互いに直交する単位ベクトルを数式で記述すると,

$$\hat{g}_{jk} h_{(a)}^{\ j} h_{(b)}^{\ k} = \delta_{ab} \quad (a, b = 1, 2, \dots, m),$$

となる。単位ベクトルは, 座標を長さ s で微分した導関数であるので, 単位ベクトル $h_{(a)}^{\ j}$ を法曲率の数式における $\mathrm{d}\hat{x}^j/\mathrm{d}s$ に代入すると, 単位ベクトルが向かう方向の法曲線ベクトルが得られる。つまり, $H_{jk}{}^{\mu} h_{(a)}^{\ j} h_{(a)}^{\ k}$ が法曲率ベクトルというわけだ。その法曲率ベクトルを m 個のベクトルの方向にわたり平均値をとると,

$$\frac{1}{m} \sum_{a=1}^{m} H_{jk}{}^{\mu} \hat{h}_{(a)}^{\ j} \hat{h}_{(a)}^{\ k} = \frac{1}{m} H_{jk}{}^{\mu} g^{jk}, \tag{7.14}$$

となる。右辺を得るにあたって,

$$\sum_{a=1}^{m} \hat{h}_{(a)}^{\ j} \hat{h}_{(a)}^{\ k} = \hat{g}^{jk},$$

なる関係を利用した。この関係式は, 第 5.7.2 項で直交 n 重系を導入した際に得られた公式である。この公式は空間 V_n において導出されたのだが, 部分空間 V_m でも成立するはずだ。得られた数式 (7.14) は, 単位ベクトル $\hat{h}_{(a)}^{\ j}$ の選び方に依存せず一定値である。このベクトル $H_{jk}{}^{\mu} g^{jk}/m$ は**平均曲率ベクトル**と呼ばれる。さらに, そのベクトルの長さは**平均曲率**と呼ばれる。ここで得られた平均曲率の性質を改めて書くと, 次のようになる。

定理 7.7 部分空間上の点において, 互いに直交する m 個の方向の法曲率ベクトルを平均すると, それらの方向の選択に無関係な定ベクトルが得られる。

7.2.2 曲率線

一般に法曲率は, 曲線の方向に依存する。曲率が極値をとる方向は**主方向**と呼ばれる。主方向おける曲率, すなわち, 極値となる曲率は**主曲率**と呼ばれる。これらの用語は, 既に第 5.7.2 項で導入した用語と同一である。

特別な場合として, 超曲面 $(m = n - 1)$ を部分空間として選んだときの主方位や主曲率を説明しよう。この条件では, 特定の単位法線は 1 本しか選択できない。その法線を B^μ とすると, オイラー・スカウテンの曲率テンソルは,

$$H_{jk}{}^{\mu} = H_{jk} B^{\mu},$$

のようになる。部分空間である超曲面に接する方向 $\hat{h}^j$ に対する超曲面の法曲率 N は,

$$N = \frac{H_{jk}\hat{h}^j\hat{h}^k}{\hat{g}_{jk}\hat{h}^j\hat{h}^k},$$

で与えられる。法曲率 N が極値をとるには,

$$\left(H_{jk} - N g_{jk}\right) \hat{h}^k = 0, \tag{7.15}$$

を満足しなければならない。とはいえ, $k = 1, 2, \ldots, m$ にわたって m 個の独立な方程式が確保できると, $\hat{h}^k = 0$ という面白くない解が得られる。そんなつまらない解は望んでいない。我々が望む解を説明するため, 方程式 (7.15) に $\hat{g}^{kl}$ を乗じて縮約すると,

$$H_{jk}\hat{g}^{kl}\hat{h}^j = N\hat{h}^l,$$

が得られる。我々が興味あるのは, この方程式で表される固有値問題の解である。法曲率 N は行列 $H_{jk}\hat{g}^{kl}$ の固有値であり, ベクトル $\hat{h}^l$ は固有値 N に対する固有ベクトルなのだ。固有値 N は, 方程式:

$$|H_{jk}\hat{g}^{kl} - N\delta_j{}^l| = 0, \tag{7.16}$$

の解であり, それが法曲率 N を与える。固有値として得られた法曲率 N は**主曲率**と呼ばれ, それに対応する固有ベクトル $\hat{h}^l$ は**主方向**と呼ばれる。その主方向を連ねて描いた曲線は**主曲線**と呼ばれる。つまり, 主曲線は主方向に曲線が延びている。

固有値問題 (7.16) の解として，すべて異なる固有値 $N_{(1)}, N_{(2)}, \ldots, N_{(n-1)}$ が存在し, それらに対応して固有ベクトル $h_{(1)}^{\ \mu}, h_{(2)}^{\ \mu}, \ldots, h_{(n-1)}^{\ \mu}$ が定まるとする。その固有ベクトルが主方位だ。このとき, 主方位 $h_{(a)}^{\ \mu}$ と $h_{(b)}^{\ \mu}$ について方程式を改めて書くと,

$$\begin{aligned}
\left(H_{jk} - N_{(a)}\hat{g}_{jk}\right) \hat{h}_{(a)}^{\ k} &= 0 \quad (a = 1, 2, \ldots, n-1), \\
\left(H_{jk} - N_{(b)}\hat{g}_{jk}\right) h_{(b)}^{\ k} &= 0 \quad (b = 1, 2, \ldots, n-1),
\end{aligned}$$

が得られる。第 1 式に $\hat{h}_{(b)}^{\ j}$ を, 第 1 式に $\hat{h}_{(a)}^{\ j}$ を乗じて縮約し, 互いの差をとると,

$$\left(N_{(a)} - N_{(b)}\right) \hat{g}_{jk}\hat{h}_{(a)}^{\ j}\hat{h}_{(b)}^{\ k} = 0,$$

が得られる。上で設けた仮定により, $a \neq b$ ならば $N_{(a)} \neq N_{(b)}$ なので, この方程式は,

$$\hat{g}_{jk}\hat{h}_{(a)}^{\ j}\hat{h}_{(b)}^{\ k} = 0, \tag{7.17}$$

のように書き換えてもよい。つまり, 主方向は $n-1$ 個だけ存在し, 互いに直交するのだ。主方向 $\hat{h}_{(a)}^{\,j}$ は超曲面に接する $n-1$ 重系を構成している。したがって, 任意の単位ベクトル $\hat{h}^j$ は, これらの主方向の 1 次結合:

$$\hat{h}^j = \hat{h}_{(1)}^j \cos\alpha_1 + \hat{h}_{(2)}^j \cos\alpha_2 + \cdots + \hat{h}_{(n-1)}^j \cos\alpha_{n-1},$$

となるはずだ。ただし, α_h $(h = 1, 2, \ldots, n-1)$ は, ベクトル $\hat{h}^j$ と主方向 $\hat{h}_{(h)}^{\,j}$ のなす角である。この数式を,

$$N = \frac{H_{jk}\hat{h}^j\hat{h}^k}{\hat{g}_{jk}\hat{h}^j\hat{h}^k} = H_{jk}\hat{h}^j\hat{h}^k,$$

に代入すると,

$$N = N_{(0)}\cos^2\alpha_0 + N_{(1)}\cos^2\alpha_1 + \cdots + N_{(n-2)}\cos^2\alpha_{n-2},$$

が得られる。ただし,

$$N_{(a)} = H_{jk}\hat{h}_{(a)}^j\hat{h}_{(a)}^k,$$

であり, $a \neq b$ のとき $H_{jk}\hat{h}_{(a)}^j\hat{h}_{(b)}^k = 0$ となる。

一般の m 次元であっても考え方は同じである。ただし, この場合, 部分空間 V_m に垂直で互いに直交する単位ベクトル $B_P{}^\mu$ は $n-m$ 個だけ存在する。そのとき, オイラー・スカウテンの曲率テンソルは,

$$H_{jk}{}^\mu = H_{jk\,P}B_P{}^\mu,$$

となる。この場合に満足すべき方程式は,

$$(H_{jk\,P} - N_P\,\hat{g}_{jk})\,\hat{h}^j = 0, \tag{7.18}$$

であり, N_P は法線 $B_P{}^\mu$ に対応する**主曲率**, $\hat{h}^j$ は法線 $B_P{}^\mu$ に対応する**主方向**である。また, 主方向を連ねると**曲率線**なる曲線が形成される。したがって, 一般の V_m に関しては, 主方向や曲率線は法線 $B_P{}^\mu$ の選択に依存する。

7.2.3 漸近曲線

部分空間中の曲線が, ある点で法曲率がゼロである場合, 漸近曲線と呼ばれる。空間 V_n は対象とする点において部分空間 V_m に接する前提で議論をしている。3 次元空間の特定の点に接する曲面を考えると, 激しくうねっている面が接する場合, 法曲率が大きいと想像するとよい。法曲率がゼロに近づくということは, V_n と V_m が非常に緩やかに重なっている状態である。そのイメージは, 3 次元中の曲面だけでなく, 一般の n 次元中の部分空間に対しても成り立つと思えばよい。その意味で, 法曲率がゼロになる曲線とは, V_n と V_m が漸近する状態にあると思えばよい。

簡単な説明のため, 部分空間が超曲面である場合を取り扱おう。その場合, オイラー・スカウテンの曲率テンソルは $H_{jk}{}^{\mu} = H_{jk} B^{\mu}$ なる形式で書かれる。この超曲面に接する二つのベクトルを $\hat{u}^j$, $\hat{v}^j$ とするとき,

$$H_{jk} \hat{u}^j \hat{v}^k = 0,$$

を満足するならば, $\hat{u}^j$ と $\hat{v}^j$ は超曲面上で互いに**共役な方向**をもっていると表現される。また, その方向が常に互いに共役となるような超曲面上の二つの曲線群は, **互いに共役**であると表現される。前節で取り扱った主方向 $\hat{h}_{(a)}^{\ j}$ は, その条件を満たすので, 互いに共役だということになる。

超曲面上の特定の方向 $\hat{u}^j$ が自分自身と共役なら, $\hat{u}^j$ が指定する方向は**漸近方向**と呼ばれる。自分自身と共役であるとは,

$$H_{jk} \hat{u}^j \hat{u}^k = 0,$$

を満たすことである。曲線が常に漸近方向に向かっている場合, その曲線は**漸近曲線**と呼ばれる。すなわち,

$$H_{jk}{}^{\mu} \frac{\mathrm{d}\hat{x}^j}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}\hat{x}^k}{\mathrm{d}s} = 0, \tag{7.19}$$

であれば, 曲線 $x^j(s)$ は漸近曲線である。漸近曲線に関する性質を紹介しよう。

定理 7.8 超曲面上の曲線が漸近曲線であるための必要十分条件は, その絶対曲率ベクトルが超曲面に接していることである。

曲線 x^j が漸近曲線なら, 漸近曲線の定義 (7.19) によると,

$$H_{jk}{}^{\mu} \frac{\mathrm{d}\hat{x}^j}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}\hat{x}^k}{\mathrm{d}s} = 0,$$

が成立する。その場合, 絶対曲率ベクトルは,

$$\frac{\delta}{\delta s} \frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}s} = B_j{}^{\mu} \frac{\delta}{\delta s} \frac{\mathrm{d}\hat{x}^j}{\mathrm{d}s},$$

のようになる。この状態は, 法曲率がゼロであるので, これは絶対曲率ベクトルが超平面に接していることに相当する。したがって, 必要条件は証明された。一方, 絶対曲率ベクトルが超平面に接していれば, 必然的に,

$$H_{jk}{}^{\mu} \frac{\mathrm{d}\hat{x}^j}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}\hat{x}^k}{\mathrm{d}s} = 0,$$

となるので, 十分条件も成立する。¶

定理 7.9 超曲面上のある曲線が, これを包含する空間 V_n の測地線となるための必要十分条件は, その曲線が超曲面上の測地線であると同時に, 漸近曲線であることである。

必要条件を証明しよう。曲線 x^μ が V_n 上の測地線であるならば,

$$\frac{\delta}{\delta s}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s} = B_j{}^\mu \frac{\delta}{\delta s}\frac{\mathrm{d}\hat{x}^j}{\mathrm{d}s} + H_{jk}{}^\mu \frac{\mathrm{d}\hat{x}^j}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\hat{x}^k}{\mathrm{d}s} = 0,$$

が満たされるはずだ。第 1 項と第 2 項は互いに直交しているので, 個別にゼロになるはずだ。すなわち,

$$\frac{\delta}{\delta s}\frac{\mathrm{d}\hat{x}^j}{\mathrm{d}s} = 0 \quad \text{and} \quad H_{jk}{}^\mu \frac{\mathrm{d}\hat{x}^j}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\hat{x}^k}{\mathrm{d}s} = 0,$$

が満たされるということだ。第 1 式は曲線 $\hat{x}^j$ が超曲面上の測地線であることを意味している。第 2 式は法線曲率がゼロであるので, $\hat{x}^j$ が漸近曲線であることを意味している。すなわち, 必要条件が証明された。

続いて十分条件を証明する。曲線 $\hat{x}^j$ が超曲面上の測地線であり, かつ, 漸近曲線であるならば,

$$\frac{\delta}{\delta s}\frac{\mathrm{d}\hat{x}^j}{\mathrm{d}s} = 0 \quad \text{and} \quad H_{jk}{}^\mu \frac{\mathrm{d}\hat{x}^j}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\hat{x}^k}{\mathrm{d}s} = 0,$$

が満たされるはずなので, $(\delta/\delta s)(\mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}s) = 0$ となる。したがって, 曲線 $x^\mu(s)$ は空間 V_n 上の測地線である。したがって, 十分条件も証明された。¶

上記の議論を一般の部分空間 V_m について拡張しよう。部分空間に垂直で, かつ, 互いに垂直なベクトルは $n-m$ 個だけとることが可能だ。そのような V_m に垂直なベクトルを $B_P{}^\mu$ とすれば, オイラー・スカウテンの曲率テンソルは $H_{jk}{}^\mu = H_{jk\,P}B_P{}^\mu$ なる形態で書ける。ここで, $H_{jk\,P}$ は垂直なベクトル $B_P{}^\mu$ のとり方に依存する量である。とはいえ, 一般的な部分空間 V_m で漸近方向や漸近曲線を定義するには, 法線のとり方に依存せず, 超曲面における手続きに準じることが望ましい。その目的のため,

$$g_{\mu\nu}H_{jk}{}^\mu H_{ab}{}^\nu = H_{jk}{}^\mu H_{ab\,\mu},$$

なるテンソルを用い,

$$H_{jk}{}^\mu H_{ab\,\mu}\hat{u}^j\hat{v}^k\hat{u}^a\hat{v}^b = 0,$$

によって共役方向 $\hat{u}^j$ と $\hat{v}^j$ を定義することにしよう。この定義なら, 法線 $B_P{}^\mu$ のとり方と無関係であるが, $m = n-1$ であれば $H_{jk}{}^\mu = H_{jk}B^\mu$ となり,

$$H_{jk}{}^\mu H_{ab\,\mu}\hat{u}^j\hat{v}^k\hat{u}^a\hat{v}^b = H_{jk}H_{ab}\hat{u}^j\hat{v}^k\hat{u}^a\hat{v}^b = (H_{jk}\hat{u}^j\hat{v}^k)^2 = 0,$$

によって共役方向の基準が $H_{jk}\hat{u}^j\hat{v}^k = 0$ と等価になるので, 超曲面における手続きと逸脱しない。これまでと同様に, 常に互いに共役な接線をもつ二つの曲線群を**互いに共役な曲線群**, 自分自身に共役な方向を**漸近方向**, 常に漸近方向に向かう曲線を**漸近曲線**と呼んでやるのだ。漸近曲線 $\hat{x}^j(s)$ については,

$$H_{jk}{}^\mu H_{ab\,\mu}\frac{\mathrm{d}\hat{x}^j}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\hat{x}^k}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\hat{x}^a}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\hat{x}^b}{\mathrm{d}s} = 0, \tag{7.20}$$

が成立するというわけだ。この関係式は,

$$H_{jk}{}^{\mu}\frac{\mathrm{d}\hat{x}^j}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\hat{x}^k}{\mathrm{d}s}=0,$$

と書いてもよい。この関係式が成立するということは, 定理 7.8 と定理 7.9 は一般の部分空間 V_m においても成立する。

7.3 全測地曲面

部分空間 V_m 上のいかなる測地線も, 空間 V_n から見たときでも測地線になっていれば, その部分空間は**全測地曲面**と呼ばれる。全測地曲面の最も簡単な例は, V_n が 3 次元のカルテシアン空間であり, V_m が 3 次元中に設定された平面である場合だ。この場合, V_m 上の測地線は平面 V_m 上の直線である。その直線は, 3 次元カルテシアン座標系でも直線なので測地線である。

一般的に, 全測地曲面の条件を探ってみよう。部分空間 V_m 上の曲線 $\hat{x}^j(s)$ が V_m 上で測地線であるならば,

$$\frac{\delta}{\delta s}\frac{\mathrm{d}\hat{x}^j}{\mathrm{d}s}=0,$$

が成立する。これが V_n 上でも測地線であるなら,

$$B_j{}^{\mu}\frac{\delta}{\delta s}\frac{\mathrm{d}\hat{x}^j}{\mathrm{d}s}+H_{jk}{}^{\mu}\frac{\mathrm{d}\hat{x}^j}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\hat{x}^k}{\mathrm{d}s}=0,$$

を満たすはずだから, V_m 上のいかなる曲線に対しても,

$$H_{jk}{}^{\mu}\frac{\mathrm{d}\hat{x}^j}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\hat{x}^k}{\mathrm{d}s}=0,$$

を満たさなければならない。この関係式が任意の $\hat{x}^j$ について成立するには,

$$H_{jk}{}^{\mu}=0, \tag{7.21}$$

でなければならない。このように説明した結果を性質として記述すると次のようになる。

定理 7.10 部分空間が全測地的であるための必要十分条件は $H_{jk}{}^{\mu}=0$ を満たすことである。

定理 7.11 全測地曲面は極小集合体であり, その曲率線は不定である。

ここで新たな用語「極小集合体」が登場した。その用語は後で説明する。

部分空間 V_m に接するベクトルが与えられ, それを $\hat{v}^j$ としよう。そのベクトルを空間 V_n 上のベクトルとみなせば,

$$v^\mu = B_j{}^\mu \hat{v}^j,$$

のように変換できる。部分空間 V_m を全測地曲面として, 上記ベクトルの変換則を共変微分すると,

$$\delta v^\mu = B_j{}^\mu \delta\hat{v}^j + H_{jk}{}^\mu \hat{v}^k \, \mathrm{d}\hat{x}^j = B_j{}^\mu \delta\hat{v}^j,$$

が得られる。ここで, V_m が全測地曲面であることから定理 7.10 にしたがい, $H_{jk}{}^\mu = 0$ を適用した。その結果として次の性質が得られる。

定理 7.12 全測地曲面 V_m に接するあるベクトルを, 外部空間 V_n おいて曲面に沿って平行移動すれば, 平行移動後のベクトルは依然と V_m に平行なまま曲面に接している。

部分空間 V_m 上の 1 点で主曲率方向が不定になる場合, その点は V_m の**臍点** (さいてん) と呼ばれる。主曲率方向が不定になるということは, すべての方向に対して曲率が一定となることを意味している。部分空間の接点が臍点となる条件は,

$$H_{jk}{}^\mu = \hat{g}_{jk} H^\mu, \tag{7.22}$$

が成立することだ。この数式に $\hat{g}^{jk}$ を乗じて縮約をとれば, $\hat{g}^{jk} H_{jk}{}^\mu = m H^\mu$ が得られる。その結果を改めて書くと,

$$H^\mu = \frac{1}{m} \hat{g}^{jk} H_{jk}{}^\mu, \tag{7.23}$$

となる。したがって, 臍点の条件は,

$$H_{jk}{}^\mu = \frac{1}{m} \hat{g}^{ab} H_{ab}{}^\mu g_{jk}, \tag{7.24}$$

のように書くことができる。仮に, この条件が部分空間 V_m のあらゆる点で成立するならば, その部分空間は**全臍曲面**と呼ばれる。全測地曲面は, 全臍曲面の特殊なケースである。

7.3.1 極小集合体

すでに極小集合体なる名称が出てきたので説明をしておこう。空間 V_n の中に, $m-1$ 次元の閉じた部分空間 V_{m-1} が与えられたとする。別に選ばれた m 次元の部分空間 V_m が完全に V_{m-1} を包含し, 閉じた空間 V_{m-1} によって制限された m 次元の体積が極値をとるとき, V_m は**極小集合体**と呼ばれる。

与えられた m 次元の部分空間 V_m が極小集合体であるための条件を探ってみよう。部分空間 V_m 上の点は, $x^\mu(\hat{x}^1, \hat{x}^2, \ldots, \hat{x}^m)$ であるとする。部分空間 V_m の体積の一部は, V_{m-1} で制限されているとする。その制限された m 次元の体積は,

$$\iint \cdots \int_{V_m} \sqrt{\hat{g}}\, \mathrm{d}\hat{x}^1\, \mathrm{d}\hat{x}^2 \cdots \mathrm{d}\hat{x}^m,$$

で与えられる。この積分は, 形式的に部分空間 V_m における体積を算出するための m 重積分となっているが, 部分空間 V_{m-1} による体積制限が積分区間に反映されているとする。また, $\hat{g}$ は V_m における計量テンソル $\hat{g}_{jk}$ の行列式である。この計量テンソルは,

$$\hat{g}_{jk} = B_j{}^\mu B_k{}^\nu g_{\mu\nu},$$

のように空間 V_n の計量から変換される。

上記の積分が極値をもつという観点から, 変分法を利用してみよう。極値をもつことから第 1 変分がゼロであると考える。その仮定からオイラーの微分方程式を構成すると,

$$\frac{\partial}{\partial \hat{x}^j} \frac{\partial \sqrt{\hat{g}}}{\partial B_j{}^\mu} - \frac{\partial \sqrt{\hat{g}}}{\partial x^\mu} = 0, \tag{7.25}$$

が得られる。この方程式を変形して, 体積が極値をとる条件を簡単な形で抽出することにしよう。数式変形にあたり, 行列式 $\hat{g}$ に関して,

$$\hat{g} = |\hat{g}_{jk}| = |B_j{}^\mu B_k{}^\nu g_{\mu\nu}|,$$

なる関係が成立することに注意すると, 偏導関数 $\partial\sqrt{\hat{g}}/\partial B_j{}^\mu$ が,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sqrt{\hat{g}}}{\partial B_j{}^\mu} &= \frac{1}{2\sqrt{\hat{g}}} \frac{\partial \hat{g}}{\partial \hat{g}_{ab}} \frac{\partial \hat{g}_{ab}}{\partial B_j{}^\mu} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\hat{g}}}\, \hat{g} g^{ab} \left(\delta_a{}^b B_j{}^\nu g_{\mu\nu} + \delta_j{}^b B_a{}^\lambda g_{\lambda\mu}\right) \\
&= \sqrt{\hat{g}}\, \hat{g}^{ja} B_a{}^\nu g_{\mu\nu} = \sqrt{\hat{g}}\, B^j{}_\mu,
\end{aligned}$$

のように計算できる。この計算結果をさらに $\hat{x}^j$ について偏微分すると, (7.25) 左辺の第 1 項が計算できる。その計算は,

$$\begin{aligned}
\text{1st term of LHS} = \frac{\partial}{\partial \hat{x}^j} \frac{\partial \sqrt{\hat{g}}}{\partial B_j{}^\mu} &= \frac{1}{2\sqrt{\hat{g}}} \frac{\partial \hat{g}}{\partial \hat{g}_{ab}} \frac{\partial \hat{g}_{ab}}{\partial \hat{x}^j} B^j{}_\mu + \sqrt{\hat{g}}\, \frac{\partial B^j{}_\mu}{\partial \hat{x}^j} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\hat{g}}}\, \hat{g}\, \hat{g}_{ab} \left(\hat{\Gamma}^h{}_{ja} \hat{g}_{hb} + \hat{\Gamma}^h{}_{jb} \hat{g}_{ah}\right) B^j{}_\mu + \sqrt{\hat{g}}\, \frac{\partial B^j{}_\mu}{\partial \hat{x}^j} \\
&= \sqrt{\hat{g}} \left(\frac{\partial B^j{}_\mu}{\partial \hat{x}^j} + B^j{}_\mu \hat{\Gamma}^b{}_{jb} \right),
\end{aligned}$$

のように実行できる。一方, (7.25) の左辺の第 2 項は,

$$
\begin{aligned}
\text{2nd term of LHS} &= \frac{\partial\sqrt{\hat{g}}}{\partial x^\mu} = \frac{1}{2\sqrt{\hat{g}}}\frac{\partial\hat{g}}{\partial\hat{g}_{ab}}\frac{\partial\hat{g}_{ab}}{\partial x^\mu} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\hat{g}}}\,\hat{g}\,\hat{g}^{ab}B_a{}^\nu B_b{}^\lambda\frac{\partial\hat{g}_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} \\
&= \frac{\sqrt{\hat{g}}}{2}\hat{g}^{ab}B_a{}^\nu B_b{}^\lambda(\mathit{\Gamma}^\alpha{}_{\mu\nu}g_{\alpha\lambda} - \mathit{\Gamma}^\alpha{}_{\mu\lambda}g_{\nu\alpha}) \\
&= \sqrt{\hat{g}}\,B^b{}_\alpha\mathit{\Gamma}^\alpha{}_{\mu\lambda}B_b{}^\lambda,
\end{aligned}
$$

のように計算される。これらの結果に基づいてオイラーの微分方程式 (7.25) の左辺を計算すると,

$$
\text{LHS} = \sqrt{\hat{g}}\left(\frac{\partial B^j{}_\mu}{\partial\hat{x}^j} + B^j{}_\mu\hat{\mathit{\Gamma}}^b{}_{jb} - B^b{}_\alpha\mathit{\Gamma}^\alpha{}_{\mu\lambda}B_b{}^\lambda\right) = \sqrt{\hat{g}}\,\nabla_b B^b{}_\mu,
$$

のように簡単な形になる。しかも, $B^b{}_\mu$ の共変微分はオイラー・スカウテンの曲率テンソルになるので,

$$
\nabla_b B^b{}_\mu = \nabla_b(\hat{g}^{bj}g_{\mu\eta}B_j{}^\eta) = \hat{g}^{bj}g_{\mu\eta}\nabla_b B_j{}^\eta = \hat{g}^{bj}g_{\mu\eta}H_{bj}{}^\eta,
$$

が得られ, 結局, オイラーの微分方程式 (7.25) は,

$$
\hat{g}^{ab}H_{ab}{}^\mu = 0, \tag{7.26}
$$

なる数式まで簡略化された。実にシンプルだ。これが, 部分空間 V_m が極小集合体となるための条件である。したがって, 極小集合体に関する性質は以下のようになる。

定理 7.13 空間 V_n 中の部分空間 V_m が極小集合体となるための必要十分条件は, 平均曲率ベクトルがゼロであることである。

7.3.2 ワインガルテンの公式

部分空間 V_m に接する m 個のベクトル $B_j{}^\mu$ と, それらに垂直な $n-m$ 個のベクトル $B_P{}^\mu$ は, $g_{\mu\nu}B_j{}^\mu B_P{}^\nu = 0$ を満たす。この関係式を部分空間に沿って ($\hat{x}^k$ について) 共変微分するすると,

$$
g_{\mu\nu}H_{jk}{}^\mu B_P{}^\nu + g_{\mu\nu}B_j{}^\mu\,\hat{\nabla}_k B_P{}^\nu = 0,
$$

が得られる。ここで, $B_j{}^\mu$ の共変微分がオイラー・スカウテンの曲率テンソルであるが, 法線ベクトル $B_P{}^\nu$ の共変微分は曲率テンソルとは無関係であることに注意が必要だ。ここで, $H_{jk\,P} = g_{\mu\nu}H_{jk}{}^\mu B_P{}^\nu$ なる関係に注意しながら, 両辺に $\hat{g}^{hj}$ を乗じて縮約すると,

$$
H^h{}_{k\,P} + B^h{}_\nu\hat{\nabla}_k B_P{}^\nu = 0,
$$

が得られる。この数式変形では, $H^h{}_{kP} = g^{hk} H_{jkP}$ にも注意した。この数式に $B_h{}^\mu$ を乗じて縮約すれば,

$$B_h{}^\mu H^h{}_{kP} + B_h{}^\mu B^h{}_\nu \hat{\nabla}_k B_P{}^\nu = 0,$$

が得られるのだが, $B_h{}^\mu B^h{}_\nu = \delta^\mu_\nu - B_Q{}^\mu B_{Q\nu}$ なる関係に注意すれば,

$$B_h{}^\mu H^h{}_{kP} + (\delta^\mu_\nu - B_Q{}^\mu B_{Q\nu})\, \hat{\nabla}_k B_P{}^\nu = 0, \tag{7.27}$$

が得られる。ここで,

$$L_{kPQ} \equiv g_{\mu\nu}\, (\hat{\nabla}_k B_P{}^\mu)\, B_Q{}^\nu, \tag{7.28}$$

なるテンソルを定義すれば, (7.27) は,

$$B_h{}^\mu H^h{}_{kP} + \hat{\nabla}_k B_P{}^\mu - L_{kPQ} B_Q{}^\mu = 0,$$

のなる形で書ける。この数式は,

$$\hat{\nabla}_k B_P{}^\mu = -B_h{}^\mu H^h{}_{kP} + L_{kPQ} B_Q{}^\mu, \tag{7.29}$$

なる形に書き換えるのがよい。この公式は, 微分幾何学における**ワインガルテンの公式**の拡張版である。3 次元空間における曲面を扱う微分幾何学では, ワインガルテンの公式は, (7.29) 右辺の第 2 項が存在しないはずだ。その理由は後に説明する。

部分空間 V_m の法線に関する恒等式 $g_{\mu\nu} B_P{}^\mu B_{P\nu} = \delta_{PQ}$ を曲面に沿って共変微分すれば,

$$g_{\mu\nu} \left[(\hat{\nabla}_j B_P{}^\mu)\, B_{P\nu} + B_P{}^\mu\, (\hat{\nabla}_j B_{P\nu}) \right] = 0,$$

が得られるので, ただちに,

$$L_{jPQ} + L_{jQP} = 0, \tag{7.30}$$

であることがわかる。つまり, L_{jPQ} は, 添え字 P と Q について交代テンソルとなる。また, L_{jPQ} は $B_P{}^\mu$ に関する V_m の**第 3 基本テンソル**である。

特別な例として, 空間 V_m が超曲面の場合, すなわち, $m = n - 1$ の場合, V_m の法線が 1 個しか存在しないので, 必然的に $L_{jPQ} = 0$ となる。そのとき, ワインガルテンの公式は,

$$\hat{\nabla}_k B^\mu = -B_h{}^\mu H^h{}_k, \tag{7.31}$$

となるのだ。この例は, 3 次元空間における曲面を扱う問題も包含する。したがって, 3 次元空間における曲面を扱う場合, ワインガルテンの公式は (7.31) の形態になる。すなわち, (7.29) の右辺の第 2 項が存在しない形である。

定理 7.14 全測地曲面の法線はすべて互いに平行である。

超曲面の曲率線について考えよう。曲率線を $\hat{x}^j(s)$ とする。曲率線の方向が $\hat{h}^j$ なる単位ベクトルで表されているならば, (7.15) で示したように, $(H_{jk} - N\hat{g}_{jk})\,\hat{h}^k = 0$ が成立する。この関係式に $\hat{g}^{aj}$ を乗じて縮約すれば,

$$H^a{}_k \hat{h}^k - N\hat{h}^a = 0,$$

が得られる。曲線の方向に対応する単位ベクトルは, $\hat{h}^j = \mathrm{d}\hat{x}^j/\mathrm{d}s$ であるはずだから, 得られた数式は,

$$H^a{}_k \frac{\mathrm{d}\hat{x}^k}{\mathrm{d}s} - N\frac{\mathrm{d}\hat{x}^a}{\mathrm{d}s} = 0, \tag{7.32}$$

と書けるはずだ。ワインガルテンの公式 (7.31) の両辺に $\mathrm{d}\hat{x}^k/\mathrm{d}s$ を内積し, (7.32) に注意すると,

$$\frac{\mathrm{d}\hat{x}^k}{\mathrm{d}s}\hat{\nabla}_k B^\mu + NB_h{}^\mu \frac{\mathrm{d}\hat{x}^a}{\mathrm{d}s} = 0, \tag{7.33}$$

が得られる。この数式の左辺は, 曲線に沿った単位ベクトルと, B^μ の共変微分係数の内積であるので, B^μ を曲線に沿って共変微分した導関数 $\delta B^\mu/\delta s$ である。右辺について, $B_h{}^\mu = \partial x^\mu/\partial \hat{x}^h$ に注意する。その結果, (7.33) は,

$$\frac{\delta B^\mu}{\delta s} = N\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}, \tag{7.34}$$

のような形態に書き換えられる。

7.4 リッチの公式

部分空間 V_m におけるリッチの公式の振る舞いを調べよう。リッチの公式とは, 曲がった空間で共変微分の交換則が成立しないことに起因する。リーマン・クリストッフェルの曲率テンソル $R^\kappa{}_{\lambda\nu\mu}$ はリッチの法則を利用して空間の湾曲具合を表現するテンソルであった。当然, 部分空間もリーマン空間なのでリッチの公式にしたがうのであるが, 本項では $B_j{}^\mu$ にリッチの公式を適用して振る舞いを調べる。

変換行列 $B_j{}^\mu$ は V_n と V_m の添え字が混在しているので, リッチの公式の振る舞いが興味深い。変換行列 $B_j{}^\mu$ について, 実際に計算をしてリッチの公式を確認しよう。部分空間 V_m での座標変換行列の共変微分係数は,

$$\hat{\nabla}_k B_j{}^\mu = \frac{\partial B_j{}^\mu}{\partial \hat{x}^k} + \mathit{\Gamma}^\mu{}_{\nu\lambda} B_k{}^\nu B_j{}^\lambda - B_h{}^\mu \hat{\mathit{\Gamma}}^h{}_{kj},$$

となる。この時点で 3 階のテンソルとなっているので, これを共変微分すると複雑な形になるが, その共変微分は,

$$\hat{\nabla}_h \hat{\nabla}_k B_j{}^\mu = \frac{\partial^2 B_j{}^\mu}{\partial \hat{x}^h \partial \hat{x}^k} + \frac{\partial \mathit{\Gamma}^\mu{}_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu} B_h{}^\nu B_k{}^\alpha B_j{}^\beta + \mathit{\Gamma}^\mu{}_{\alpha\beta} \frac{\partial B_k{}^\alpha}{\partial \hat{x}^h} B_j{}^\beta$$

$$
\begin{aligned}
&\qquad + \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} B_k{}^{\alpha} \frac{\partial B_j{}^{\beta}}{\partial \hat{x}^h} - \frac{\partial B_a{}^{\mu}}{\partial \hat{x}^h} \hat{\Gamma}^a{}_{kj} - B_a{}^{\mu} \frac{\partial \hat{\Gamma}^a{}_{kj}}{\partial \hat{x}^h} \\
&+ \Gamma^{\mu}{}_{\nu\eta} B_h{}^{\nu} \left(\frac{\partial B_j{}^{\eta}}{\partial \hat{x}^{\mu}} + \Gamma^{\eta}{}_{\alpha\beta} B_k{}^{\alpha} B_j{}^{\beta} - B_a{}^{\eta} \hat{\Gamma}^a{}_{kj} \right) \\
&+ \left(\frac{\partial B_k{}^{\mu}}{\partial \hat{x}^a} + \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} B_a{}^{\alpha} B_j{}^{\beta} - B_h{}^{\mu} \hat{\Gamma}^b{}_{ak} \right) \hat{\Gamma}^a{}_{hj} \\
&+ \left(\frac{\partial B_j{}^{\mu}}{\partial \hat{x}^a} + \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} B_a{}^{\alpha} B_k{}^{\beta} - B_h{}^{\mu} \hat{\Gamma}^b{}_{aj} \right) \hat{\Gamma}^a{}_{hk}, \qquad (7.35)
\end{aligned}
$$

のように計算できる。この計算結果に基づき, リッチの公式を計算すると,

$$
\begin{aligned}
&\hat{\nabla}_h \hat{\nabla}_k B_j{}^{\mu} - \hat{\nabla}_k \hat{\nabla}_h B_j{}^{\mu} \\
&\quad = \left(\frac{\partial \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma^{\mu}{}_{\nu\beta}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma^{\mu}{}_{\nu\eta} \Gamma^{\eta}{}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\eta} \Gamma^{\eta}{}_{\nu\beta} \right) B_h{}^{\nu} B_k{}^{\alpha} B_j{}^{\beta} \\
&\qquad - B_a{}^{\mu} \left(\frac{\partial \hat{\Gamma}^a{}_{kj}}{\partial \hat{x}^h} - \frac{\partial \hat{\Gamma}^a{}_{hj}}{\partial \hat{x}^k} + \hat{\Gamma}^a{}_{hb} \hat{\Gamma}^b{}_{kj} - \hat{\Gamma}^a{}_{kb} \hat{\Gamma}^b{}_{hj} \right),
\end{aligned}
$$

が得られる。得られた数式の右辺について, 二つの括弧の中は, それぞれ, 空間 V_n と部分空間 V_m におけるリーマン・クリストッフェルの曲率テンソルである。したがって,

$$
\hat{\nabla}_h \hat{\nabla}_k B_j{}^{\mu} - \hat{\nabla}_k \hat{\nabla}_h B_j{}^{\mu} = R^{\mu}{}_{\beta\alpha\nu} B_j{}^{\beta} B_k{}^{\alpha} B_h{}^{\nu} - B_a{}^{\mu} \hat{R}^a{}_{jkh}, \qquad (7.36)
$$

なる関係が得られる。この結果に, さらに, $B^b{}_{\mu}$ を乗じて収縮すると,

$$
B^b{}_{\mu} \hat{\nabla}_h \hat{\nabla}_k B_j{}^{\mu} - B^b{}_{\mu} \hat{\nabla}_k \hat{\nabla}_h B_j{}^{\mu} = R^{\mu}{}_{\beta\alpha\nu} B^b{}_{\mu} B_j{}^{\beta} B_k{}^{\alpha} B_h{}^{\nu} - \hat{R}^b{}_{jkh}, \qquad (7.37)
$$

が得られる。公式の形態として興味深い。右辺が二つの曲率テンソルの差になっている。一方が, V_n におけるリーマン・クリストッフェルの曲率テンソル $R^{\mu}{}_{\beta\alpha\nu}$ に対して, 反変成分には $B^b{}_{\beta}$ を, 共変成分には $B_h{}^{\nu}$ のような変換行列を乗じた量である。もう一方が, V_m における曲率テンソル $\hat{R}^b{}_{jkh}$ である。

導出した法則 (7.37) はさらに簡略化できる。簡略化の鍵は, $\hat{\nabla}_h(B^b{}_{\mu} \hat{\nabla}_k B_j{}^{\mu})$ である。この共変微分は, 公式の通りに計算を実行すると,

$$
\hat{\nabla}_h(B^b{}_{\mu} \hat{\nabla}_k B_j{}^{\mu}) = (\hat{\nabla}_h B^b{}_{\mu})(\hat{\nabla}_k B_j{}^{\mu}) + B^b{}_{\mu} \hat{\nabla}_h \hat{\nabla}_k B_j{}^{\mu}, \qquad (7.38)
$$

のようになる。しかし, 左辺の被微分関数は, $B_b{}^{\mu}$ と $H_{hj}{}^{\mu}$ の直交関係 (7.11) に注意すると,

$$
B^b{}_{\mu} \hat{\nabla}_k B_j{}^{\mu} = B^b{}_{\mu} H_{kj}{}^{\mu} = 0,
$$

であることがわかる。つまり, (7.38) の左辺はゼロである。したがって,

$$
B^b{}_{\mu} \hat{\nabla}_h \hat{\nabla}_k B_j{}^{\mu} = -(\hat{\nabla}_h B^b{}_{\mu})(\hat{\nabla}_k B_j{}^{\mu}),
$$

であることが導かれる。この関係式を (7.37) に代入して整理すると,

$$\hat{R}^{b}{}_{jkh} = R^{\mu}{}_{\beta\alpha\nu} B^{b}{}_{\mu} B_{j}{}^{\beta} B_{k}{}^{\alpha} B_{h}{}^{\nu} + H_{k}{}^{b}{}_{\mu} H_{hj}{}^{\mu} - H_{h}{}^{b}{}_{\mu} H_{kj}{}^{\mu}, \tag{7.39}$$

なる**ガウスの方程式**が得られる。この方程式において, $\hat{R}^{b}{}_{jkh}$ は部分空間の**絶対曲率テンソル**, 一方, $H_{k}{}^{b}{}_{\mu} H_{hj}{}^{\mu} - H_{h}{}^{b}{}_{\mu} H_{kj}{}^{\mu}$ は**相対曲率テンソル**と呼ばれる。ガウスの定理から, 二つの性質が主張できる。

定理 7.15 局所ユークリッド空間中の全測地曲面は, やはり, 局所ユークリッド空間である。

わかりにくいかもしれないので補足しよう。この性質では, 空間 V_n が局所的にユークリッド空間になっている場所を含む。その空間の部分空間 V_m が V_n に対して全測地曲面である場合, V_m は局所的にユークリッド空間になっている, という意味だ。空間 V_n が局所ユークリッド空間なので, 対称とする場所では $R^{\mu}{}_{\beta\alpha\nu} = 0$ である。部分空間 V_m が全測地曲面であるので, $H_{hj}{}^{\mu} = 0$ が成立する。その場合, ガウスの方程式によって, 少なくとも対象とする場所では $\hat{R}^{b}{}_{jkh} = 0$ が成立するので, V_m は局所ユークリッド空間である。

定理 7.16 定曲率空間中の全臍曲面は, やはり, 定曲率空間である。

この性質も補足が必要だろう。空間 V_n のリーマン曲率が場所によらず一定であるとする。このとき, 部分空間 V_m は, あらゆる場所で主曲率方向が不定, すなわち, あらゆる場所が臍点となっている。そのとき, 部分空間 V_m も定曲率空間である, という意味である。リーマン曲率 k を与えると, それに対応する曲率テンソルは,

$$R_{\alpha\lambda\nu\mu} = -k\,(g_{\nu\lambda} g_{\mu\alpha} - g_{\mu\lambda} g_{\nu\alpha}),$$

である。この曲率テンソルは (5.37) で定義されている。この数式の両辺に $g^{\alpha\kappa}$ を乗じて縮約すると,

$$R^{\kappa}{}_{\lambda\nu\mu} = k\,(g_{\mu\lambda} \delta^{\kappa}{}_{\nu} - g_{\nu\lambda} \delta^{\kappa}{}_{\mu}),$$

となる。空間 V_n が定曲率空間であるので, スカラ曲率 k が定数であるということだ。部分空間 V_m が全臍曲面であるので, V_m のあらゆる場所で,

$$H_{jk}{}^{\mu} = 0,$$

が成立する。この条件は, (7.22) で与えられている。これらをガウスの方程式に代入すると,

$$\begin{aligned}\hat{R}^{h}{}_{ajk} &= k\,(g_{jk} \delta^{h}{}_{a} - g_{ak} \delta^{h}{}_{j}) + H^{\lambda} H_{\lambda}\,(g_{jk} \delta^{h}{}_{a} - g_{ak} \delta^{h}{}_{j}) \\ &= (k + H^{\lambda} H_{\lambda})(g_{jk} \delta^{h}{}_{a} - g_{ak} \delta^{h}{}_{j}),\end{aligned}$$

が得られる。この計算結果によって, 部分空間 V_m のリーマン曲率は $k + H^{\lambda} H_{\lambda}$ となり, シューアの定理によって, その曲率が定数であることがいえる。この結果から, 次の性質も主張できる。

定理 7.17 定曲率空間中の全臍曲面の平均曲率は一定である。

この性質は, $H^\lambda H_\lambda$ が定数であることを意味する。

法線 $B_P{}^\mu$ に対して共変微分を実行してみよう。この場合, $B_P{}^\mu$ は 1 階の反変テンソルとみなし, 共変微分係数は,

$$\hat{\nabla}_j B_P{}^\mu = \frac{\partial B_P{}^\mu}{\partial \hat{x}^j} + \mathit{\Gamma}^\mu{}_{\nu\lambda} B_j{}^\nu B_P{}^\lambda,$$

のようになる。この導関数をさらに $\hat{x}^k$ について共変微分する。共変微分にあたり, $\hat{\nabla}_j B_P{}^\mu$ が 1 階反変成分と 1 階の共変成分をもつ 2 階の混合テンソルとみなすのだ。共変微分を実行すると,

$$\begin{aligned}\hat{\nabla}_k \hat{\nabla}_j B_P{}^\mu = {} & \frac{\partial^2 B_P{}^\mu}{\partial \hat{x}^k \partial \hat{x}^j} + \frac{\partial \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}}{\partial x^\alpha} B_k{}^\alpha B_j{}^\nu B_P{}^\lambda + \mathit{\Gamma}^\mu{}_{\nu\lambda} \frac{\partial B_j{}^\nu}{\partial \hat{x}^k} B_P{}^\lambda + \mathit{\Gamma}^\mu{}_{\nu\lambda} \\ & + \mathit{\Gamma}^\mu{}_{\alpha\beta} B_k{}^\alpha \left(\frac{\partial B_P{}^\beta}{\partial \hat{x}^j} + \mathit{\Gamma}^\beta{}_{\nu\lambda} B_j{}^\nu B_P{}^\lambda \right) + \left(\frac{\partial B_P{}^\mu}{\partial \hat{x}^h} + \mathit{\Gamma}^\mu{}_{\nu\lambda} B_h{}^\nu B_P{}^\lambda \right) \hat{\mathit{\Gamma}}^h{}_{kj},\end{aligned}$$

が得られる。この結果を利用して, 共変微分における交換則の不整合を計算すると,

$$\begin{aligned}& \hat{\nabla}_k \hat{\nabla}_j B_P{}^\mu - \hat{\nabla}_j \hat{\nabla}_k B_P{}^\mu \\ & \quad = \left(\frac{\partial \mathit{\Gamma}^\mu{}_{\nu\lambda}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \mathit{\Gamma}^\mu{}_{\alpha\lambda}}{\partial x^\nu} + \mathit{\Gamma}^\mu{}_{\alpha\beta} \mathit{\Gamma}^\beta{}_{\nu\lambda} - \mathit{\Gamma}^\mu{}_{\nu\beta} \mathit{\Gamma}^\beta{}_{\alpha\lambda} \right) B_k{}^\alpha B_j{}^\nu B_P{}^\lambda, \end{aligned} \tag{7.40}$$

が得られる。右辺の括弧の中は空間 V_n における曲率テンソルなので, この方程式は,

$$\hat{\nabla}_k \hat{\nabla}_j B_P{}^\mu - \hat{\nabla}_j \hat{\nabla}_k B_P{}^\mu = R^\mu{}_{\lambda\nu\alpha} B_k{}^\alpha B_j{}^\nu B_P{}^\lambda, \tag{7.41}$$

なる形態に書き換えられる。これが部分空間 V_m の法線方向 B_P^μ に関するリッチの公式である。

法線を取り扱うならば, ワインガルテンの公式を再び取り上げるべきだろう。既に, (7.29) に公式を書いておいたが, ワインガルテンの公式は,

$$\hat{\nabla}_k B_P{}^\mu = -B_a{}^\mu H^a{}_{kP} + L_{kPQ} B_Q{}^\mu,$$

のように記述される。この公式を部分空間において, $\hat{x}^h$ について共変微分すると,

$$\hat{\nabla}_h \hat{\nabla}_k B_P{}^\mu = -B_a{}^\mu H^a{}_{kP} - B_Q{}^\mu H_{haQ} H^a{}_{kP} + (\hat{\nabla}_h L_{kPQ}) B_Q{}^\mu + L_{kPQ} (\hat{\nabla}_h B_Q{}^\mu),$$

が得られる。この数式に再び, ワインガルテンの公式:

$$\hat{\nabla}_h B_Q{}^\mu = -B_a{}^\mu H^a{}_{hQ} + L_{hQR} B_Q{}^\mu,$$

を代入すると,

$$\hat{\nabla}_h\hat{\nabla}_k B_P{}^\mu = -B_a{}^\mu\hat{\nabla}_h H^a{}_{kP} - B_Q{}^\mu H_{haQ}H^a{}_{kP} + (\hat{\nabla}_h L_{kPQ})\,B_Q{}^\mu + L_{kPQ}\,(-B_a{}^\mu H^a{}_{hQ} + L_{hQR}B_Q{}^\mu),$$

が得られる。この 2 階共変微分係数をリッチの公式 (7.41) に代入すると,

$$-(\hat{\nabla}_h H^a{}_{kP} - \hat{\nabla}_k H^a{}_{hP})\,B_a{}^\mu - (H_{haQ}H^a{}_{kP} - H_{kaQ}H^a{}_{hP})\,B_Q{}^\mu + (\hat{\nabla}_h L_{kPQ} - \hat{\nabla}_k L_{hPQ})\,B_Q{}^\mu - (L_{kPQ}H^a{}_{hQ} - L_{hPQ}H^a{}_{kQ})\,B_a{}^\mu + (L_{kPQ}L_{hQR} - L_{hPQ}L_{kQR})\,B_Q{}^\mu = R^\mu{}_{\lambda\alpha\nu}B_h{}^\alpha B_k{}^\nu B_P{}^\lambda,$$

が得られる。左辺が複雑になっているように見えるが, 両辺に $B^b{}_\mu$ を乗じて μ について縮約すれば,

$$\hat{\nabla}_h H^b{}_{kP} - \hat{\nabla}_k H^a{}_{hP} - L_{kPQ}H^b{}_{hQ} + L_{hPQ}H^b{}_{kQ} = -R^\mu{}_{\lambda\alpha\nu}B_h{}^\alpha B_k{}^\nu B_P{}^\lambda B^a{}_\mu, \tag{7.42}$$

のように項を減らすことができる。得られた方程式は**コダッチの方程式**と呼ばれる。一方, もとの数式に $B_{S\mu}$ を乗じて μ について縮約すれば, 別の項を代わりに残すことができる。計算を実行すると,

$$\hat{\nabla}_h L_{kPS} - \hat{\nabla}_k L_{hPS} + H_{kaS}H^a{}_{hP} - H_{haS}H^a{}_{kP} + L_{kPS}L_{hSR} - L_{hPS}L_{kSR} = R_{\eta\lambda\alpha\nu}B_h{}^\alpha B_k{}^\nu B_P{}^\lambda B_S{}^\eta, \tag{7.43}$$

が得られる。右辺については, $B_{S\mu} = g_{\mu\eta}B_S{}^\eta$ なる関係を利用した。この方程式は**リッチの方程式**と呼ばれる。

7.5 リーマン曲率の幾何学的解釈

第 5 章において, すでにリーマン曲率 k が与えられた二つのベクトル u^μ と v^μ が張る平面に接する測地線のガウス曲率であると説明した。そのようなリーマン曲率 k は,

$$k = \frac{R_{\kappa\lambda\nu\mu}u^\nu v^\mu u^\lambda v^\kappa}{(g_{\nu\kappa}g_{\mu\lambda} - g_{\mu\kappa}g_{\nu\lambda})\,u^\nu v^\mu u^\lambda v^\kappa},$$

のように定義される。リーマン曲率 k が上記のスカラ曲率の性質をもつことは本章に譲り, 証明を省略していたのだった。第 7 章も最終節にきて, 証明できる材料がそろってきたのでリーマン曲率 k がスカラ曲率, しかも, ガウス曲率と一致することを証明しよう。

空間 V_n の座標系としてリーマンの標準座標を用いることにしよう。しかも, 議論の対象とする点を原点に選ぶ。このように座標を設定すると, 原点を通るすべての測地線は,

$$x^\kappa = \left(\frac{\mathrm{d}x^\kappa}{\mathrm{d}s}\right)_0 s,$$

のように記述できる。なお, $(\cdots)_0$ は原点における関数値を意味する。このとき, 原点から延びる二つのベクトル u^κ と v^κ が張る平面に接するすべての測地線がつくる曲面の方程式は,

$$x^\kappa = (u^\kappa \alpha + v^\kappa \beta)\, s, \tag{7.44}$$

なる形で書かれる。ただし, α と β は任意の定数である。ここで, $\bar{x}^0 \equiv \alpha s$, $\bar{x}^1 \equiv \beta s$ のように曲面座標を定義すれば, 曲面の方程式 (7.44) は,

$$x^\kappa = u^\kappa \bar{x}^1 + v^\kappa \bar{x}^2, \tag{7.45}$$

のように書き換えられる。さらに,

$$B_j{}^\kappa \equiv \frac{\partial x^\kappa}{\partial \bar{x}^j} \qquad (j = 0, 1),$$

なる変換行列を定義すれば, $B_1{}^\kappa = u^\kappa$, $B_2{}^\kappa = u^\kappa$ と書ける。そのとき, 曲面上の第 1 基本テンソル $\bar{g}_{jk} = B_j{}^\mu B_k{}^\nu g_{\mu\nu}$ は,

$$\bar{g}_{11} = g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu, \quad \bar{g}_{12} = g_{\mu\nu} u^\mu v^\nu, \quad \bar{g}_{22} = g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu, \tag{7.46}$$

となる。続いて, オイラー・スカウテンの曲率テンソル:

$$H_{jk}{}^\mu = \bar{\nabla}_j B_k{}^\mu = \frac{\partial B_k{}^\mu}{\partial \bar{x}^j} + \mathit{\Gamma}^\mu{}_{\nu\lambda} B_j{}^\nu B_k{}^\lambda - B_h{}^\mu \bar{\mathit{\Gamma}}^h{}_{jk}, \tag{7.47}$$

の標準座標の原点における値を特定しよう。変換行列 $B_j{}^\mu$ が定数なので, $\partial B_k{}^\mu / \partial \bar{x}^j = 0$ である。また, 標準座標は, 原点でクリストッフェル記号がゼロ, すなわち, $(\mathit{\Gamma}^\mu{}_{\nu\lambda})_1 = 0$ である。したがって, (7.47) の右辺の第 1 項と第 2 項はゼロになる。そのとき, $H_{jk}{}^\mu$ は曲面の接ベクトル $B_j{}^\mu$ と平行であることになる。本来, オイラー・スカウテンの曲率テンソル $H_{jk}{}^\mu$ は曲面に対する法線ベクトルを与えるはずなので, 平行と垂直を両立するためには, ゼロでなければならない。したがって, 標準座標系での原点において,

$$(H_{jk}{}^\mu)_0 = 0, \qquad (\bar{\mathit{\Gamma}}^h{}_{jk})_0 = 0, \tag{7.48}$$

が成立しなければならない。

ガウスの方程式を用いて曲面座標系の原点における曲率を特定しよう。ガウスの方程式は,

$$\bar{R}_{bjkh} = R_{\mu\beta\alpha\nu} B_b{}^\mu B_j{}^\beta B_k{}^\alpha B_h{}^\nu + H_{kb}{}^\mu H_{hj\mu} - H_{hb}{}^\mu H_{kj\mu},$$

なる形式で記述される。右辺の第 2 項と第 3 項が原点でゼロとなることは前段落から明らかである。すなわち, 原点では,

$$(\bar{R}_{bjkh})_0 = (R_{\mu\beta\alpha\nu})_0,$$

が成立する。ここで, 曲面空間が 2 次元であることに注意すると面白いことがわかる。既に第 5 章で計算して気づいたように, 2 次元では 16 成分ある曲率テンソル $\bar{R}_{bjkh}$ に独立成分が 1 個しか存在しないのだ。その代表値は $\bar{R}_{1212}$ とするのが適切だろう。この考察によって, 原点における曲率テンソルは,

$$(\bar{R}_{1212})_0 = (R_{\mu\beta\alpha\nu})_0\, B_1{}^{\mu} B_2{}^{\beta} B_1{}^{\alpha} B_2{}^{\nu} = (R_{\mu\beta\alpha\nu})_0\, u^{\mu} v^{\beta} u^{\alpha} v^{\nu},$$

となる。これで証明のための材料がそろったわけだ。

曲率テンソル $\bar{R}_{1212}$ の座標変換に対する性質を調べてみよう。座標変換は, $\bar{x}'^j = \bar{x}'^j(\bar{x}^0, \bar{x}^1)$ のように 2 次元空間における座標変換である。本来, $\bar{R}_{bjkh}$ はテンソル性をもつため,

$$\bar{R}'_{ljkh} = \bar{R}_{abcd} \frac{\partial \bar{x}^a}{\partial \bar{x}'^l} \frac{\partial \bar{x}^b}{\partial \bar{x}'^j} \frac{\partial \bar{x}^c}{\partial \bar{x}'^k} \frac{\partial \bar{x}^d}{\partial \bar{x}'^h},$$

なる変換則が成立する。この変換則にしたがって $\bar{R}'_{1212}$ を計算すると,

$$\begin{aligned}
\bar{R}'_{1212} = \bar{R}'_{ljkh} &= \bar{R}_{abcd} \frac{\partial \bar{x}^a}{\partial \bar{x}'^1} \frac{\partial \bar{x}^b}{\partial \bar{x}'^2} \frac{\partial \bar{x}^c}{\partial \bar{x}'^1} \frac{\partial \bar{x}^d}{\partial \bar{x}'^2} \\
&= \quad \bar{R}_{1212} \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial \bar{x}'^1} \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial \bar{x}'^2} \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial \bar{x}'^1} \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial \bar{x}'^2} + \bar{R}_{0110} \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial \bar{x}'^1} \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial \bar{x}'^2} \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial \bar{x}'^1} \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial \bar{x}'^2} \\
&\quad + \bar{R}_{1001} \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial \bar{x}'^1} \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial \bar{x}'^2} \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial \bar{x}'^1} \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial \bar{x}'^2} + \bar{R}_{1010} \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial \bar{x}'^1} \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial \bar{x}'^2} \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial \bar{x}'^1} \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial \bar{x}'^2} \\
&= \bar{R}_{2121} \left(\frac{\partial \bar{x}^1}{\partial \bar{x}'^1} \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial \bar{x}'^2} - \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial \bar{x}'^2} \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial \bar{x}'^1} \right)^2,
\end{aligned}$$

が得られる。この計算にあたり, 曲率テンソル $\bar{R}_{abcd}$ が (a, b) の組み合わせと (c, d) の組み合わせについて反対称であることに注意すれば便利である。つまり, $a = b$, または, $c = d$ となる組み合わせでは $\bar{R}_{abcd} = 0$ となるということだ。だから, 可能な (a, b, c, d) の組み合わせは 16 個あるのみ関わらず, 途中計算では 4 個しか組み合わせが現れないのだ。便宜上であるが, ここで,

$$\varDelta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \bar{x}^1}{\partial \bar{x}'^1} & \dfrac{\partial \bar{x}^1}{\partial \bar{x}'^2} \\ \dfrac{\partial \bar{x}^2}{\partial \bar{x}'^1} & \dfrac{\partial \bar{x}^2}{\partial \bar{x}'^2} \end{vmatrix},$$

なる行列式 (ヤコビアン) を定義すると, 曲率テンソルの変換則は,

$$\bar{R}'_{1212} = \varDelta^2\, \bar{R}_{1212},$$

のように書ける。一方, 曲面上の計量テンソル $\bar{g}_{jk}$ の行列式 $\bar{g}$ は,

$$
\begin{aligned}
\bar{g} &= \bar{g}_{11}\bar{g}_{22} - \bar{g}_{12}\bar{g}_{21} \\
&= g_{\nu\lambda}u^{\nu}u^{\lambda}\, g_{\mu\kappa}v^{\mu}v^{\kappa} - g_{\nu\kappa}u^{\nu}v^{\kappa}\, g_{\mu\lambda}v^{\mu}u^{\lambda} \\
&= (g_{\nu\lambda}g_{\mu\kappa} - g_{\nu\kappa}g_{\mu\lambda})\, u^{\nu}v^{\mu}u^{\lambda}v^{\kappa},
\end{aligned}
$$

のように計算できる。この計算において, (7.46) で明らかにした計量テンソルの要素を代入した。第 2 章で説明したように, 計量テンソルは $\sqrt{\bar{g}}\,\mathrm{d}\bar{x}^1\mathrm{d}\bar{x}^2$ で面積素の面積[2]である。その面積[3]は, 座標変換に対して, $\sqrt{\bar{g}'} = \sqrt{\bar{g}}\,|\mathrm{d}\bar{x}/\mathrm{d}\bar{x}'|$ のように変換される。ここで, $|\mathrm{d}\bar{x}/\mathrm{d}\bar{x}'|$ はヤコビアンであり, 先ほど定義した記号を用いると, $|\mathrm{d}\bar{x}/\mathrm{d}\bar{x}'| \equiv \mathit{\Delta}$ である。したがって, $\bar{g}' = \mathit{\Delta}^2\,\bar{g}$ が成立する。ゆえに,

$$
\frac{\bar{R}_{1212}}{\bar{g}} = \frac{R_{\nu\mu\lambda\kappa}\,u^{\nu}v^{\mu}u^{\lambda}v^{\kappa}}{(g_{\nu\lambda}g_{\mu\kappa} - g_{\nu\kappa}g_{\mu\lambda})\,u^{\nu}v^{\mu}u^{\lambda}v^{\kappa}}, \tag{7.49}
$$

は座標変換に対して不変である。すなわち, リーマン曲率と定義した値 k は,

$$
k = -\frac{\bar{R}_{1212}}{\bar{g}}, \tag{7.50}
$$

なる値をもち, しかもスカラである。そのスカラがガウス曲率に等しくなることを次の段落以降で示そう。

リーマン曲率 $k = -\bar{R}_{1212}/\bar{g}$ の正体を調べるため, これまでの議論にしたがって具体的に計算してみよう。曲率テンソルは, (5.12) で導出した結果に基づき,

$$
\begin{aligned}
\bar{R}_{klhj} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\bar{g}_{jk}}{\partial\bar{x}^h\,\partial\bar{x}^l} + \frac{\partial^2\bar{g}_{hl}}{\partial\bar{x}^j\,\partial\bar{x}^k} - \frac{\partial^2\bar{g}_{jl}}{\partial\bar{x}^h\,\partial\bar{x}^k} - \frac{\partial^2\bar{g}_{hk}}{\partial\bar{x}^j\,\partial\bar{x}^l}\right) \\
- \bar{\mathit{\Gamma}}^a{}_{jl}\bar{\mathit{\Gamma}}^b{}_{hk}\bar{g}_{ab} + \bar{\mathit{\Gamma}}^a{}_{hl}\bar{\mathit{\Gamma}}^b{}_{jk}\bar{g}_{ab},
\end{aligned}
$$

のように計算できるのだが, 既に示したように, 原点において $\bar{\mathit{\Gamma}}^h{}_{jk} = 0$ となるので, 曲率テンソルは,

$$
\begin{aligned}
\bar{R}_{1212} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\bar{g}_{11}}{\partial\bar{x}^2\,\partial\bar{x}^2} + \frac{\partial^2\bar{g}_{22}}{\partial\bar{x}^1\,\partial\bar{x}^1} - \frac{\partial^2\bar{g}_{21}}{\partial\bar{x}^1\,\partial\bar{x}^2} - \frac{\partial^2\bar{g}_{12}}{\partial\bar{x}^2\,\partial\bar{x}^1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2\bar{g}_{11}}{\partial\bar{x}^2\,\partial\bar{x}^2} - \frac{\partial^2\bar{g}_{21}}{\partial\bar{x}^1\,\partial\bar{x}^2} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2\bar{g}_{22}}{\partial\bar{x}^1\,\partial\bar{x}^1},
\end{aligned}
$$

となる。その結果, リーマン曲率は,

$$
k = -\frac{\bar{R}_{1212}}{\bar{g}} = \frac{\dfrac{1}{2}\,\dfrac{\partial^2\bar{g}_{11}}{\partial\bar{x}^2\,\partial\bar{x}^2} - \dfrac{\partial^2\bar{g}_{21}}{\partial\bar{x}^1\,\partial\bar{x}^2} + \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\partial^2\bar{g}_{22}}{\partial\bar{x}^1\,\partial\bar{x}^1}}{\bar{g}_{11}\bar{g}_{22} - \bar{g}_{12}\bar{g}_{21}}, \tag{7.51}
$$

[2]本来のように n 次元空間を取り扱うのであれば, n 次元の超体積素の体積に相当する。
[3]先ほどと同様, 本来は n 次元の体積に相当する。

であることが特定できた。

上の計算に対抗し, 計量テンソル $\bar{g}_{jk}$ で指定される曲面のガウス曲率を, 微分幾何学の公式にしたがって算出しよう。計量 $\bar{g}_{jk}$ から直接, ガウス曲率を計算できる公式がブリオキ (Brioschi) によって提案[4] されている。ブリオキの公式によると,

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \bar{g}_{11}}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{g}_{12}}{\partial \bar{x}^1 \partial \bar{x}^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \bar{g}_{22}}{\partial \bar{x}^1 \partial \bar{x}^1} & \frac{1}{2}\frac{\partial \bar{g}_{11}}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial \bar{g}_{12}}{\partial \bar{x}^1} - \frac{1}{2}\frac{\partial \bar{g}_{11}}{\partial \bar{x}^2} \\ \frac{\partial \bar{g}_{12}}{\partial \bar{x}^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial \bar{g}_{22}}{\partial \bar{x}^1} & \bar{g}_{11} & \bar{g}_{12} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial \bar{g}_{22}}{\partial \bar{x}^2} & \bar{g}_{12} & \bar{g}_{22} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\frac{\partial \bar{g}_{11}}{\partial \bar{x}^2} & \frac{1}{2}\frac{\partial \bar{g}_{22}}{\partial \bar{x}^1} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial \bar{g}_{11}}{\partial \bar{x}^2} & \bar{g}_{11} & \bar{g}_{12} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial \bar{g}_{22}}{\partial \bar{x}^1} & \bar{g}_{12} & \bar{g}_{22} \end{bmatrix},$$

なる二つの行列を定義すると, ガウス曲率 K は,

$$K = \frac{\det A - \det B}{\bar{g}_{11}\bar{g}_{22} - \bar{g}_{12}\bar{g}_{21}},$$

で計算できる。ここで, det は行列式を与える演算子とする。我々が想定している座標系は, 原点で $\bar{\Gamma}^h{}_{jk} = 0$ となるのだから, 計量テンソルの 1 階の導関数はゼロである。しかし, 2 階の導関数はゼロとは限らない。そのように考えると, 行列 A と B は簡略化され, それらの行列式は,

$$\begin{aligned} \det A &= \left(-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \bar{g}_{11}}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{g}_{12}}{\partial \bar{x}^1 \partial \bar{x}^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \bar{g}_{22}}{\partial \bar{x}^1 \partial \bar{x}^1}\right)\left(\bar{g}_{11}\bar{g}_{22} - \bar{g}_{12}\bar{g}_{21}\right), \\ \det B &= 0, \end{aligned}$$

のように計算できる。したがって, ガウス曲率は,

$$K = -\frac{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \bar{g}_{11}}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{x}^2} - \frac{\partial^2 \bar{g}_{12}}{\partial \bar{x}^1 \partial \bar{x}^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \bar{g}_{22}}{\partial \bar{x}^1 \partial \bar{x}^1}}{\bar{g}_{11}\bar{g}_{22} - \bar{g}_{12}\bar{g}_{21}},$$

となり, (7.51) に示したリーマン曲率 k と一致した。よって, リーマン曲率は, 指定した二つのベクトルによって張られる平面に接する測地線のガウス曲率に等しい。¶

[4]Shlomo Sternberg, "Curvature in Mathematics and Physics," Dover Publications Inc., ISBN-13: 978-0-486-47855-5, p. 40, 2012.