第2章　ゼータ関数

調和級数 $1+1/2+1/3+\cdots$ が発散することは古くから知られ, 14 世紀にはオレームがその発散性を証明した。それに対し, 自然数のべき乗の逆数による無限級数, すなわち, $\zeta(s)\equiv 1+1/2^s+1/3^s+\cdots$ は収束する。そのため, その級数はゼータ関数と定義される。本章では, 調和級数から説明をはじめゼータ関数を導入する。さらに, ゼータ関数の性質について議論する。

2.1　調和級数

自然数の逆数は, $1, 1/2, 1/3, \ldots$ のように, 順次小さくなり, その値はゼロに向かって収束していく。自然数の逆数を加算した級数, いわゆる調和級数は, 加算する項の数を無限大にしたとき収束するのだろうか? 調和級数は, 記号を用いて,

$$H_n \equiv \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k},$$

によって定義される。この級数の隣り合う項との差は, $H_n - H_{n-1} = 1/n$ であり, $n\to\infty$ とすればこの差はゼロに収束するので, 調和級数はある有限の値に収束すると信じられていた。実際に調和級数を計算してみると, $H_{100}=5.18738$, $H_{1000}=7.48547$ のように値がゆっくりと上昇する。この上昇の緩さから, 調和級数が発散すると言っても疑わしく聞こえるかもしれない。しかし, 調和級数は発散するのである。

調和級数が発散することは, 14 世紀にオレームによって証明された。オレームの証明にしたがって調和級数の発散を示してみよう。調和級数を次のように書いてみると調和級数の発散が理解できる。

$$\begin{aligned}
H_4 &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\\
&> 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4} = 1+\frac{2}{2},\\
H_8 &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\\
&> 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8} = 1+\frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

この関係を一般化すると,

$$H_{2^n} > 1 + \frac{n}{2},$$

と書くことができる。この関係式において $n \to \infty$ とすれば右辺が発散するので, 調和級数が発散することが示されるのである。

調和級数の項を部分的に抜き出し, 分母が偶数だけ, または, 奇数だけの項のみで構成される級数もやはり発散する。調和級数の項を部分的に抜き出した級数が発散することは,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdots\right) = \infty,$$

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \cdots > \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \cdots\right) = \infty,$$

と書けば証明できる。つまり, 調和級数は項を半分に間引いた程度では収束する級数をつくるることはできない。同様に, 分母が 3 の倍数になるものだけ, さらに, 分母が 1000 の倍数になるものだけ間引いて抜き出したとしても, やはり, その級数は発散する。

総和計算の項数 n に対する調和級数 H_n は下表のようになる。その結果によると, 調和級数 H_n は $\log n$ と同じくらいの速さで上昇している。しかも, $\gamma_n \equiv H_n - \log n$ を計算してみると下表のように一定の値に収束しそうである。

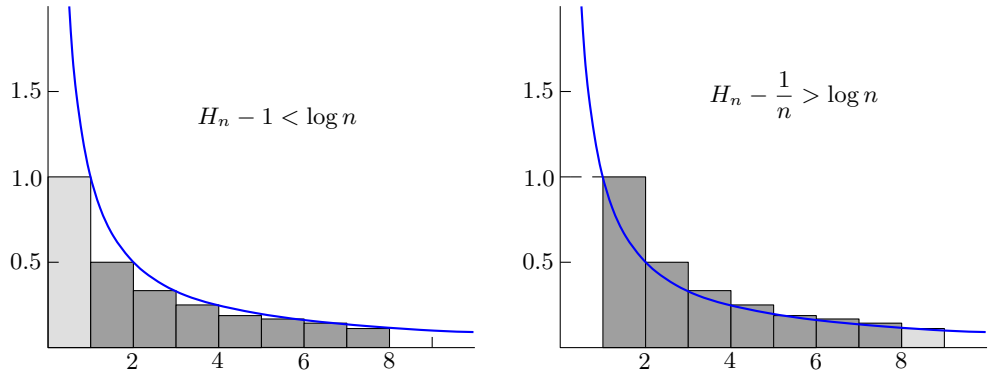
表 2.1: 調和級数と対数関数の関係

n	H_n	γ_n
10	2.9289682	0.6263831
100	5.1873775	0.5822073
1 000	7.4854708	0.5777155
10 000	9.7876060	0.5772656
100 000	12.0901461	0.5772206
1 000 000	14.3927267	0.5772161
10 000 000	16.6953113	0.5772157

調和級数 H_n と対数関数 $\log x$ と差, すなわち, γ_n を調べてみよう。その関係を調べるには図 2.1 に示す幾何学的関係に注目すればよい。この図は, 関数 $f(x) = 1/x$ の定積分を長方形の面積で近似した場合を表している。図 2.1 (a) は, 濃い網掛けの長方形の面積が関数の積分値より少なくなるように配置した図である。一方, 図 2.1 (b) は, 濃い網掛けの長方形の面積が関数の積分値より大きくなるように配置した図である。

図 2.1 のどちらも, 濃い網掛けと薄い網掛けの長方形の面積の和は H_n (図では $n = 8$ としている) である。そのうち, 関数 $1/x$ の積分の見積もり量に含むのは濃い網掛け部のみであり, 薄い網掛け部は除外される。したがって, 関数 $1/x$ を区間 $[1, n]$ で積分した結果は,

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} < \log n < \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k},$$



(a) Underestimation with rectangles. (b) Overestimation with rectangles.

図 2.1: 調和級数と対数関数の関係

なる不等式で記述できるが, これを調和級数の記号 H_n を用いて書き換えると,

$$H_n - 1 < \log n < H_n - \frac{1}{n},$$

となる。さらに, この不等式から H_n を減じて -1 倍すると, $1/n < \gamma_n < 1$ が得られる。しかし, これだけでは γ_n が収束するとはいえない。なぜなら, 数列 $a_n = (2 + (-1)^n)/4$ のように $1/n < a_n < 1$ を満足しているが, 収束せずに振動している場合も考えられるからである。そこで, γ_n の階差を評価してみよう。

$$\begin{aligned}\gamma_n - \gamma_{n-1} &= H_n - H_{n-1} + \log(n-1) - \log n \\ &= \frac{1}{n} + \log\left(1 - \frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

この階差を評価するには, $x \neq 0$ に対して $x > \log(1-x)$ が成立することに注意すればよい。この関係式の x を $-1/n$ で置き換えれば,

$$\gamma_n - \gamma_{n-1} < 0,$$

であることが導かれる。したがって, γ_n は単調減少の数列である。単調減少の数列 γ_n が $n \to \infty$ の条件で $0 < \gamma_n < 1$ となるということは, γ が区間 $(0, 1)$ の中のどこかの点に収束することを意味している。その極限値は,

$$\gamma \equiv \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log n\right), \tag{2.1}$$

のように記述される定数となる。定数 γ は**オイラー定数**を呼ばれ, $\gamma \simeq 0.577216$ である。この関係式を利用すると, n が十分に大きければ, 調和級数は $H_n \simeq \log n + \gamma$ なる近似式で評価できる。

2.1.1　素数の逆数和

調和級数を構成する項の部分集合として, しかも分母が素数であるもので構成した級数:

$$P_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \cdots + \frac{1}{p_n},$$

は収束するだろうか。素数は自然数の集合に対してまばらに存在する印象がある。しかも, そのような級数は有限数の項で完結しないだろうか。

実は, 素数の逆数による級数は無限項まで存在する。つまり, 素数が無限に存在するということなのだが, その事実は古代ギリシャでも知られていた。古代ギリシャのユークリッドが次のようにして, 素数が無限に存在することを証明している。

証明　素数が有限個 (n 個) であることを仮定し, すべての素数を $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ と書く。すべての素数の積に 1 を加えた自然数 q, すなわち,

$$q = p_1 p_2 p_3 \cdots p_n + 1$$

を考える。自然数 q は, p_1 から p_n のどの素数で割っても, 必ず, 1 が余る。すなわち, p_1 から p_n がすべての素数であるという仮定に矛盾する。つまり, 素数は無限に存在する。¶

さて, 表 2.2 によって素数の逆数による級数を調べてみよう。その表には, 与えられた上限数 (upper limit) を超えない素数の個数 n と, 最大の素数 p_{n-1} と, それら n 個の素数の逆数からなる級数の値 S_n を記載している。素数の逆数による級数は調和級数に比べ, かなりゆっくりと上昇する。上限数を百万としたときの級数にしても, その値は 2.887 程度にしかなっていない。これくらい上昇が遅いと, この級数はある数値に収束しそうな気がするのだが, 驚くことにこの級数も発散するのである。

表 2.2: 素数の逆数による級数

Upper limit	n	p_{n-1}	S_n
10	4	7	1.17619048
100	25	97	1.80281720
1 000	168	997	2.19808013
10 000	1 229	9 973	2.48305998
100 000	9 592	99 991	2.70527218
1 000 000	78 498	999 983	2.88732810
10 000 000	664 579	9 999 991	3.04144938

素数の逆数による級数は, オイラーがゼータ関数を研究することによって発散することを発見した。一方, 20 世紀にエルデシュがわかりやすい証明によって, 素数の逆数による級数が発散することを示しているのでその方法を紹介する。エルデシュの証明は背理法によるものである。つまり, 素数の逆数による級数が収束すると仮定した上でその矛盾を暴くことによって級数の発散を証明するのである。

証明 素数の逆数による級数が収束するということは, ある任意の正の数 ε が与えられたとき,

$$\frac{1}{p_{n+1}} + \frac{1}{p_{n+2}} + \frac{1}{p_{n+3}} + \cdots < \varepsilon,$$

を満たす整数 n が存在する。この ε は, 任意の正の数であるのでどんな値であってもよい。どんなに小さい ε を設定しても, 必ず, 上の不等式を満たす n が存在するということによって級数の収束を約束しているのである。まず, 素数の逆数の級数が収束することを仮定し, ε はどのような正の数であってもよいので, $\varepsilon = 1/2$ としてみよう。さらに, 上の不等式の両辺に自然数 N を乗じると, 不等式は,

$$\frac{N}{p_{n+1}} + \frac{N}{p_{n+2}} + \frac{N}{p_{n+3}} + \cdots < \frac{N}{2},$$

となる。ここで, 1 から N までの自然数のうち, p_n 以下の素数だけで因数分解できる自然数の個数を N_1 個とする。逆に, 少なくとも p_{n+1} 以上の約数をもつ自然数の個数を N_2 個とする。言うまでもなく, $N = N_1 + N_2$ でなければならない。ここで, 上の不等式の各項の小数部を切り捨てると, その不等式は,

$$\left\lfloor \frac{N}{p_{n+1}} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{p_{n+2}} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{p_{n+3}} \right\rfloor + \cdots < \frac{N}{2},$$

なる形に書き換えられる。小数部を切り捨てることによって, 左辺はより小さな値になるので, 不等式としては成立したままである。ところで, $\lfloor N/p_{n+1} \rfloor$ は, 1 から N までの自然数のうち, p_{n+1} を約数とする自然数の個数である。そう考えると, この不等式は,

$$N_2 \leq \left\lfloor \frac{N}{p_{n+1}} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{p_{n+2}} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{p_{n+3}} \right\rfloor + \cdots < \frac{N}{2},$$

と書けるはずである。すなわち, $N_2 < N/2$ である。一方, p_n 以下の素数のみで因数分解できる自然数 ν は,

$$\nu = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_n^{e_n} \cdot m^2,$$

のように書くことができる。ただし, 指数 $e_1, e_2, \ldots, e_n$ は 0 または 1 であり, m はやはり p_n 以下の素数のみで因数分解できる自然数である。この式は, 自然

数 ν を因数分解したとき, 素数の偶数乗となっている因子をすべて m^2 に放り込み, 残りの因子を $p_1^{e_1}p_2^{e_2}\cdots p_n^{e_n}$ として並べたと思えばよい。例えば, 11 以下の素数のみで因数分解できる自然数 2 683 296 は,

$$2\,683\,296 = 2^5\cdot 3^2\cdot 7\cdot 11^3 = 2^1\cdot 3^0\cdot 5^0\cdot 7^1\cdot 11^1\cdot (2^2\cdot 3^1\cdot 11^1)^2,$$

となるので, この場合, $[e_1, e_2, e_3, e_4, e_5] = [1, 0, 0, 1, 1]$, $m = 132$ である。さて, p_n 以下の素数で因数分解した場合, 指数 $[e_1, e_2, \ldots, e_n]$ の組み合わせは 2^n 通り存在し, m の選び方はたかだか $\sqrt{N}$ 通りである。よって, p_n 以下の素数のみで分解できる自然数の個数 N_1 は, $N_1 \le 2^n\sqrt{N}$ となる。ここで, $N > 2^{2(n+1)}$ となるように N を選べば, $N_1 < N/2$ となる。つまり, $N_1 + N_2 < N$ となり, 自然数の個数に矛盾が生じる。この矛盾が生じた理由は, N 以下の自然数のうち p_{n+1} 以上の素数を約数とする自然数の個数を $N_2 < N/2$ のように限定してしまったことである。これにより, 不等式:

$$\frac{1}{p_{n+1}} + \frac{1}{p_{n+2}} + \frac{1}{p_{n+3}} + \cdots < \frac{1}{2},$$

を満足する n は存在しないことになる。したがって, 素数の逆数による級数は発散する。¶

2.1.2　交代調和級数

自然数の逆数を順次加算した級数, いわゆる調和級数が発散することは既に述べた。調和級数に加算する第 n 項は $1/n$ であるので, 加算する項の増加ともに加算する項はゼロに近づいていく。それにも関わらず調和級数は発散するのである。しかし, 加算する項の符号を交互に入れ替え,

$$\hat{H}_n \equiv \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^n\frac{1}{n},$$

のように計算される級数は収束する。このように自然数の逆数を符号を交互に入れ替えながら加算した結果を交代調和級数と呼ぶ。交代調和級数の偶数番目の値 $\hat{H}_{2n}$ に注目したとき, $\hat{H}_{2n} = \hat{H}_{2n-1} + 1/2n$ である。また, $2n+1$ 番目の値が,

$$\hat{H}_{2n+1} = \hat{H}_{2n} - \frac{1}{2n+1} = H_{2n-1} + \frac{1}{2n\,(2n+1)},$$

であるので, 交代調和級数は,

$$\hat{H}_{2n-1} < \hat{H}_{2n+1} < \hat{H}_{2n},$$

なる関係を満たす。第 $2n+1$ 番目の値をはさむ 2 つの値の差は $1/2n$ である。この差は n が上昇するとゼロに近づいていくため, 交代調和級数の極限値は特定の値に追い詰められ, 収束するのである。交代調和級数が収束する先の数値は,

$$\hat{H}_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \log 2,$$

である。この関係式は, 対数関数のマクローリン級数 $\log(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + \cdots$ に $x = 1$ を代入して得られる。

交代調和級数の収束は, 収束の中でも条件収束に分類される。条件収束を簡単に説明しよう。一般的に議論するため, 数列 a_n を考えよう。この数列による級数:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_n,$$

が収束するとき, 数列 a_n の絶対値による級数 $\sum |a_n|$ も収束できる場合がある。そのとき, 級数 S_n は絶対収束するという。それに対して, 絶対値による級数が収束せず, S_n が収束する場合, S_n は条件収束するという。交代調和級数の場合に置き換えると, 絶対値による級数が調和級数である。既に見てきたように調和級数は発散し, 交代調和級数が収束する。したがって, 交代調和級数は収束の中でも, 条件収束するということである。

交代調和級数のように条件収束する級数には不可思議な性質がある。条件収束する級数は, 総和の順序を入れ替えると結果が変化する場合があるのだ。交代調和級数を次のように順序を入れ替えてみよう。

$$\begin{aligned}\hat{H}_\infty &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots \\ &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots.\end{aligned}$$

この数式は, 単に加算する項の順序を入れ替えただけであるが, さらに計算を進めると,

$$\begin{aligned}\hat{H}_\infty &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{12} + \cdots \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots\right) \\ &= \frac{\log 2}{2},\end{aligned}$$

が得られる。もともと $\hat{H}_\infty = \log 2$ のはずだったのに, 加算の順序を入れ替えるとその半分の値になってしまった。条件収束する数列は, 加算する項の順序を入れ替えて異なる和に収束させるからくりが可能なのである。

2.2　バーゼル問題

調和級数だけでなく, 素数の逆数による級数までもが発散することがわかった。次に, 自然数の自乗の逆数和:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots,$$

について考えてみよう。この無限級数は,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 1 + \int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = 2,$$

であることから, ある特定の値に収束することが容易に予想される。この予想はある驚くべき事実を意味している。それは, 自然数の部分集合としての素数の列 $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots$ よりも, 自乗数 $1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \ldots$ の方が少ないということである。

自乗数の逆数和の極限値を特定する問題はバーゼル問題と呼ばれる。バーゼル問題は 1644 年に, モンゴリによって提起され, ヨハン・ベルヌーイもその問題に取り組んだが解決できなかった。ところが, 1735 年, ヨハン・ベルヌーイの弟子であったオイラーが, 自乗数の逆数和が $\pi^2/6$ であることを特定したのである。ここでは, フーリエ級数を利用したバーゼル問題の解法を示そう。

フーリエ変換を利用したバーゼル問題の解法を示すため, 図 2.2 に示す周期 2π で振幅 $\pi/2$ の三角波を考えよう。この三角波 $f(x)$ は,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} + x. & (-\dfrac{\pi}{2} \leq x < 0) \\ \dfrac{\pi}{2} - x. & (0 \leq x < \dfrac{\pi}{2}) \end{cases}$$

によって定義され, それ以外の x では周期性 $f(x + 2\pi) = f(x)$ によって関数の値が決められる。 このような周期性をもつ関数は, フーリエ級数展開できる。フーリエ級数展開とは,

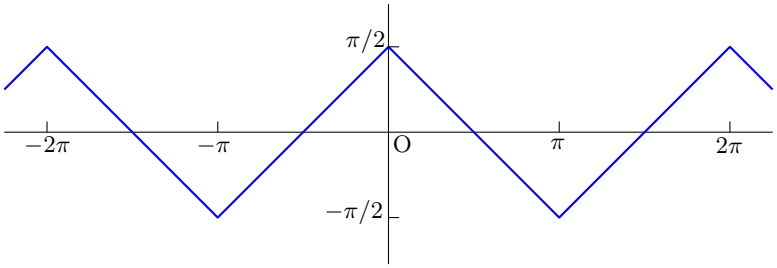


図 2.2: 周期 2π で振幅 $\pi/2$ の三角波

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos nx + B_n \sin nx \right),$$

のように整数倍波成分の三角関数の重ね合わせによって関数を表現する方法である。フーリエ級数展開に現れる展開係数 A_0, A_n, B_n は,

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\cos nx\,\mathrm{d}x,$$
$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\sin nx\,\mathrm{d}x,$$

によって計算できる。この計算に関するヒントとして, $f(x)$ が奇関数であれば $A_n = 0$, 偶関数であれば $B_n = 0$ である。関数 $f(x)$ として想定している三角波は偶関数であるので $B_n = 0$ である。具体的に展開係数 A_n を定めると,

$$f(x) = 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{\pi\,(2k+1)^2},$$

が得られる。この三角波は $f(0) = \pi/2$ となるはずなので, 上のフーリエ変換に $x = 0$ を代入すると,

$$\frac{\pi}{2} = 4\left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{3^2\pi} + \frac{1}{5^2\pi} + \cdots \right),$$

が得られる。両辺に $\pi/4$ を乗じると, この関係式は,

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots,$$

のように書くことができる。この式をさらに変形すると,

$$\begin{aligned}\frac{\pi^2}{8} &= \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right) - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},\end{aligned}$$

となるので, ただちに

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

が得られる。すなわち, バーゼル問題が解けたことになる。

バーゼル問題の解は神秘的な事実を教えてくれる。つまり, 自然数の自乗の逆数和が超越数, しかも, 円周率に関係する値に収束するという事実である。ただし, 自然数の自乗の逆数和の収束が遅いため, このバーゼル問題の解は円周率を求めるためには利用できない。しかしながら, さらに一般化して, 自然数の s 乗の逆数和がどのような数値に収束するのかという興味がわいてくる。それがゼータ関数の発端である。

2.3　ゼータ関数の導入

前節までに, 調和級数が発散し, 2 次の調和級数が $\pi^2/6$ に収束することを示した。当然の流れとして, それを一般化し, s 次の調和級数の振る舞いに興味がわいてくるだろう。その級数を s の依存性について定義した関数:

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots, \tag{2.2}$$

は**ゼータ関数**と呼ばれる。本節では, 新たに定義したゼータ関数の性質を調べる。

2.3.1　ゼータ関数の収束

新たに定義されたゼータ関数 $\zeta(s)$ は, s 次の調和級数であり, $s = 1$ で発散することがわかっている。一方, $s = 2$ の場合はバーゼル問題の解であるので, $\zeta(2) = \pi^2/6$ である。ここでは, ゼータ関数が収束するための変数 s の条件を調べてみよう。

変数 s に対して, $\zeta(s)$ が収束するかどうかを調べてみよう。その目的のため, 級数を n 項で打ち切った調和級数を,

$$H_n^{(s)} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots + \frac{1}{n^s},$$

のように定義する。オレームの証明に倣って数式変形すると,

$$\begin{aligned}
H_{2^n-1}^{(s)} &< 1 + \left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^s}\right) + \left(\frac{1}{4^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{4^s}\right) \\
&\qquad + \left(\frac{1}{2^{s(n-1)}} + \frac{1}{2^{s(n-1)}} + \cdots + \frac{1}{2^{s(n-1)}}\right) \\
&= 1 + \frac{2}{2^s} + \frac{4}{4^s} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{2^{s(n-1)}} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} 2^{k(1-s)} = \frac{1 - 2^{n(1-s)}}{1 - 2^{1-s}},
\end{aligned}$$

となる。数列 $H_n^{(s)}$ は, $n \to \infty$ の極限で, $s > 1$ のとき,

$$H_\infty^{(s)} < \frac{1}{1 - 2^{1-s}},$$

なる不等式を満足する。数列 $H_n^{(s)}$ が n の増加に対して単調増加であることを考えると, $H_n^{(s)}$ は $s > 1$ のときに特定の値に収束する。したがって, ゼータ関数 $\zeta(s)$ は, $s > 1$ である任意の実数に対して定義できることが示された。

2.3.2 素数による表現

任意の次数の調和級数として定義されるゼータ関数は, 素数を用いた数式表現が可能である。素数を用いた数式表現は, オイラーによって導出された。その表現は, 素数が無限に存在することの証明になっている。

ゼータ関数を素数によって表現しよう。その導出は, s 次の調和級数としてのゼータ関数 $\zeta(s)$ の定義:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

から始める。この定義式を別の形式で書き換えることができるかを, すべての自然数が素因数分解によって一意的に表現することに基づいて考えてみよう。素数を小さい順に並べ, $p_0, p_1, p_2, \ldots$ のように番号付けをしたと仮定する。具体的に書くと,

$$p_0 = 2, \quad p_1 = 3, \quad p_2 = 5, \quad p_3 = 7, \quad p_4 = 11, \quad \ldots$$

となるわけであるが, これらの素数を用いるとあらゆる自然数は,

$$\text{任意の自然数} = p_0^{e_0} p_1^{e_1} p_2^{e_2} p_3^{e_3} p_4^{e_4} \cdots = \prod_{k=0}^{N-1} p_k^{e_k},$$

のように表現できる。ここで, N はあらゆる自然数に含まれる素数の総数である。後にこの総数が無限大であることが示されるのだが, ここでは N ということにしておこう。素因数分解の一意性より, すべての自然数は, 各素数に与えられた指数 $e_0, e_1, e_2, \ldots$ の組み合わせで特定できる。ただし, これらの指数は 0 以上の整数である。したがって, ゼータ関数は

$$\begin{aligned}\zeta(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{e_0, e_1, e_2, \ldots} \prod_{k=0}^{N-1} \frac{1}{p_k^{se_k}} \\ &= \prod_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{e_k=0}^{\infty} \frac{1}{p_k^{se_k}} \right) = \prod_{k=0}^{N-1} \frac{1}{1 - p_k^{-s}},\end{aligned} \tag{2.3}$$

のように変形される。ところで, オレームの証明により $\zeta(1)$ が発散する事実があるのだが, (2.3) によると, 素数の数 N が有限であれば $\zeta(1)$ が有限の値となるので事実と矛盾してしまう。よって, 素数が無限に存在することがゼータ関数からも導き出された。素数が無限に存在することを (2.3) に反映させると, ゼータ関数は,

$$\zeta(s) = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1 - p_k^{-s}}, \tag{2.4}$$

のように書かれる。素数による無限乗積によってゼータ関数を表現する方法は神秘的である。例として, $\zeta(2)$ の無限乗積表現を表 2.3 によって検証してみよう。その表には, 与えら

表 2.3: 素数表現による $\zeta(2)$ の検証

Upper limit	n	P_n
10	4	1.59505208
100	25	1.64194520
1 000	168	1.64472519
10 000	1 229	1.64491792
100 000	9 592	1.64493275
1 000 000	78 498	1.64493396
10 000 000	664 579	1.64493406

れた上限値 (upper limit) を超えない素数の数 n と, 無限乗積を n 段で打ち切ったときの積 P_n を記載している。この積 P_n が, 上限数 (または, 打ち切り段数 n) の増加とともに真値 $\pi^2/6$ $(= 1.64493407)$ に近づいていることが表 2.3 から確認できる。

素数によるゼータ関数の表現に関して, $\zeta(1)$ の対数を評価することによって素数の逆数による級数が発散することが示される。ゼータ関数の表現式 (2.4) の対数を計算すると,

$$\begin{aligned}\log\zeta(1) &= -\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_n}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{p_n}+\frac{1}{2p_n^2}+\frac{1}{3p_n^3}+\cdots\right)\\ &< \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{p_n}+\frac{1}{p_n^2}+\frac{1}{p_n^3}+\cdots\right),\end{aligned} \tag{2.5}$$

なる関係が得られる。ところで, 素数のべき乗の逆数数の級数が,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{p_n^s} = \frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{5^s}+\cdots < \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^s},$$

であることに注意すると, (2.5) の右辺は

$$\text{RHS of (2.5)} < \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{p_n}+\sum_{s=2}^{\infty}\left(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^s}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{p_n}+\sum_{s=2}^{\infty}\left(\zeta(s)-1\right), \tag{2.6}$$

のように書き換えられる。前節でオレームの証明に倣って導いた関係式より,

$$\zeta(s)-1 < \frac{1}{1-2^{1-s}}-1 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{k(s-1)}} = \frac{1}{2^{s-1}-1},$$

なる不等式が成立するのだが, ここで $s \geq 2$ であることに注意すると,

$$\zeta(s)-1 < \frac{1}{2^{s-1}-1} < \frac{1}{2^{s-1}-2^{s-2}} = \frac{1}{2^{s-2}},$$

のように不等式を変形することができる。この不等式を適用すると (2.6) の右辺は,

$$\begin{aligned}\text{RHS of (2.6)} &< \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{p_n}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{2^{s-2}}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{p_n}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^s} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{p_n}+2,\end{aligned}$$

のようになる。この結果をまとめると, $\zeta(1)$ の対数は,

$$\log\zeta(1) < \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{p_n} + 2, \tag{2.7}$$

なる不等式を満足する。しかしながら, オレームの証明したように $\zeta(1)$ が発散するので, それに矛盾しないためには右辺の第 1 項, すなわち, 素数の逆数による級数が発散しなればならない。したがって, 素数の逆数による級数が発散するという事実が証明された。

ここで, 表 2.4 を用いて不等式 (2.7) を検証しておこう。その表には, 与えられた上限数 (upper limit N) を超えない素数の数 n, そのような素数の最大値 p_{n-1}, 素数逆数の級数 S_n と, 調和級数の対数 $\log H_N$ を記載している。不等式 (2.7) の導出には, かなり粗い評価をしているため S_n と H_N の差は 2 よりもかなり小さな値ではあるが, 確かに不等式が成り立っていることが確認できる。

表 2.4: 素数逆数の級数と調和級数の対数

Upper limit N	n	p_{n-1}	S_n	$\log H_N$
10	4	7	1.1761905	1.07465021
100	25	97	1.8028172	1.64622789
1 000	168	997	2.1980801	2.01296392
10 000	1 229	9 973	2.4830600	2.28111689
100 000	9 592	99 991	2.7052722	2.49239075
1 000 000	78 498	999 983	2.8873281	2.66672299
10 000 000	664 579	9 999 991	3.0414494	2.81512792

2.3.3 偶数ゼータ関数

ゼータ関数の変数が偶数である場合の値, いわゆる偶数ゼータ関数は具体的に関数値を記述できることが知られている。既にバーゼル問題を紹介し, $\zeta(2) = \pi^2/6$ であることを示した。ゼータ関数の変数 s が 4 以上の偶数の場合, $\zeta(s)$ はベルヌーイ数を用いて厳密な値で記述することができるのだ。ベルヌーイ数とは,

$$\frac{x}{e^x - 1} \equiv \sum_{m=0}^{\infty} B_m \frac{x^m}{m!},$$

の展開係数を与える数列 B_m として定義される。ベルヌーイ数はすべて有理数:

$$B_0 = 1 \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \quad \ldots$$

であり, しかも, 第 3 項以降の奇数項はすべてゼロである。導出過程を省略するが, ベルヌーイ数は, 余接関数 (cotangent) のローラン級数展開:

$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k} B_{2k}}{(2k)!} z^{2k-1},$$

の展開係数に現れる。ここで, 余接関数の部分級数展開による表現から,

$$\begin{aligned} \cot x &= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - \pi^2 n^2} \\ &= \frac{1}{z} - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi^{2k} n^{2k}} z^{2k-1}, \end{aligned}$$

のような記述も可能である。この数式の第 1 行目の右辺が余接関数の部分分数展開である。この部分分数展開は, 複素関数論のテキストなどに記載されている。さらに, 第 2 行目は 2 項定理を用いてさらに展開した結果である。ここで, ベルヌーイ数を用いたローラン展開と z^{2k-1} の係数を比較すると,

$$\sum_{n=1} \infty \frac{1}{n^{2k}} = \frac{(-1)^{k-1} 2^{2k-1} \pi^{2k} B_{2k}}{(2k)!},$$

なる関係が得られる。この関係式は,

$$\zeta(2s) = \frac{(-1)^{s-1} 2^{2s-1} \pi^{2s} B_{2s}}{(2s)!}, \tag{2.8}$$

と書き換えることができる。ここで, s は任意の自然数である。つまり, 偶数ゼータ関数はベルヌーイ数を用いて厳密に記述できることになる。ベルヌーイ数との関係に基づき, 偶数ゼータ関数の例をいくつか挙げると,

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}, \quad \zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450}, \quad \cdots$$

となる。確かに, $\zeta(2)$ は, オイラーが発見したバーゼル問題の解と同一であることがわかる。

2.3.4　奇数ゼータ関数

既に示したように, 偶数ゼータ関数 $\zeta(2k)$ はベルヌーイ数と円周率のべき乗によって厳密な値が求められる。それに対して, 奇数ゼータ関数 $\zeta(2k+1)$ は, 現在でも性質がほとんどわかっていない。唯一, $\zeta(3)$ だけが 1978 年になってアペリーによって無理数であることが示された。それより以前から $\zeta(3) = 1.20205\,690\cdots$ となることは知られてはいたが,

この極限値はアペリー定数と呼ばれている。アペリー定数を含め, 奇数ゼータ関数の値をいくつか書くと,

$$\zeta(3) = 1.20205\cdots, \quad \zeta(5) = 1.03692\cdots, \quad \zeta(7) = 1.00834\cdots,$$
$$\zeta(9) = 1.00200\cdots, \qquad \ldots$$

となる。

厳密な正体がわからないとはいえ, 奇数ゼータ関数の級数表現はさまざまな形が知られている。本節では, $\zeta(3)$ の級数表現の一例を導出してみよう。オイラー積による正弦関数の表現式:

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right),$$

の対数を計算すると,

$$\begin{aligned}\log(\sin x) &= \log x + \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right) \\ &= \log x - \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{\pi^{2k} n^{2k}} = \log x - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(2k)}{\pi^{2k}} x^{2k},\end{aligned} \tag{2.9}$$

が得られる。ところで, $\sin x = e^{ix}(1 - e^{-2ix})/2i$ であることに注意すると左辺は,

$$\begin{aligned}\log(\sin x) &= \log(1 - e^{-2ix}) + ix - \log 2 - \frac{i\pi}{2} \\ &= -\sum_{k=1}^{\infty} e^{-2ikx} + ix - \log 2 - \frac{i\pi}{2},\end{aligned} \tag{2.10}$$

のように変形される。しかし, $\sin x = -e^{-ix}(1 - e^{2ix})/2i$ と書くこともできるので, 左辺は

$$\begin{aligned}\log(\sin x) &= \log(1 - e^{2ix}) + ix - \log 2 + \frac{i\pi}{2} \\ &= -\sum_{k=1}^{\infty} e^{2ikx} - ix - \log 2 + \frac{i\pi}{2},\end{aligned} \tag{2.11}$$

のようにも変形できる。そこで, (2.20) と (2.21) の算術平均をとると,

$$\log(\sin x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{k} - \log 2, \tag{2.12}$$

なる関係式が得られる。この関係式の導出において, (2.10) と (2.11) は対数関数のテイラー級数によって表現されている。そのテイラー級数の収束半径は 1 であるので, (2.10) と (2.11) は収束半径ぎりぎりのきわどい場所でのテイラー級数となっている ($x = 0$ のときには収束しないが)。また, この関係式もオイラーの式と呼ばれているそうなので, オイラーの業績には驚くばかりである。

次に (2.12) の両辺を区間 $(0, x]$ で定積分を 2 回実行してみよう。形式的に書くと,

$$\int_0^x \int_0^x \log(\sin x)\,\mathrm{d}x^2 = -\int_0^x \int_0^x \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{k} + \log 2\right) \mathrm{d}x^2, \tag{2.13}$$

が成り立つはずである。それでは, 左辺と右辺を個別に計算してみよう。まず, (2.9) の関係に注目すれば, 左辺の積分は

$$\begin{aligned}
\text{LHS of (2.13)} &= \int_0^x \int_0^x \left(\log x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(2k)}{\pi^{2k}} x^{2k}\right) \mathrm{d}x^2 \\
&= \int_0^x \left(x\,(\log x - 1) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(2k)}{(2k+1)\pi^{2k}} x^{2k+1}\right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{x^2}{2} \log x - \frac{3}{4} x^2 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(2k)}{\pi^{2k} k(2k+1)(2k+2)} x^{2k+2},
\end{aligned} \tag{2.14}$$

のように実行できる。一方, 右辺の積分は

$$\begin{aligned}
\text{RHS of (2.13)} &= \int_0^x \int_0^x \left(-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{k} - \log 2\right) \mathrm{d}x^2 \\
&= \int_0^x \left(-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2kx}{2k^2} - x \log 2\right) \mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx - 1}{4k^3} - \frac{x^2}{2} \log 2,
\end{aligned} \tag{2.15}$$

のように計算される。当然, これらの積分は等しいはずなので等号で結ぶと,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx - 1}{4k^3} = \frac{x^2}{2} \log 2x - \frac{3}{4} x^2 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(2k)}{\pi^{2k} k(2k+1)(2k+2)} x^{2k+2}, \tag{2.16}$$

なる関係が得られる。面白いことに, (2.16) の左辺に $x = \pi/2$ を代入すると, $\zeta(3)$ が現れる。具体的にて計算してみると,

$$\text{LHS of (2.16)} = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \cdots\right) = -\frac{7}{16}\zeta(3), \tag{2.17}$$

となる。この $x = \pi/2$ を (2.16) の右辺にも代入すると,

$$\zeta(3) = \frac{2\pi^2}{7}\left(-\log \pi + \frac{3}{2} + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(2k)}{2k\,(2k+1)(2k+2)2^{2k}}\right), \tag{2.18}$$

が得られる。この結果は, 面白いことに, $\zeta(3)$ が偶数ゼータ関数 $\zeta(2k)$ の級数で表現されている。本章で既に説明したように, 偶数ゼータ関数はベルヌーイ数を用いた厳密な関係式がわかっているので, 級数 (2.18) を適用すれば $\zeta(3)$ を計算することができる。さらに面

白いことに, (2.16) をさらに 2 回積分し, $x = \pi/2$ を代入すれば $\zeta(5)$ が現れる。結果だけを書くと,

$$\zeta(5) = \frac{2}{31}\left[\frac{\pi^4}{3}\left(\log\pi - \frac{25}{12}\right) + 4\pi^2\zeta(3) \right.$$
$$\left. - 16\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\pi^4\zeta(2k)}{2k\,(2k+1)(2k+2)(2k+3)(2k+4)\,2^{2k}}\right],$$

となる。このように (2.12) に対して積分を繰り返していくと, 奇数ゼータ関数が順次, 級数展開によって表現されていく。

2.4 定義域の拡張

これまでの議論では, ゼータ関数 $\zeta(s)$ は $s > 1$ に対して定義された関数である。本節では, ゼータ関数の定義域を複素数全体に拡張し, その関数の性質を調べる。関数の定義域を拡張するには, 関数論における解析接続という手法を用いる。まず, 解析接続を説明し, ゼータ関数を解析接続するための準備した後に, ゼータ関数を解析接続する。

2.4.1 ゼータ関数の積分表示

ゼータ関数の解析接続のための出発点は, ガンマ関数 $\Gamma(s)$ である。既に紹介したように, ガンマ関数は変数が整数であるとき, $\Gamma(n) = (n-1)!$ という性質がある。言い換えれば, 整数しか対象にしなかった階乗という演算を実数全体, さらには, 複素数全体に拡張した関数がガンマ関数である。ガンマ関数は,

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1}e^{-t}\mathrm{d}t, \tag{2.19}$$

のような積分によって与えられる。この積分を評価してみると, $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ なる関係が導かれ, その結果, $\Gamma(n) = (n-1)!$ なる性質が結論づけられる。実数変数に対するガンマ関数は前章で示した図 1.2 のような曲線を描く関数である。この関数はゼロ以下の整数を極とすることが特徴である。

ガンマ関数の積分表示 (2.19) は, $t = nx$ とおき, 新たな積分変数 x を用いた積分表示で表すと,

$$\Gamma(s) = n^s\int_0^{\infty} x^{s-1}e^{-nx}\mathrm{d}x,$$

のように書き換えられる。この積分表示を,

$$\frac{1}{n^s} = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty} x^{s-1}e^{-nx}\mathrm{d}x,$$

のように書き換え, n を整数と仮定し, 1 から無限大まで総和をとると,

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty x^{s-1} e^{-nx} \mathrm{d}x = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} \mathrm{d}x, \tag{2.20}$$

となる。右辺の被積分関数が $x^{s-2} \cdot x/(e^x - 1)$ のようにベルヌーイ数の指数型母関数を含む。積分 (2.20) は, $\mathrm{Re}\, s > 1$ の条件で収束する。その収束性を証明してみよう。その証明のために, $g(s) \equiv \Gamma(s)\zeta(s)$ と定義する。正の実数 x と任意の複素数 s が与えられたとき, $|x^s| = |x^{\mathrm{Re}\, s} e^{i\, \mathrm{Im}\, s \cdot \log x}| = x^{\mathrm{Re}\, s}$ であることに注意し, $g(s)$ を評価するため,

$$g(s) = \int_0^1 \frac{u^{x-1}}{e^x - 1} \mathrm{d}x + \int_1^\infty \frac{x^{z-1}}{e^x - 1} \mathrm{d}x, \tag{2.21}$$

のように書いてみよう。この式の右辺の第 2 項はどのような s に対しても有限の値に収束する。なぜなら, $x \geq 1$ のとき $e^x - 1 > e^x/2$ であることから,

$$\left| \int_1^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} \mathrm{d}x \right| < 2 \int_1^\infty x^{\mathrm{Re}\, s - 1} e^{-x} \mathrm{d}x,$$

が成立するからである。ここで, $\mathrm{Re}\, s \leq 1$ であれば $x^{\mathrm{Re}\, s - 1} \leq 1$ であるので,

$$\left| \int_1^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} \mathrm{d}x \right| < 2 \int_1^\infty e^{-x} \mathrm{d}x = 2, \qquad (\mathrm{Re}\, s \leq 1)$$

となる。一方, $\mathrm{Re}\, s > 1$ であれば,

$$\begin{aligned} \left| \int_1^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} \mathrm{d}x \right| &< 2 \int_0^\infty x^{\mathrm{Re}\, s - 1} e^{-x} \mathrm{d}x \\ &\leq 2 \int_0^\infty x^{\lceil \mathrm{Re}\, s \rceil - 1} e^{-x} \mathrm{d}x = (\lceil \mathrm{Re}\, s \rceil - 1)! \qquad (\mathrm{Re}\, s > 1) \end{aligned}$$

となる。ここで, $\lceil x \rceil$ は x 以上の整数の最小値である。よって, s とは無関係に (2.21) の右辺の第 2 項が有限の値であることが示された。

第 1 項については, $x \leq e^x - 1 \leq (e-1)x$ であることに注意すると,

$$\frac{1}{e-1} \int_0^1 x^{\mathrm{Re}\, s - 2} \mathrm{d}x < \int_0^1 \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} \mathrm{d}x < \int_0^1 x^{\mathrm{Re}\, s - 2} \mathrm{d}x,$$

なる関係が導かれる。左辺と右辺の積分を実行すると, この関係は

$$\frac{1}{(e-1)(\mathrm{Re}\, s - 1)} < \int_0^1 \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} \mathrm{d}x < \frac{1}{\mathrm{Re}\, s - 1},$$

のように計算される。これより, (2.21) の第 1 項は $\mathrm{Re}\, s > 1$ のとき有限の値に収束することが示される。したがって, 積分 $g(s)$ も $\mathrm{Re}\, s > 1$ のとき有限の値に収束する。

2.4.2 部分積分による解析接続

前項で示したように, ゼータ関数 $\zeta(s)$ の積分表示は $\mathrm{Re}\, s > 1$ のときに収束する。この収束域を広げ, ゼータ関数の定義域を拡大するために解析接続を適用しよう。タイトルに示すように, 本項では部分積分を適用しながらゼータ関数を解析接続を進めていく。関数論のテキストには, この議論が非常に簡単に書かれているのだが, 解析接続の準備段階としてベルヌーイ数の指数型母関数 $f(x) = x/(e^x - 1)$ の高階導関数と x べき乗の積, すなわち, $x^s f^{(n)}(x)$ の積分の収束性を調べる必要がある。その結果を利用して, ゼータ関数の積分表示に部分積分を適用しながら解析接続を進めるのである。

準備段階 上に書いたように, 解析接続の準備段階として, $x^s f^{(n)}(x)$ を積分した場合の収束性を調べる。積分範囲は $[0, \infty)$ とするのだが,

$$\int_0^\infty x^s f^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^s f^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^\infty x^s f^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x, \tag{2.22}$$

のように, 2 項に分けて書いておく。この積分が, $n = 0$ の場合に $\mathrm{Re}\, s > 1$ の条件で収束することは前項で示されている。指数型母関数 $f(x)$ を x について微分した結果:

$$f'(x) = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2},$$

を用いて, $n = 1$ における積分 (2.22) の第 2 項を評価してみよう。前項でも利用した $x \geq 1$ における不等式 $1/(e^x - 1) < 2e^{-x}$ に注意すると,

$$|f'(x)| < 4(e^{-x} + e^{-2x} + xe^{-x}), \quad (x \geq 1)$$

が成立する。これを (2.22) の第 2 項に代入すると,

$$\left|\int_1^\infty x^s f'(x)\,\mathrm{d}x\right| < 4\left(\left|\int_1^\infty x^s e^{-x}\mathrm{d}x\right| + \left|\int_1^\infty x^s e^{-2x}\mathrm{d}x\right| + \left|\int_1^\infty x^{s+1} e^{-x}\mathrm{d}x\right|\right),$$

となる。前項での収束性の評価によると, この式の右辺の第 1 項から第 3 項はすべて, 任意の複素数 s に対して収束するので, この積分自体も任意の複素数 s に対して収束する。もう一方, (2.22) の第 1 項を評価するにはベルヌーイ数の指数型母関数のテイラー展開:

$$f(x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{B_k}{k!} x^k,$$

を利用するのが便利である。このテイラー展開を x について微分すると, 導関数:

$$f'(x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{B_{k+1}}{k!} x^k,$$

が得られる。ここで, ベルヌーイ数の漸近形:

$$B_{2m} = \frac{2\,(2m)!}{(2\pi)^{2m}}, \qquad (m \to \infty)$$

に注意すると, $f(x)$ と $f'(x)$ はともに $|x| < 2\pi$ において収束することがわかる。すなわち, $0 \le x \le 1$ の範囲において $f'(x)$ を上記のテイラー展開で代用してもよい。よって, 積分の第 1 項は

$$\int_0^1 x^s f'(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_{k+1}}{k!} x^{k+z} \mathrm{d}x = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+z+1} \frac{B_{k+1}}{k!} x^{k+z+1} \right]_0^1$$

のように書くことができる。この右辺が収束する条件は, $\mathrm{Re}\, z > -1$ であるので, 結局, $n = 1$ の場合に積分が収束するのは $\mathrm{Re}\, z > -1$ が条件である。

続いて, $n = 2, 3, \ldots$ に対して (2.22) の収束性を評価したいのであるが, これ以降, 具体的に $f^{(n)}(x)$ を書き下していっても収束性の評価は困難である。その代わりに, $f(x)$ の導関数に対して成立する漸化式:

$$e^x \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} f^{(k)}(x) - f^{(n)}(x) = 0, \quad (n = 2, 3, \ldots) \tag{2.23}$$

を利用するとよい。この漸化式は, $(e^x - 1)\, f(x) = x$ を微分していくことによって証明できる。まず, 第 1 回目の微分で

$$e^x \Big(f(x) + f'(x) \Big) - f'(x) = 1,$$

が得られ, 第 2 回目の微分で

$$e^x \Big(f(x) + 2f'(x) + f''(x) \Big) - f''(x) = 0,$$

が得られる。この関係式は，漸化式 (2.23) を満足する。そこで，任意の k に対して (2.23) が成立すると仮定し，その漸化式 (2.23) を微分してみる。すると，

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(e^x \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} f^{(k)}(x) - f^{(n)}(x) \right) \\
&\quad = e^x \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} \Big(f^{(k)}(x) + f^{(k+1)}(x) \Big) - f^{(n+1)}(x) \\
&\quad = e^x f(x) + e^x \sum_{k=1}^{n} \left[\tbinom{n}{k} + \tbinom{n}{k-1} \right] f^{(k)}(x) + e^x f^{(n+1)}(x) - f^{(m+1)}(x) \\
&\quad = e^x f(x) + e^x \sum_{k=1}^{n} \tbinom{n+1}{k} f^{(k)}(x) + e^x f^{(n+1)}(x) - f^{(m+1)}(x) \\
&\quad = e^x \sum_{k=1}^{n} \tbinom{n+1}{k} f^{(k)}(x) - f^{(m+1)}(x),
\end{aligned}$$

となり，$k+1$ に対しても漸化式 (2.23) が成立する。したがって, 漸化式 (2.23) の正当性が帰納的に証明された。よって，n 階の導関数は,

$$f^{(n)}(x) = \frac{e^x}{e^x - 1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} f^{(k)}(x),$$

のように書くことができる。この結果に対して，積分 (2.22) の第 2 項を書くと,

$$\begin{aligned}\left|\int_1^\infty x^s f^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x\right| &\le \frac{e^x}{e^x - 1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \left|\int_1^\infty x^s f^{(k)}(x)\,\mathrm{d}x\right| \\ &< 2\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \left|\int_1^\infty x^s f^{(k)}(x)\,\mathrm{d}x\right|,\end{aligned}$$

のような不等式で表現できる。例えば, $n=2$ の場合にこの不等式を展開すると,

$$\left|\int_1^\infty x^s f''(x)\,\mathrm{d}x\right| < 2\left(\left|\int_1^\infty x^s f(x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_1^\infty x^s f'(x)\,\mathrm{d}x\right|\right),$$

のように書かれる。既に示したように $n=0,1$ のとき, 任意の複素数 s に対して積分 (2.22) が収束することがわかっているので, その事実をこの不等号に適用すると, $n=2$ に対しても積分 (2.22) は任意の z に対して収束することになる。この操作を繰り返していくと, 任意の自然数 n について, 積分 (2.22) の第 2 項は任意複素数の s に対して収束することが結論できる。

積分 (2.22) の第 1 項については, 先ほどと同様にテイラー展開を使ってみよう。その場合, (2.22) の第 1 項は

$$\int_0^1 x^s f^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{k=0}^\infty \frac{B_{k+n}}{k!} x^{k+s} = \sum_{k=0}^\infty \left[\frac{1}{k+s+1}\frac{B_{k+n}}{k!} x^{k+s+1}\right]_0^1,$$

のようになる。念のため, この級数の収束半径を調べてみよう。級数の収束半径は, 各項の大きさの変化を調べてみればよい。各項に含まれているベルヌーイ数は第 2 項以降の奇数項がすべてゼロであるので, $k+n=2m$ (つまり, 偶数) という条件のもとで, テイラー級数の第 k 項と第 $k+2$ 項を比べてみよう。

$$\begin{aligned}\text{第 } k \text{ 項} &= \frac{2\,(2m)!}{(k+s+1)(2\pi)^{2m}\,k!} x^{k+s+1}, \\ \text{第 } k+2 \text{ 項} &= \frac{2\,(2m+2)!}{(k+s+3)(2\pi)^{2m+2}\,(k+2)!} x^{k+s+3}.\end{aligned}$$

これらの項の比を計算すると,

$$\frac{\text{第 } k+2 \text{ 項}}{\text{第 } k \text{ 項}} = \frac{(k+s+3)(k+n+1)(k+n+2)}{(k+s+1)(k+1)(k+2)} \frac{x^2}{(2\pi)^2} \simeq \frac{x^2}{(2\pi)^2}, \qquad (k \gg n)$$

となるのだが, 級数が収束する条件はこの比率が 1 より小さくなることなので, $|x| < 2\pi$ がこの級数の収束半径である。積分 (2.22) の第 1 項の積分範囲 $[0,1]$ は, この級数の収束半径

の内側なので, 級数展開による積分の評価が可能である。また, $B_{2m+1} = 0$ $(m = 1, 2, \ldots)$ であることに注意すると, (2.22) の第 1 項が収束する条件は,

$$\begin{aligned} &\mathrm{Re}\, s > -1, \qquad (n = 0, 1, 2, 4, 6, \ldots) \\ &\mathrm{Re}\, s > -2, \qquad (n = 3, 5, 7, \ldots) \end{aligned}$$

となる。既に評価したように (2.22) の第 2 項は s に関わらず収束するので, この条件は積分 (2.22) 全体が収束する条件である。

部分積分　準備が整ったのでゼータ関数の積分表示に部分積分を適用しながら解析接続をしていこう。前節で, ゼータ関数が

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} \mathrm{d}x, \tag{2.24}$$

なる積分表示されることを学んだ。この積分表示に対して, ベルヌーイ数の指数型母関数を $f(x)$ と書き, $g(s) \equiv \Gamma(s)\,\zeta(s)$ を評価してみよう。その積分 $g(z)$ は,

$$g(s) = \int_0^\infty x^{s-2} f(x)\, \mathrm{d}x, \tag{2.25}$$

であるが, 準備段階で得た知識により, $g(s)$ は $\mathrm{Re}\, s > 1$ のときに収束する。この積分に部分積分を適用すると,

$$g(s) = \left[\frac{x^{s-1}}{s-1} f(x) \right]_0^\infty - \frac{1}{s-1} \int_0^\infty x^{s-1} f'(x)\, \mathrm{d}x, \tag{2.26}$$

が得られる。ここで, $x \to \infty$ の極限において $f(x) \simeq x e^{-x}$ であり, $f(0) = B_0$ であることに注意すれば, この結果の第 1 項は $\mathrm{Re}\, z > 1$ のときにゼロとなり, $\mathrm{Re}\, s \leq 1$ の条件で発散することがわかる。一方, 第 2 項の積分は準備段階での知識により, $\mathrm{Re}\, s > 0$ の条件で収束する。つまり, 積分 (2.25) の収束条件が $\mathrm{Re}\, s > 1$ であったのは, (2.26) の第 1 項があるためである。そこで, 第 1 項を省略すれば $g(s)$ の収束条件を $\mathrm{Re}\, s > 0$ まで拡張することができる。第 1 項を省略したとしても, $\mathrm{Re}\, s > 1$ の条件では, もともと, 第 1 項がゼロであったので (2.26) は (2.25) と等しいはずである。言い換えると, (2.26) の第 1 項を省略することによって, $\mathrm{Re}\, s > 1$ であった $g(s)$ の定義域が $\mathrm{Re}\, s > 0$ となるように解析接続されたことを意味する。ただし, 第 2 項は分母に $s - 1$ が含まれるため, $g(s)$ は $s = 1$ を 1 位の極とすることがわかる。そのときの留数は,

$$\begin{aligned} \operatorname*{Res}_{s=1} g(s) &= \lim_{s \to 1} (s-1)\, g(s) \\ &= -\int_0^\infty f'(x)\, \mathrm{d}x = f(0) = B_0, \end{aligned}$$

のように計算できる。被積分関数がベルヌーイ数の指数型母関数であるので, $g(s)$ の留数にベルヌーイ数が姿を見せている。

続いて, (2.26) に部分積分を適用すると, さらに $g(s)$ の定義式が広がることが予想できるだろう。実際に適用してみると,

$$g(s) = -\left[\frac{x^{s-1}}{s\,(s-1)} f'(x)\right]_0^\infty + \frac{1}{s\,(s-1)} \int_0^\infty x^s f''(x)\,\mathrm{d}x, \tag{2.27}$$

が得られる。この場合についても, $x \to \infty$ の極限において $f'(x) \simeq -xe^{-x}$ であり, $f'(0) = B_1$ であるので, (2.27) の第 1 項は $\mathrm{Re}\, z > 0$ の条件でゼロとなる。一方, (2.27) の第 2 項に含まれる積分は, 準備段階での知識より, $\mathrm{Re}\, s > -1$ の条件で収束する。前段落と同様に, (2.27) の第 1 項を省略した量を $\mathrm{Re}\, s > -1$ への解析接続としよう。すると, 第 2 項の積分が $\mathrm{Re}\, s > -1$ で正則であるので, $g(s)$ は $s = 1, 0$ を 1 位の極とする関数である。ここで, $s = 0$ における留数を計算すると,

$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_{s=0} g(s) &= \lim_{s\to 0} s\, g(s) \\ &= -\int_0^\infty f''(x)\,\mathrm{d}x = -f'(0) = -B_1,\end{aligned}$$

となる。準備段階で得た知識に注意して同様に部分積分を適用していくと, 積分 $g(s)$ の定義域を拡大することができる。部分積分を n 回繰り返した結果を書くと,

$$g(s) = (-1)^n \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{s+k-2} \int_0^\infty x^{s+n-2} f^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x, \quad (\mathrm{Re}\, s > 1-n) \tag{2.28}$$

となる。この操作を無限に繰り返せば $g(s)$ の定義域を複素数全体に拡張することができる。その結果, $g(s)$ は $s = 1, 0, -1, -2, \ldots$ を 1 位の極とする関数になる。上と同様の方法で $s = -n$ における留数を計算すると,

$$\operatorname*{Res}_{s=-n} g(s) = \frac{B_{n+1}}{(n+1)!},$$

となる。積分 $g(s)$ は, 上に述べた 1 位の極以外の複素数全体で正則な関数となる。

ワイエルストラスの無限乗積の公式によると, $1/\Gamma(s)$ は $s = 0, -1, -2, \ldots$ を 1 位の零点とする関数であるので, $\zeta(s) = g(s)/\Gamma(s)$ であるゼータ関数は, $s = -1, -2, -3, \ldots$ が除去可能な特異点である。したがって, ゼータ関数 $\zeta(s)$ は, $z = 0$ を 1 位の極とし, それ以外の複素数全体で正則な関数であることが結論できる。それでは, それらの除去可能な特異点におけるゼータ関数の値を求めてみよう。そのためにはガンマ関数の留数を計算しておくとよい。ガンマ関数の留数の評価にはワイエルストラスの無限乗積の公式を使用することもできるが,

$$\Gamma(s) = \lim_{m\to\infty} \frac{m^s m!}{s\,(s+1)\cdots(s+m)},$$

なるオイラーの無限乗積の公式の方が取り扱いやすい。この公式を用いて $s = -n$ における $\Gamma(s)$ の留数を計算すると,

$$\operatorname*{Res}_{s=-n} \Gamma(s) = \lim_{s\to -n} (s+n)\Gamma(s)$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{s\to -n}\lim_{m\to\infty}\frac{(s+n)\,m^s m!}{s\,(s+1)\cdots(s+n-1)(s+n)(s+n+1)\cdots(s+m)}\\
&= \lim_{m\to\infty}\frac{(-1)^n m^{-n} m!}{n!\,(m-n)!}\\
&= \frac{(-1)^n}{n!}\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)\left(1+\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1+\frac{n-1}{m}\right)\\
&= \frac{(-1)^n}{n!},
\end{aligned}
$$

が得られる。いや, 実は $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$ という性質に注目すれば, オイラーの無限乗積の公式を知らなくても留数を得ることができる。具体的に書くと,

$$
\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{s=-n}\Gamma(s) &= \lim_{s\to -n}(s+n)\,\Gamma(s)\\
&= \lim_{s\to -n}(s+n)\,\Gamma(s+n+1-(n+1))\\
&= \lim_{s\to 1}(s-1)\,\Gamma(s-(n+1))\\
&= \lim_{s\to 1}\frac{(s-1)\,\Gamma(s)}{(s-1)(s-2)\cdots(s-n-1)} = \frac{(-1)^n}{n!}
\end{aligned}
$$

となる。ところで, $g(s)$ と $\Gamma(s)$ の双方について $s=-n$ が 1 位の極であるので,

$$
\zeta(-n)=\lim_{z\to\infty}\frac{g(s)}{\Gamma(s)}=\frac{\operatorname*{Res}_{s=-n} g(s)}{\operatorname*{Res}_{s=-n}\Gamma(s)}=\frac{(-1)^n B_{n+1}}{n+1},\qquad (n=0,1,2,\ldots)
$$

が得られる。さらに, 第 3 項以降のベルヌーイ数の奇数項がゼロであることに注意すると,

$$
\zeta(0)=-\frac{1}{2},\quad \zeta(-2m+1)=-\frac{B_{2m}}{2m},\quad \zeta(-2m)=0,\quad (m=1,2,3,\ldots)
$$

と書くことができる。または, 単純に

$$
\zeta(0)=-\frac{1}{2},\quad \zeta(-n)=-\frac{B_{n+1}}{n+1},\quad (n=1,2,3,\ldots)
$$

と書いてもよいだろう。この式に示すように, 負の偶数のゼータ関数は, 必ず, ゼロになる。そのため, 負の偶数はゼータ関数の自明な零点と呼ばれる。一方, $\Gamma(s)$ が $s=1$ で正則なため, 積分 $g(s)$ の 1 位の極だった $s=1$ は $\zeta(s)$ の 1 位の極として引き継がれる。その極におけるゼータ関数の留数は,

$$
\operatorname*{Res}_{s=1}\zeta(s)=\frac{1}{\Gamma(1)}\operatorname*{Res}_{s=1} g(z)=1,
$$

となる。しかも, $s=1$ はゼータ関数の唯一の極である。

2.4.3 複素数での積分表示

既に導出したように, ゼータ関数は

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} \mathrm{d}z,$$

のような積分表示ができる。しかし, この積分表示は $\mathrm{Re}\, s > 1$ の条件で収束するだけである。前節では, この積分表示に対して部分積分を繰り返すことによって定義域を拡張した。本節では積分表示を複素積分に拡張することによって解析接続を試みる。

積分路として図 2.3 に示す C を設定する。この積分路は, 実軸上を $+\infty$ からゼロに向かう C_+, 原点の周りを半径 r で 1 回転する C_r と, 実軸上のゼロから $+\infty$ に向かう $C-$ によって構成されている。もう少し正確に言うと, 積分路 C_+ は微小量の虚部を含み第 I 象限内を動き, 積分路 C_- は微小量の虚部を含み第 IV 象限内を動く。まず, $\mathrm{Re}\, s > 1$ の条件を仮定しよう。さらに, $r \to 0$ とすると, 経路 C_r にそった積分は,

$$\begin{aligned}\int_{C_r} \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} \mathrm{d}z &= \lim_{r\to 0} ir^s \int_0^{2\pi} \frac{e^{is\theta}}{e^{re^{i\theta}} - 1} \mathrm{d}\theta = \lim_{r\to 0} ir^{s-1} \int_0^{2\pi} e^{i(s-1)\theta} \mathrm{d}z \\ &= \lim_{r\to 0} \frac{2ir^{s-1} e^{\pi i(s-1)} \sin \pi(s-1)}{s-1} = 0, \quad (\mathrm{Re}\, s > 1)\end{aligned}$$

となるので, ゼロになることがわかる。経路 C_+ に沿った積分は

$$\frac{1}{\Gamma(s)} \int_{C_+} \frac{x^{s-1}}{e^z - 1} \mathrm{d}z = -\zeta(s), \quad (\mathrm{Re}\, s > 1)$$

である。さらに, 経路 C_- に沿った積分については, 積分変数 z が原点の周りを角度 2π だけ回った後であることを考えると,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(s)} \int_{C_-} \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} \mathrm{d}z &= \int_0^\infty \frac{(ze^{2\pi i})^{s-1}}{e^z - 1} \mathrm{d}z \\ &= e^{2\pi i(s-1)} \int_0^\infty \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} \mathrm{d}z = e^{2\pi i(s-1)} \zeta(s), \quad (\mathrm{Re}\, s > 1)\end{aligned}$$

と書くことができる。したがって, $\zeta(s)$ は,

$$\begin{aligned}\zeta(s) &= \frac{1}{\Gamma(s)} \frac{1}{e^{2\pi i(s-1)} - 1} \int_C \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} \mathrm{d}z \\ &= \frac{e^{\pi i(s-1)}}{2i\Gamma(s) \sin \pi(s-1)} \int_C \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} \mathrm{d}z \\ &= -\frac{1}{2i\Gamma(s) \sin \pi s} \int_C \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} \mathrm{d}z = -\frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_C \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} \mathrm{d}z, \qquad (2.29)\end{aligned}$$

のように表現できる。この数式変形において, $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \pi/\sin \pi s$ なる関係を利用した。この関係式は $\mathrm{Re}\, s > 1$ の条件のもとで計算したのだが, この関係が $\mathrm{Re}\, s \leq 1$ でも成立すると仮定しよう。その仮定がゼータ関数の解析接続となる。

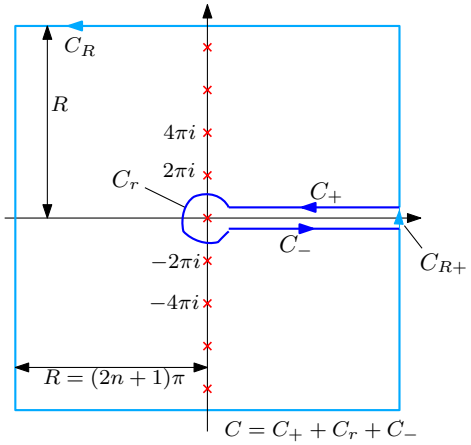


図 2.3: ゼータ関数を計算する積分路

積分表示 (2.29) が $\mathrm{Re}\, s \leq 1$ でも成立するとの仮定が解析接続になっていることを示そう。ゼータ関数の変数が負の整数 $z = -n$ であるなら, 積分路を図 2.3 に示すような $C + C_{R+}$ に設定することができる。追加した積分路 C_{R+} は無限遠の正の実軸を第 IV 象限から第 I 象限にまたぐ微小経路である。この微小経路は長さが限りなくゼロに近いため, この微小経路に沿った積分はゼロとなる。そのため,

$$\zeta(s) = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i}\int_C \frac{(-z)^{-n-1}}{e^z - 1}\mathrm{d}z = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i}\int_{C+C_{r+}} \frac{(-z)^{-n-1}}{e^z - 1}\mathrm{d}z,$$

が成立するため, 経路 $C + C_r$ に沿った周回積分によってゼータ関数を評価できる。補足しておくと, この経路が周回経路として成り立つのはゼータ関数の変数が整数の場合に限られる。なぜなら, 被積分関数の分子 $(-z)^{s-1}$ は, z が原点の周りを 1 回転すると $(-z)^{s-1}e^{2\pi i(s-1)}$ となり, これが回転前と同一の値にならなければ経路 C_{R+} をひと続きの経路とはみなすことができないからである。その条件は s が整数の場合に限って満たされる。ここで考えているのは, $s = -n$ であるので経路 $C + C_{R+}$ は周回経路として成立しているので, この経路の積分に留数定理を使用できる。被積分関数が,

$$\frac{(-z)^{-n-1}}{e^z - 1} = (-1)^{n+1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k}{k!}z^{k-n-2},$$

のようにベルヌーイ数を用いて展開でき, 留数がローラン展開したときの -1 次の係数であることから, 極 $z = 0$ における被積分関数の留数は,

$$\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{(-z)^{-n-1}}{e^z - 1} = \frac{(-1)^{n+1}B_{n+1}}{(n+1)!},$$

であることがわかる。さらに, $\Gamma(1+n) = n!$ であることに注意し, 経路 $C + C_{R+}$ の周回積分に留数定理を適用すると,

$$\zeta(-n) = \frac{(-1)^n B_{n+1}}{n+1},$$

が導かれる。ただし, B_3 以降のベルヌーイ数の奇数項がゼロであることに注意すると,

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}, \quad \zeta(-2m+1) = -\frac{B_{2m}}{2m}, \quad \zeta(-2m) = 0, \quad (m = 1, 2, 3, \ldots)$$

なる結果を得る。この結果に示すとおり, 負の偶数のゼータ関数は, 必ず, ゼロとなる。ゼータ関数の自明な零点に関するこのような結果は前節で解析接続した際にも得られた。

それでは, 整数以外の $\mathrm{Re}\, s < 1$ の場合における経路 C での積分の評価について述べる。上で説明したように, s が整数でなければ経路 $C + C_{R+}$ が周回経路とならないため, 任意の s に対して, 経路 $C + C_{R+}$ を積分経路とすることはできない。そこで, 図 2.3 に示す左回りの積分路 C_R を考えよう。この積分路は, 複素平面における 4 点: $R + iR$, $-R + iR$, $-R - iR$, $R - iR$ を頂点とする正方形であり, しかも, $R = (2n+1)\pi$ であるとする。その積分路が与えられ, $\mathrm{Re}\, s < 1$ の条件では, $R \to \infty$ の極限で, C_R に沿った積分はゼロとなる。それは次のようにして証明できる。

Proof まず, $z = x \pm i(2n+1)\pi$ とし, $0 < \alpha < 1$ を用いると,

$$\begin{aligned}\left|\int_{z=x\pm iR} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1}\mathrm{d}z\right| &< \int_{-R}^{R} \frac{z^{\mathrm{Re}\, s-1}}{e^x + 1}\mathrm{d}x < \int_{-R}^{R} z^{\mathrm{Re}\, s-1}\mathrm{d}x \\ &< \int_{-R}^{R} \frac{1}{R^{1-\mathrm{Re}\, s}}\mathrm{d}z = \frac{2}{R^{-\mathrm{Re}\, s}},\end{aligned}$$

となるので, $\mathrm{Re}\, s < 0$ のとき, この積分はゼロになる。つまり, 積分路 C_R のうち, 実軸と平行な積分路における積分は $\mathrm{Re}\, s < 0$ の条件でゼロになる。次に $z = R + iy$ とすると,

$$\left|\int_{z=R+iy} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1}\mathrm{d}z\right| < \int_{-R}^{R} \frac{(\sqrt{2}R)^{\mathrm{Re}\, s-1}}{e^R - 1}\mathrm{d}y,$$

となる。この積分は, $R \to \infty$ の極限では s と無関係にゼロになるので, 複素平面の第 I 象限と第 IV 象限を通る虚軸に平行な積分路での積分は必ずゼロになる。もう一方, $z = -R + iy$ における積分は,

$$\left|\int_{z=R-iy} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1}\mathrm{d}z\right| < \int_{-R}^{R} \frac{(\sqrt{2}R)^{\mathrm{Re}\, s-1}}{e^{-R}e^{iy} - 1}\mathrm{d}y,$$

となるので, $R \to \infty$ の極限では, $\mathrm{Re}\, s < 1$ の場合にゼロとなる。したがって, 積分路 C_R における積分は, $\mathrm{Re}\, s < 1$ の場合にゼロとなる。¶

積分路 C_R での積分が $\mathrm{Re}\, s < 1$ の場合にゼロになる事実より, 積分路 C における積分は,

$$\int_C \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1}\mathrm{d}z = -\int_{C_R + C^{-1}} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1}\mathrm{d}z, \quad (\mathrm{Re}\, s < 1)$$

と書くことができる。ここで, C^{-1} は経路 C を逆方向にたどる経路を意味する。ところで, 被積分関数は $z = 2\pi in$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ で 1 位の極をもつ。その極における留数を計算すると,

$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_{z=2\pi in} \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} &= \lim_{z \to 2\pi in} \frac{(z - 2\pi in)\,(-z)^{s-1}}{e^z - 1} \\ &= \lim_{z \to 0} \frac{z\,(-z - 2\pi in)^{s-1}}{e^z - 1} = (2\pi)^{s-1} n^{s-1} e^{-\pi i(s-1)/2},\end{aligned}$$

となる。積分経路 $C_R + C^{-1}$ が $z = 0$ 以外の極をすべて取り囲んでいることに注目すれば, 留数定理によって,

$$\begin{aligned}\int_C \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1} \mathrm{d}z &= -2\pi i \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' (2\pi)^{s-1} n^{s-1} e^{-\pi i(s-1)/2} \\ &= -2\pi i \cdot (2\pi)^{s-1} \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1} e^{-\pi i(s-1)/2} \left(1 + e^{\pi i(s-1)}\right) \\ &= -2\pi i \cdot 2\,(2\pi)^{s-1} \cos \frac{\pi(s-1)}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1-s}} \\ &= -2\pi i \cdot 2\,(2\pi)^{s-1} \zeta(1-s) \sin \frac{\pi s}{2},\end{aligned}$$

が得られる。この数式変形の第 1 行目に含まれる Σ' は $n = 0$ を取り除いた総和を意味する。得られた結果を複素平面におけるゼータ関数の積分表示に代入すれば,

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \Gamma(1-s)\, \zeta(1-s)\, \sin \frac{\pi s}{2}, \quad (\operatorname{Re} s < 1) \tag{2.30}$$

なる関数等式が得られる。この関数等式は, 経路 C_R における積分がゼロであること, すなわち, $\operatorname{Re} s < 1$ の条件において導出された関係式であるので, (2.30) にはその条件を書いておいた。この条件を考慮すると, (2.30) は必ず正則であることがわかる。ここで, $s = -2m$ $(m = 1, 2, \ldots)$ とおいて負の偶数のゼータ関数を求めるならば, $\sin(-\pi m) = 0$ であり, $\Gamma(1 + 2m)$ も $\zeta(1 + 2m)$ も正則であるので, $\zeta(-2m) = 0$ であることが導かれる。これは, ゼータ関数の自明な零点を与える結果であり, 前節, および, 本節の負の整数に限定した場合の解析においても同一の性質が得られている。

次に, $s = -2m+1$ とおいて負の奇数のゼータ関数を求めてみよう。その場合, $\sin(-m + 1/2)\pi = (-1)^m$, $\Gamma(2m) = (2m-1)!$ であり, さらに,

$$\zeta(2m) = \frac{(-1)^{m-1} s^{2m-1} \pi^{2m} B_{2m}}{(2m)!},$$

であるので, $\zeta(-2m+1) = -B_{2m}/2m$ が得られる。これも前節で導いた結果と同じである。つまり, 図 2.3 に示す経路 C のように積分路を選び, 積分 (2.29) によってゼータ関数を定義すれば, ゼータ関数の定義域を複素数全体に拡張することができる。また, 積分路

C は必ずしも図 2.3 のように設定する必要はなく, 無限遠の実軸上から開始し, 正の実軸と積分路自身を交わることなく, また, 極の上を通過することなく, $z = 0$ を左回りに周回し, 無限遠の正の実軸上に戻る経路であればどのような経路でもよい。

解析接続によって, ゼータ関数の定義域を複素数全体に拡張することができた。実数変数に対してゼータ関数を図 2.4 にグラフ表示しておこう。既に明らかにしたように, ゼータ関数 $\zeta(z)$ は $z = 1$ で発散し, 負の偶数をゼロ点とする。 変数が正の無限大に向かって

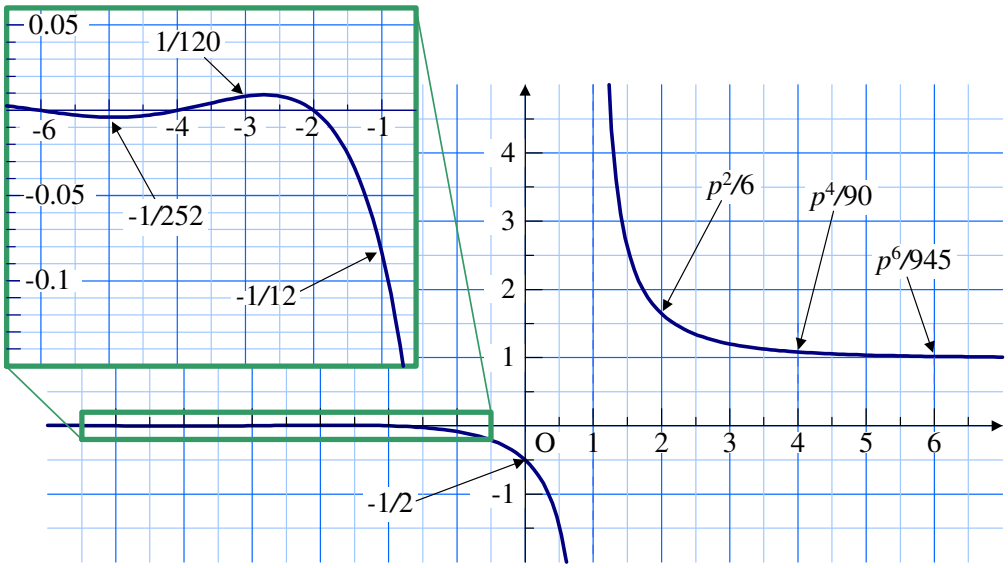


図 2.4: ゼータ関数

増加すると, ゼータ関数は 1 に近づく。一方, 変数が負の値になると, x 軸の上下を振動する。このグラフでは, 負の変数に対してゼータ関数はゼロに近い値となっているが, さらに変数が小さくなると, 振幅が階乗の速さで増大しながら振動する。変数が負の無限大に向かって減少したときゼータ関数の振幅が増大することは, $\zeta(-n) = -B_{n+1}/(n+1)$ から容易に理解できるだろう。

2.4.4　負整数のゼータ関数

本節では, 負整数のよるゼータ関数を強引にべき級数と関連付けてみよう。あまりにも強引であるので, 数学的な厳密さを伴っていないことを勘弁してほしい。厳密さを伴っていないが, 多少まじめに議論してみたいので本文に書くことにした。

負整数のゼータ関数は, その関数の元来の定義によると, $\zeta(-n) \equiv 1 + 2^n + 3^n + 4^n + \cdots$ である。このような収束しない級数でゼータ関数を定義することはナンセンスであるが, 本節はこのまま議論を進めていきたい。ここで, 負整数のゼータ関数に現れる各項を係数

とするべき級数 (通常母関数):

$$f_n(x) = \sum_k^{\infty} k^n x^{k-1} = 1 + 2^n x + 3^n x^2 + 4^n x^3 + \cdots \tag{2.31}$$

を考えてみよう。パラメータ n がゼロのとき, この関数は,

$$f_0(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots = \frac{1}{1-x},$$

であることがわかる。これから始めて, 一般の $f_n(x)$ を表記してみよう。次の関数 $f_1(x)$ は,

$$f_1(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \cdots$$

となることから, $f_0(x)$ の 1 階微分, すなわち, $f_1(x) = f_0'(x)$ であることがわかる。または, $f_1(x) = (xf_0(x))'$ と考えても同じ結果が得られる。この後すぐにわかるが, $f_1(x) = (xf_0(x))'$ と考えたほうが都合がよい。したがって,

$$f_1(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{x}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2},$$

が得られる。階数を増加させるには, $f_2(x) = (xf_1(x))'$ とすればよい。つまり, 2 階の関数は,

$$f_2(x) = 1 + 2^2 x + 3^2 x^2 + 4^2 x^3 + \cdots = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{x}{(1-x)^2} = \frac{1+x}{(1-x)^3},$$

が得られる。ここまでくれば, 一般的に階数を 1 階上昇させるには $f_{n+1}(x) = (xf_n(x))'$ とすればよいことは明らかだろう。とりあえず, 3 階の母関数を計算してみると,

$$f_3(x) = 1 + 2^3 x + 3^3 x^2 + 4^3 x^3 + \cdots = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{x\,(1+x)}{(1-x)^3} = \frac{1+4x+x^2}{(1-x)^4},$$

のようになる。これから階数を上昇させるには計算が楽ではないようだ。上で計算した 3 階までの母関数を見ると, $n-1$ 階の母関数は分子が x の n 次式で分母が $(1-x)^{n+2}$ と推測できる。つまり, $n-1$ 階の母関数は,

$$f_{n+1}(x) = \frac{1}{(1-x)^{n+2}} \sum_{k=0}^{n} A_{n,k}\, x^k, \tag{2.32}$$

と書ける。この式に対して, $f_n(x) = (xf_{n-1}(x))'$ の関係を用いて, 階数を上昇させると,

$$\begin{aligned} f_{n+2}(x) &= \frac{1}{(1-x)^{n+3}} \left[(1-x) \sum_{k=0}^{n} A_{nk} x^k + (n+2) \sum_{k=0}^{n} A_{nk} x^{k+1} \right] \\ &= \frac{1}{(1-x)^{n+3}} \left\{ A_{n0} + \sum_{k=0}^{n} \Big[(k+1) A_{nk} + (n-k+1) A_{n,k-1} \Big] x^k + A_{nn} x^{n+1} \right\}, \end{aligned}$$

のように計算できる。この計算結果における x^k の係数を $A_{n+1,k}$ とすると, その係数は,

$$A_{nk} = (n-k+1) A_{n-1,k-1} + (k+1) A_{n-1,k}, \quad A_{n0} = A_{nn} = 1, \tag{2.33}$$

なる漸化式で与えられる。この式のうち, $A_{n0} = A_{nn} = 1$ は, $f_1(x) = 1/(1-x)^2$ である事実から得られる $A_{00} = 1$ から派生している。上に示した漸化式を用いて 7 階の母関数まで計算すると, 表 2.5 が得られる。この表によると, 展開係数に左右の対称性:

$$A_{nk} = A_{n,n-k}, \tag{2.34}$$

が成立しているように見える。その対称性が n 階の展開係数で成立すると仮定して, $n+1$ 階の展開係数を計算すると,

$$\begin{aligned} A_{n+1,(n+1)-k} &= (k+1)A_{n,n-k} + (n+1-k+1)A_{n,n-k+1} \\ &= (k+1)A_{n,k} + ((n+1)-k+1)A_{n,k-1} = A_{n+1,k}, \end{aligned}$$

となるので, $n+1$ 階の展開係数も対称性が成立する。したがって, 展開係数はいかなる階数においても左右対称である。

表 2.5: 母関数の展開係数

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	4	1					
3	1	11	11	1				
4	1	26	66	26	1			
5	1	57	302	302	57	1		
6	1	120	1191	2416	1191	120	1	
7	1	247	4293	15619	15619	4293	247	1

展開係数 A_{nk} は, k について和をとると $(n+1)!$ に等しい事実がある。この事実は, 次のように数式展開すると証明できる。展開係数 A_{nk} の総和を, 漸化式に注意して変形すると,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} A_{nk} &= A_{n0} + \sum_{k=1}^{n-1} A_{nk} + A_{nn} \\ &= A_{n-1,0} + \sum_{k=1}^{n-1} \Big[(n-k+1)A_{n-1,k-1} + (k+1)A_{n-1,k}\Big] + A_{n-1,n-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)A_{n-1,k} + \sum_{k=1}^{n}(n-k+1)A_{n-1,k-1} = (n+1)\sum_{k=0}^{n-1} A_{n-1,k}, \end{aligned}$$

のように, $A_{n-1,k}$ の総和の $n+1$ 倍になっている。第 0 階の展開係数 A_{0k} の k についての和が 1 であることから,

$$\sum_{k=0}^{n} A_{nk} = (n+1)! \tag{2.35}$$

であることが導かれる。

展開係数 A_{nk} の性質がいくつかわかったので, $f_n(x)$ とゼータ関数の関係を調べよう。単純に考えれば, $x=1$ とすれば,

$$f_n(1) = 1 + 2^n + 3^n + 4^n + \cdots$$

となるので, ゼータ関数 $\zeta(-n)$ そのものであるが, 取り扱うには注意が必要である。なぜなら,

$$f_n(x) = \frac{1}{(1-x)^{n+1}} \sum_{k=0}^{n-1} A_{n-1,k} x^k,$$

であるので, $x = 1$ では $f_n(x)$ が発散するからである。発散を回避するため, 代わりに $x=-1$ を代入しよう。そのときの関数値を $\varphi(-n) \equiv f_n(-1)$ と定義すると,

$$\varphi(-n) = 1 - 2^n + 3^n - 4^n + \cdots = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k A_{n-1,k},$$

のように書くことができる。さらに, $\varphi(-n) = (1-2^{n+1})\zeta(-n)$ であることに注意すれば,

$$\zeta(-n) = \frac{\varphi(-n)}{1-2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}(1-2^{n+1})} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k A_{n-1,k},$$

が導出される。展開係数 A_{nk} が k についての対称性があることから, n が偶数 $(n=2m)$ のとき, この式は確実にゼロになるので, $\zeta(-2m)=0$ となる。これは, 前に導出した結果と合致している。さらに, 表 2.5 を上の式に適用すると,

$$\zeta(-1) = -\frac{1}{12}, \quad \zeta(-3) = \frac{1}{120}, \quad \zeta(-5) = -\frac{1}{252},$$
$$\zeta(-7) = \frac{1}{240}, \quad \zeta(-9) = -\frac{1}{132},$$

が得られる。これも, 前に解析接続によって導出した結果 $\zeta(-2m+1) = B_{2m}/2m$ と合致する。また, $\zeta(0)$ については,

$$\varphi(0) = f_0(-1) = \left.\frac{1}{1-x}\right|_{x=-1} = \frac{1}{2},$$

によって $\zeta(0) = -1/2$ を導くことができる。これも解析接続によって導出した結果と合致する。

本節で展開した手法は, オイラーがゼータ関数の拡張に用いた方法である。級数の収束性を無視した方法であるが, 解析接続を用いて拡張した結果と一致している。本節で新たに検証したゼータ関数を, 元来の定義形式と併せて値を記述すると,

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \cdots = -1/2,$$
$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots = -1/12,$$

$$
\begin{aligned}
&1+2^2+3^2+4^2+5^2+\cdots=0,\\
&1+2^3+3^3+4^3+5^3+\cdots=1/120,\\
&1+2^4+3^4+4^4+5^4+\cdots=0,\\
&1+2^5+3^5+4^5+5^5+\cdots=-1/252,
\end{aligned}
$$

のようになる。しかし, 本当にこれらの左辺と右辺が等号で結ばれると考えてはいけない。読者が気づいているように, この関係式を得るまでの数式変形に, 非常に怪しい操作を実行しているのだ。例えば, $\zeta(-1)$ の場合, 数学的テクニックとして $1+2x+3x^2+4x^3+\cdots=1/(1-x)$ の関係を用いるのはよいとして, $x=1$ ではなく $x=-1$ とするのが怪しいのである。確かに, $x=1$ では左辺の級数が収束しない。かと言って, $x=-1$ でも収束するわけではない。級数 $1+2x+3x^2+4x^3+\cdots$ は $|x|<1$ が収束条件である。つまり, この級数が関数として有効な定義域は $|x|<1$ である。そんな収束条件が厳しい級数を, 定義域が複素数全体に渡るように解析接続した関数が $1/(1-x)$ なのである。その関数は, $x=1$ を極とする (つまり, $x=1$ で正則ではない) ため $x=1$ でなく $x=-1$ を用いて議論したのである。つまり, 数式変形の途中から議論の対象は $1+2x+3x^2+4x^3+\cdots$ でなく, それを解析接続した $1/(1-x)$ にすり替わっていたのである。したがって, 最終的に得られる関係式の左辺は $\zeta(-1)$ であり, 決して $1+2+3+4+\cdots$ ではないのである。言い換えると, 結果として得られる関係式は, $\zeta(-1)=-1/12$ であることに間違いないのだが, $1+2+3+4+\cdots=1/12$ は正しくない。そのような, 収束条件を満たさない数式と, それを解析接続した関数とを等号で結ぶことはかなり乱暴なことである。

不思議なことに, 物理学の世界で上記の不可思議な数式が成立すると解釈できることがある。その例として, カシミール効果がある。カシミール効果とは, 帯電していない 2 枚の金属板を微小距離隔てて平行配置したときに, それらの間に引力が発生する現象である。その現象は, 量子論的なゼロ点エネルギーに起因する。あらゆる可能な組み合わせについてゼロ点エネルギーが総和が $1+2^3+3^3+4^3+\cdots$ のように 3 乗数の無限和となる。この無限和を $\zeta(-3)=1/120$ で置き換えて金属板間に作用する力を計算すると, 実験結果と一致する[1]。

[1] この現象を紹介した文献は多いのだが, ゼータ関数との関係を説明している文献として, 黒川信重, “オイラー探検 無限大の滝と 12 連峰,” 丸善, 2012, が挙げられる。