

# 第1章 相対性原理

アインシュタインの相対性理論では、しばしば、ある物理現象に「相対性が成立する」、または、「相対的である」という記述がみられる。そもそも、相対性とは何であろうか？本章ではアインシュタインの相対性理論を取り扱う前の段階として、相対性とは何かを説明し、相対性が成立する場合の数学的記述を紹介する。数学記述によって、ニュートン力学が電磁気学を取り扱う際に、相対性が破綻することを紹介する。さらに、電磁気学において相対性が成立するような物理学の修正を考察する。

## 1.1 相対運動

相対性について説明する前に相対運動について考えよう。相対運動とは、絶対的な運動ではなく、ある観測者から見た運動状態である。例えば、走行中の自動車から見ると、対向車が大きな速度で後ろに走り抜けていくように見えるのが相対運動に相当する。

### 1.1.1 相対速度

走行する自動車から見たとき、街路樹は後ろに移動するように見え、同じ方向に走行する自動車との距離がゆっくりと変化するのに対し、対向車は一瞬で後ろに移動する。その動きを議論するには相対速度という概念を用いると便利である。

地上を基準にして考え、 $x$  軸上に道路が直線的に伸びているとする。自動車 A が正の方向に速さ  $v$  で、自動車 B が同じ方向に速さ  $u$  で運動している。自動車 A から見ると、自動車 B の速度が  $u - v$  であると考えたのではないだろうか。本当にそうなのか？それを検証するため、自動車の位置を考えよう。時刻  $t = 0$  のとき、自動車 A が  $x = 0$  の位置に、自動車 B が  $x = x_0$  の位置に存在するならば、任意の時刻において、自動車 A と B は、それぞれ、

$$x_A = vt, \quad x_B = ut + x_0,$$

となる。自動車 B と自動車 A の位置の差は、

$$x_B - x_A = (u - v)t + x_0,$$

である。この数式が正であれば自動車 B が自動車 A より前に存在する。言い換えると、自動車 A から見ると、自動車 B が距離  $(u - v)t + x_0$  だけ前方に存在する。その距離は単位時間あたり、 $u - v$  ずつ増加する。つまり、自動車 A から見ると自動車 B は単位時間あたり距離  $u - v$  だけ前方に移動している。これは、自動車 B が速度  $u - v$  で前進しているように見えることを意味する。確かに自動車 A から見た自動車 B の速度が  $u - v$  であることが示された。自動車 A から見た自動車 B の速度は、自動車 A に対する相対速度と呼ばれる。

具体的な速度を代入してみよう。自動車 A が 40 km/h で運動し、自動車 B が 60 km/h で同じ方向に運動しているとしよう。その場合、自動車 A から見ると、自動車 B は 20 km/h で運動しているように見える。次に、自動車 B が逆方向に 60 km/h で運動している場合を考えよう。この例では自動車 B の速度を  $-60$  km/h と考えればよい。その場合、相対速度が  $-100$  km/h となるので、自動車 A から見ると自動車 B は 100 km/h で後方に移動しているように見えるだろう。

ここまで述べた理屈で言うと、自分自身の相対速度がゼロになるはずであるから、自分自身を見ると常に静止しているように見えるはずである。しかし、それは奇妙に思えるかもしれない。計算では相対速度がゼロになるのだが、車で移動をしているとき、自分が動いているのか静止しているのかは、明確に区別できる。なぜ区別できるかという、外の景色と比較しているからであり、走行中に多少なりとも路面の凹凸を車輪を通して感じているからである。

次のような体験をしたことはないだろうか？ 駅で停止中の電車に乗っていると。隣のホームにも電車が停止していて、観測者は窓越しにその電車を見ている。そのうち、隣の電車がゆっくりと動き始めた。そのとき、動いているのは自分ではないかと錯覚したことはないだろうか？ このような錯覚を感じるのは、視界に相手の電車以外のものが存在しない場合に限られる。少なくとも、地面や建造物が見えていれば、そのような錯覚はないだろう。我々は、速度という物理量を、地面を基準に考えるからである。基準となる地面が見えなくなると、自分が動いているかどうかを誤ることがあるのだ。例えば、宇宙空間に出たらどうであろう？ 自分が動いているかどうかを知るすべがないのではないか？ そもそも、地球でさえ約 30 km/h という高速度で太陽を公転しているではないか。その運動を意識したことはないだろう。そう考えると、自分が絶対的に動いていると判定することはできず、せいぜい、何かに対して、どれくらいの相対速度で動いているとしか表現できないのだ。

### 1.1.2 ガリレイ変換

前項で述べた相対速度の概念はガリレイが考察していた。それを定式化し、ガリレイ変換と呼ばれる座標変換が導かれる。その座標変換は、ある基準の座標系から、運動してい

る観測者の座標系へ変換する数式を与える。

前項では、 $x$  軸に沿って速度  $v$  で走行する自動車と、速度  $u$  で走行する自動車を考えた。そのとき、自動車 A から見た自動車 B の位置が、

$$x_B - x_A = (u - v)t + x_0,$$

であることを前項で述べた。ここで、ある基準系 (地面) から見た自動車 B の位置を  $x$ 、自動車 A から見た座標を  $x'$  なる記号で記述しよう。すると、

$$x = ut + x_0, \quad x' = (u - v)t + x_0,$$

であるので、 $u$  を消去すると、

$$x' = x - vt, \tag{1.1}$$

となる。この数式は**ガリレイ変換**と呼ばれる。この数式を時間  $t$  で微分すると、相対速度を与える数式:

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - v,$$

が得られる。前項では  $dx/dt = u$  であったので、前項での記号を用いると、相対速度が確かに  $u - v$  であることが再確認できる。ガリレイ変換はさらに一般化された形式になっており、自動車 B の速度が一定速度でなくても、対象物の瞬時速度と自分の速度の差が自分から見たときの相対速度であることを表している。

ガリレイ変換 (1.1) は、3次元カルテシアン座標のベクトル成分  $[x, y, z]$  についても同様である。速度  $v$  が  $x$  軸方向の運動とすると、 $y$  と  $z$  に速度  $v$  が影響しないと考えられるので、ガリレイ変換は、

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \tag{1.2}$$

のように表現できる。この変換式を時間  $t$  について微分すると、

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - v, \quad \frac{dy'}{dt} = \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz'}{dt} = \frac{dz}{dt},$$

となるので、相対速度も  $x$  軸方向にしか影響しないことが導かれる。例えば、地上に静止する観測者と東に速度  $v$  で移動する自動車 A に乗った観測者が、自動車 B を観測したとする。地上の観測者から見て、自動車 B の速度が  $[u_x, u_y]$  だったとする。なお、 $u_x$  と  $u_y$  は、それぞれ、東向きの速度成分と北向きの速度成分である。これを自動車 A から見ると、 $[u_x - v, u_y]$  となるのである。これは、観測者が変わると、観測される速度の方向が変化することを意味している。

**放物運動** 地上で物体を投げ上げると、地球の重力に引かれて、途中で軌跡が折り返し地上に落下する。その運動を考えよう。高さを表す座標として  $z$  を用い、地上で  $z = 0$  とし、鉛直上方を正とする。そのとき、投げ出された物体の高さは、

$$z = u_0 t - \frac{1}{2} g t^2,$$

なる数式で計算できる。ここで、 $u_0$  は投げ上げられた物体の初速度であり、 $g$  は重力加速度 ( $\approx 9.8 \text{ m/s}^2$ ) である。その物体が鉛直上方に投げ上げられたと仮定すると、水平位置は時間に依存せず  $x = y = 0$  である。初速度  $20 \text{ m/s}$  で鉛直方向に発射した物体を  $0.1$  秒間隔でプロットすると、図 1.1 (a) のようになる。それに対して、 $x$  軸方向に速度  $-v$  で運動する観測者から見た場合、ガリレイ変換によって発射された物体の座標は、

$$x' = vt, \quad z' = u_0 t - \frac{1}{2} g t^2,$$

となるはずだ。なお、観測者の座標系は、原点が  $t$  のとき地上から見た原点と一致するように選ばれているとした。地上に対する観測者の速度を  $-10 \text{ m/s}$  とすると、観測される物体の軌跡は図 1.1 (b) に示す曲線を描く。その軌跡は、放物線と呼ばれる 2 次曲線を描く。

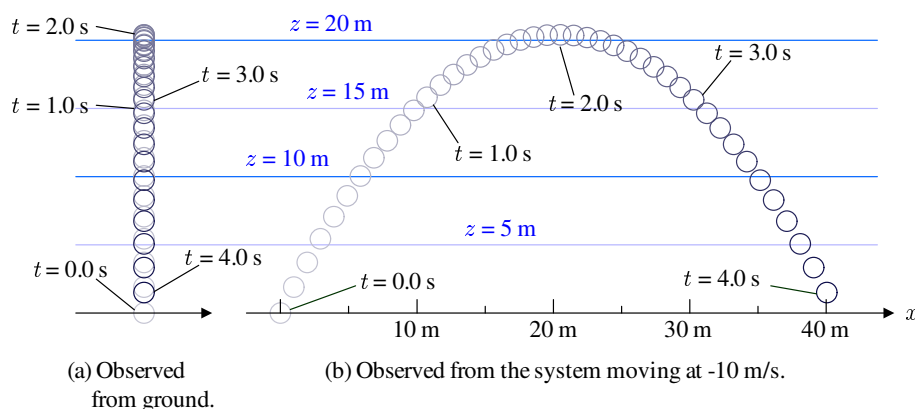


図 1.1: 観測者と放物運動

例えば、地上で真上に投げ上げたボールを走行中の電車から見ると、あたかも水平方向に  $10 \text{ m/s}$ 、鉛直方向に  $20 \text{ m/s}$  の斜めに投げ出されたように見え、その軌跡は図 1.1 (b) に示す放物線を描くのである。

## 1.2 相対性と慣性系

相対性という言葉が使われるのはアインシュタインの理論が最初ではない。相対性はガリレイの相対性原理で既に現れている。相対性が成立するとは、相対性原理が成立するという意味である。なお、ガリレイの相対性原理は、「ある慣性系に対して一定の相対速度

で直線運動をしている系も慣性系となり、すべての力学法則は、これらの系で同一の形式で記述できる」ことを主張している。

非常にわかりづらい記述なので、用語を説明しよう。慣性系とは加速度をもたない系である。言い換えると、等速度で運動を続ける観測者が見た世界である。ガリレイの相対性原理では、ある特定の慣性系との間でガリレイ変換で関係づけられる系を慣性系と呼ぶ。ガリレイ変換は前節で紹介した座標変換である。慣性系が、上で述べたように等速度で運動する観測者から見た世界であるので、ガリレイ変換は等速度で運動する観測者の世界を別の速度で運動する観測者の世界に置き換える座標変換である。

慣性系は、力を受けない観測者が見た世界である、と言い換えることもできる。運動する物体は力を受けない限り、永遠に一定速度で運動を続ける。地面を転がるボールが減速して、やがて静止するのは、地面から摩擦力を受けているからである。一方、氷上を滑る物体がほとんど速度が低下しないのは、摩擦力が小さいからである。そもそも、摩擦力のような力が作用しなければ、運動する物体は速度を変えないのである。

力学法則が同一の形式で記述できるとは、ある慣性系で成立する力学の基本方程式が、別の慣性系でも同一の形式で書けることを意味する。力学の基本方程式が同一形式で書けるということは、その慣性系とともに運動する観測者は、自分の運動速度を特定できないことを意味している。ましてや、自分が運動しているかどうか分からないのだ。等速度で運動を続ける観測者は、上で述べたように力を受けていないので、その観測者は自分が運動しているのか、静止しているのかを判別できない。例えば、地球は自転をしながら約 30 km/s の速さで太陽の周りを公転している。その太陽でさえ、約 250 km/s の速さで銀河系を周回している。にも関わらず、中世まで、地球が宇宙の中心に静止し、太陽、月、その他の天体が地球の周りを周回するという、いわゆる天動説が信じられてきた。そもそも、宇宙には静止状態を判別するための基準がなく、運動とはある座標系、または、観測者に対する相対的な位置の変化のことであるので、天動説のような誤解が宗教と結びつき、1,500 年もの間、存続したのである。宇宙唯一の絶対静止系の存在を否定し、相対運動によって物理現象を説明するための原理を相対性原理という。

### 1.3 ニュートン力学の基本原則

ニュートン力学は、微分方程式という数学的手法によって、宇宙全体の物理現象を説明することに成功した力学理論である。ニュートン力学は三つの原理: 慣性の法則、運動方程式、作用反作用の法則に基づき、機械や天体などの運動する物体に関する物理現象を十分な精度で説明することに成功している。ニュートン力学の根底に存在する三つの原理は次のように説明される。

**慣性の法則** あらゆる物体は現在の速度を保とうとする。ある観測者に対して静止している物体は、力を加えない限り静止を続ける。運動している物体は、力を加えない限りその速度を一定に保つ。例えば、地上に対して 900 km/h で飛行する航空機でも、客室乗務員が地上と同じように紙コップに飲み物を注ぐことができるのは、飲み物も航空機とともに地上に対して 900 km/h で運動しているからである。航空機に乗っているものから見ると、トレイも飲み物も航空機に対して静止しているので、地上から見た速度は自分の行動とは無関係なのだ。

**運動方程式** 力を受けない物体が一定の速度で運動を持続することは、力を受けた物体は速度が変化することを意味する。物体の速度変化を記述するには、単位時間あたりの速度変化を用いると便利である。単位時間あたりの速度変化は加速度と呼ばれる。質量  $m$  の物体に力  $\mathbf{K}$  を加えたとき、物体は運動方程式:

$$\mathbf{K} = m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}, \quad (1.3)$$

にしたがって運動する。ここで、 $\mathbf{r}$  は物体の位置ベクトルである。位置ベクトルを時間について微分した導関数は速度である。速度をさらに時間について微分した導関数が加速度である。運動方程式によると、大きな力を与えると大きな加速度が得られる。また、同じ力を与えても、質量が大きな物体は加速しにくい。

**作用反作用の法則** ある物体に力を作用させたとき、その物体から力の源に対して逆方向に同じ大きさの力が作用する。この法則は、互いに接する物体間であっても、重力や電磁気力のような遠隔力であっても成立する。例えば、図 1.2 (a) のように、地面に置いた箱を考えよう。箱には地球から重力が作用し、その重力で地面を押す。それに反して地面は同じ大きさの垂直抗力 (normal reaction) を箱に作用させる。その結果、力が釣り合い、箱は地面にめり込むことも、地面から弾かれることもない。図 1.2 (b) のように二つの天体間に

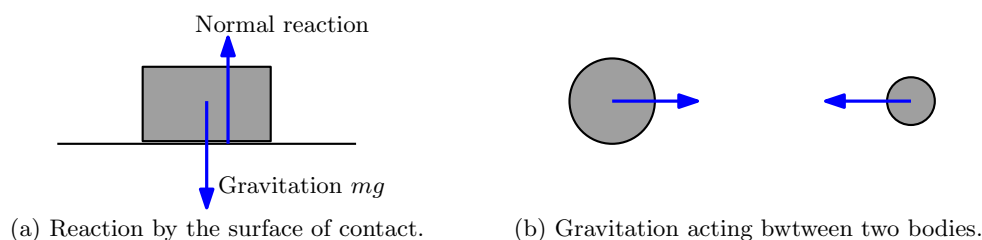


図 1.2: 作用反作用の法則の例

作用する重力も同様である。例えば、月が地球から受ける重力と同じ力で地球も月から重力を受けている。月はその重力の影響で地球の周りを公転している。地球の軌道も月による重力で揺動するが地球の質量が大きいため、その影響は小さい。しかし、月による重力は潮の干満という形で、地球に明確に作用している。

### 1.3.1 座標変換に対する不変性

ニュートン力学はこれらの基本原理から宇宙すべての物理現象を説明する力学理論である。言い換えれば、これらの基本原理は宇宙にいるいかなる観測者から見ても常に成立しなければならない。いかなる観測者から見た物理法則は、数学が得意とする一般化した形式で記述すればよい。具体的には、図 1.3 に示される平行移動と座標回転を適用して、物理法則の記述がどのように変化するか調べるのである。

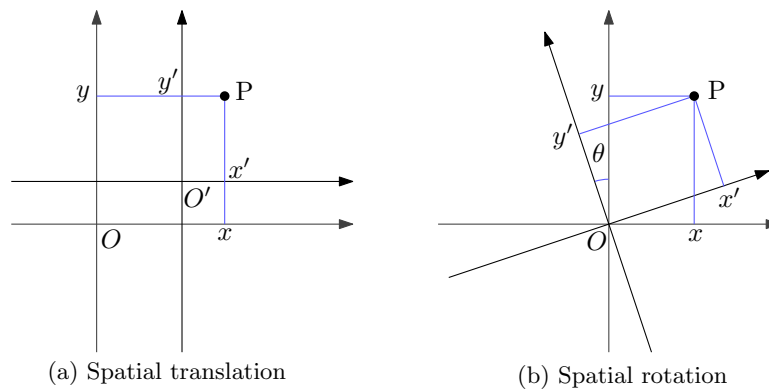


図 1.3: 空間の平行移動と回転

平行移動は観測者の位置を別の場所に置き換えたことに対応する。例えば、平行移動で物理法則の形が変わらないということは、東京で成立する物理法則が札幌や福岡でも成立することを意味する。一方、座標回転は観測者の視線を置き換えたことに対応する。例えば、回転によって物理法則の形が変わらないということは、北を向いている観測者にとって成立する物理法則は南や東を向いている観測者にとっても成立することを意味する。これを拡大解釈すると、ある場所で成立する物理法則は、宇宙の任意の場所でどの方向を向いても成立するという事だ。これを一般的に表すには数学を用いるのが便利である。一般的な座標の平行移動と回転を施しても物理の基本方程式が変化しなければ、物理法則が宇宙の任意の場所で、任意の方向を向いても成立するといえるのだ。ニュートン力学における基本方程式は、先ほど紹介した運動方程式である。運動方程式が平行移動や回転によって変化しないことを証明すればよい。

**平行移動** 図 1.3 (a) のような平行移動を考えよう。対象とする位置を  $[x, y, z]$  で表す座標系を K 系とし、平行移動した座標系を K' 系としよう。K 系から K' 系への座標変換は、

$$x' = x - \xi, \quad y' = y - \eta, \quad z' = dz - \zeta, \quad (1.4)$$

であるとする。ここで用いた  $\xi, \eta, \zeta$  が定数であるなら、K 系と K' 系の関係は 3 次元空間における平行移動である。これらの 2 つの座標系において運動方程式を調べることは、隔

てた場所にいる2人の観測者が観測する物理現象を比較することと同じである。座標変換(1.4)の微分:

$$dx' = dx, \quad dy' = dy, \quad dz' = dz,$$

を運動方程式(1.3)に代入し、 $\mathbf{K}' \equiv \mathbf{K}$ とおくと、

$$\mathbf{K}' = m \frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2},$$

が得られる。ただし、 $\mathbf{r}' = [x', y', z']$ とおいた。また、 $\mathbf{K}'$ はK'系で観測される力を意味する。K系を任意距離だけ平行移動したK'系において、運動方程式が形を変えずに成立するので、運動方程式は平行移動に対して不変、すなわち、宇宙の任意の場所でニュートンの運動方程式が成り立つことを意味する。

**座標回転** 図1.3(b)に示す座標回転についての不変性を検証してみよう。この図に記載されていないz軸は、紙面の裏面から手前に向かって伸びているとする。この座標回転は、z軸を中心にしてxy平面を右ネジの方向(この図では左回り)に角度 $\theta$ だけ回転させることによって、座標系K'を得る変換である。そのとき、各座標成分は、

$$x' = x \cos \theta + y \sin \theta, \quad y' = -x \sin \theta + y \cos \theta, \quad z' = z, \quad (1.5)$$

のように変換される。これを(1.3)に代入すると、

$$\begin{aligned} m \left( \cos \theta \frac{d^2 x'}{dt^2} \sin \theta \frac{d^2 y'}{dt^2} \right) &= K_x, \\ m \left( \sin \theta \frac{d^2 x'}{dt^2} + \cos \theta \frac{d^2 y'}{dt^2} \right) &= K_y, \\ m \frac{d^2 z'}{dt^2} &= K_z, \end{aligned}$$

が得られる。これらの方程式は、

$$m \frac{d^2 x'}{dt^2} = K_x \cos \theta + K_y \sin \theta, \quad m \frac{d^2 y'}{dt^2} = -K_z \sin \theta + K_x \sin \theta, \quad m \frac{d^2 z'}{dt^2} = K_z,$$

のように書き換えることもできるので、力のベクトル $\mathbf{K}$ が、

$$K'_x = K_x \cos \theta + K_y \sin \theta, \quad K'_y = -K_z \sin \theta + K_x \sin \theta, \quad K'_z = K_z, \quad (1.6)$$

のように変換されると思えば、K'系におけるニュートンの運動方程式が

$$\mathbf{K}' = m \frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2},$$

となっていると言える。この考察結果は非常に興味深い。なぜなら、(1.6)はベクトル $\mathbf{K}$ を反時計回りに $-\theta$ だけ回転した結果と一致するからだ。そもそも、K'系はK系を反時計



回りに $\theta$ だけ回転した座標系であった。そのため、 $K'$ 系から見たベクトルは、 $K$ 系から見たベクトルを反時計回りに $-\theta$ だけ回転した結果と一致するのである。

上記の考察は、相対性理論を学ぶには非常に大切な要素である。相対性理論は異なる観測者から見たときの物理現象を記述するための手段を与える物理学である。その記述には、特殊相対性理論の場合、座標変換しても物理現象が同一形式であることを要請するのだ。その要請から得られる方程式が、異なる観測者が見た物理現象というわけである。今回の例では、反時計回りに $\theta$ だけ回転した座標系から見ると、ベクトルは $-\theta$ だけ回転したベクトルとして観測されることが導き出されたのだ。

さらに、相対性理論において重要な共変性ということについて説明しよう。変換(1.6)と座標変換(1.5)を比較すると、まったく同じ形の変換であることがわかる。このように座標とまったく同じ変換をされることは**共変**と呼ばれる。共変変換の例は、日常において簡単に確認することができる。例えば、南を向いたときに太陽は天球上を左から右へ移動しているように見えるが、北を向くと、太陽は右から左へ移動しているように見える。このように観測されるのは、速度ベクトル $d\mathbf{r}/dt$ が座標回転に対して共変だからである。そのような共変性を受け入れた上で、ニュートンの運動方程式は回転運動に対して不変(本当は共変というべき)である。

### 1.3.2 ラプラス演算子の不変性

平行移動と座標回転という変換は、任意の場所におかれた微小ベクトル $[dx, dy, dz]$ の長さを不変に保つ<sup>1</sup>特徴がある。その計量の不変性は、座標変換(1.4)と(1.5)を微分すればすぐにわかる。さらに、その特徴は物理学において面白い性質:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2}, \quad (1.7)$$

と等価である。この証明は容易であるので、ここでは省略する。数式(1.7)の左辺と右辺は、それぞれ、 $K$ 系と $K'$ 系におけるラプラス演算子である。ラプラス演算子は物理学では、しばしば現れる。その一例として、ニュートンの万有引力の法則があげられる。質量 $M$ の質点 $P$ が $K$ 系の原点にあり、質量 $m$ の質点 $A$ が位置 $\mathbf{r}$ に存在しているとする。このとき、万有引力定数を $G$ とすれば、質点 $A$ に作用する重力は

$$\mathbf{K} = -\frac{GMm}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r},$$

<sup>1</sup>幾何学的には、この表現は正しくない。計量が変わらないという表現が正しい。

となる。これが万有引力の法則である。この法則に関して、質量  $M$  を質点ではなく、密度  $\rho$  で空間に分布する質量として拡張すると、 $\mathbf{r}$  に存在する質点 A に作用する重力は、

$$\mathbf{K} = -Gm \int \frac{\rho(\mathbf{r}_p)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_p|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_p}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_p|} d^3\mathbf{r}_p,$$

のようになる。この方程式は、位置  $\mathbf{r}_p$  に存在する密度  $\rho(\mathbf{r}_p)$  による重力への寄与を重ね合わせた表現になっている。この方程式はガウスの発散の定理によって、

$$\nabla \cdot \mathbf{K} = -4\pi G m \rho,$$

と書き換えることができる。さらに、 $\mathbf{K} \equiv -m \nabla \phi$  なる重力ポテンシャル  $\phi$  を導入すれば、万有引力の法則は、

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho,$$

なる方程式に変形される。説明が長くなったが、万有引力の法則はラプラス演算子を用いた式で記述できる。しかも、平行移動、座標回転といった座標変換に対してラプラス演算子は不変であるということなので、K 系を平行移動、または、座標回転して得られる K' 系においても、万有引力の法則が形を変えずに成立するということになる。

### 1.3.3 ガリレイ変換に対する不変性

相対速度を説明した際に、運動する観測者から見た座標系はガリレイ変換で計算できることを示した。また、ある慣性系に対してガリレイ変換で関係づけられる座標系が慣性系であることも前に述べた。これを逆の立場で記述すると、二つの慣性系の中の座標変換には、ガリレイ変換と呼ばれる変換があるということである。二つの慣性系の中の任意の座標変換がガリレイ変換であるわけではないが、ガリレイ変換には物理学を記述するために重要な性質がある。

ある慣性系 K に対して  $x$  軸方向に速度  $v$  で運動している慣性系 K' について考えよう。これは、電車に乗ったときに窓から眺めた景色を想像すればよい。例えば、60 km/h で移動する電車の窓から見たとき、地上の木や建物は、60 km/h で後ろに流れていくように見える。これを K' 系から見たときの座標変換として表現すると、

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t, \quad (1.8)$$

のようになる。ガリレイ変換では、座標変換しても時間の尺度が変わらないので、わざわざ、 $t' = t$  などと書くことはないのだが、今後のためにあえて書いておいた。まず、ガリレイ変換 (1.8) を微分すると、

$$dx' = dx - v dt, \quad dy' = dy, \quad dz' = dz, \quad dt' = dt, \quad (1.9)$$

が得られる。この関係式から、空間座標を時間座標について微分した量を書くと、

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx}{dt} - v, \quad \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{dt},$$

となる。例えば、東に 40 km/h で走る自動車を 60 km/h で追い抜く電車から見たとき、その自動車は 20 km/h で西に移動しているように見える。この式はそのような経験的な事実と一致する。この式をもう一度、時間について微分すると、

$$\frac{d^2x'}{dt'^2} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{d^2y'}{dt'^2} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{d^2z'}{dt'^2} = \frac{d^2z}{dt^2},$$

となるので、運動方程式 (1.3) は、

$$\mathbf{K}' = m \frac{d^2\mathbf{r}'}{dt'^2},$$

が成り立つ。ただし、 $\mathbf{K}' = \mathbf{K}$  である。つまり、ニュートンの運動方程式はガリレイ変換に対して不変である。言い換えると、観測者が等速度運動をしている限り、どのような観測者に対しても、ニュートンの運動方程式が成り立っている。

一方、ニュートンの万有引力の法則はガリレイ変換に対してどのように振舞うだろうか？ 解析学の公式を用いて偏微分演算子を計算すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 x'}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 t'}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} = \frac{\partial^2}{\partial x'^2}, \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2}{\partial y'^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial z'^2}, \end{aligned}$$

となるので、ラプラス演算子が不変となることは明らかであろう。つまり、ニュートンの万有引力の法則もガリレイ変換に対して不変である。また、微小ベクトル  $[dx, dy, dz]$  の長さが不変となるような座標変換をすれば、ラプラス演算子も不変になることは前節で述べた。ガリレイ変換においては、 $dt = 0$  とすれば微小ベクトル  $[dx, dy, dz]$  の長さが不変となる。つまり、ラプラス演算子に含まれない座標  $t$  が一定のもとでは、微小ベクトル  $[dx, dy, dz]$  の長さが不変となり、前節で述べた性質が成り立っている。つまり、万有引力の法則がガリレイ変換について不変になるためには、条件があるということである。その条件とは、 $dt = 0$  であるわけだが、それは、万有引力の法則がたとえ遠方の要因であっても瞬時に伝搬し、反映されるということである。言い換えると、重力の作用は無限大の速度で伝わるのが、ガリレイ変換について万有引力の法則が不変となるための条件である<sup>2</sup>。

<sup>2</sup>確かに、ニュートン力学では重力は速度無限大で伝搬することが前提になっている。しかし、後に議論するように無限大の速度での情報伝搬は不可能である。そのため、重力理論は後に (一般相対性理論によって) 書き換えられることになる。

## 1.4 マクスウェルの方程式の不変性

ニュートンの運動方程式で示されたような不変性が電磁気学においても成り立つか調べてみよう。電磁気学の基本法則はマクスウェル (Maxwell) の方程式によって記述される。ある慣性系  $K$  において、電場  $\mathbf{E}$  と磁束密度  $\mathbf{B}$  があり、それらに対応して電束密度  $\mathbf{D}$ 、磁場  $\mathbf{H}$  が存在しているとする。マクスウェルの方程式によると、これらの物理量は、

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{j}, \quad (1.10a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (1.10b)$$

なる関係にしたがう。ここで、 $\rho$  と  $\mathbf{j}$  は、それぞれ、電荷密度と電流密度である。まず、(1.10a) の左側はガウス (Gauss) の法則、右側はアンペール (Ampère) の法則である。もう一方、(1.10b) の左側は磁束保存の法則、右側はファラデー (Faraday) の法則である。電磁気学の不変性を調べるには、前節と同様、座標変換の結果として方程式の形が変わらないことを検証すればよい。マクスウェルの方程式に直接座標変換を適用してもよいのだが、それよりも簡単に考察する方法を紹介する。それには、電場  $\mathbf{E}$  や磁束密度  $\mathbf{B}$  を直接あつかうかわりにベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  と静電ポテンシャル<sup>3</sup>  $\phi$  を導入する。ベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  は、

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (1.11)$$

となるように定義された量である。この定義式は磁束保存の法則からの要請を意味している。さらに、この定義式をファラデーの法則に代入すると、

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (1.12)$$

であることがわかる。ここで導入した  $\phi$  は、任意の勾配ベクトルの回転が必ずゼロであることから追加される自由度である。この追加された  $\phi$  は、面白いことに、静電ポテンシャルと一致している。これらの関係をガウスの法則、および、アンペールの法則に代入すると、

$$\nabla^2 \phi + \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\rho}{\varepsilon}, \quad (1.13a)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \nabla \left( \nabla \cdot \mathbf{A} + \varepsilon\mu \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = -\mu \mathbf{j}, \quad (1.13b)$$

が得られる。この式の導出に関して、誘電率  $\varepsilon$  と透磁率  $\mu$  によって、 $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ 、 $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$  と表されることを利用した。先ほど、電場  $\mathbf{E}$  の関係式において自由度  $\phi$  を追加したが、実は、

<sup>3</sup>ベクトルポテンシャルに対して、こちらはスカラポテンシャルと呼びたいところだが、後に示すように、この量はスカラとはいえないので静電ポテンシャルと呼ぶことにする。

磁束密度  $\mathbf{B}$  の関係式についてもベクトルポテンシャルに自由度をもたせることができる。具体的に言うと、任意関数  $\chi$  を用いて、

$$\phi_\chi = \phi + \frac{\partial\chi}{\partial t}, \quad \mathbf{A}_\chi = \mathbf{A} - \nabla\chi,$$

を静電ポテンシャル、ベクトルポテンシャルとして選んだとしても、電場  $\mathbf{E}$  と磁束密度  $\mathbf{B}$  はまったく変わらない。これらのポテンシャルが自由度をもつのは、ポテンシャルが場の積分形であることため、積分定数が自由度となるからである。この積分定数を任意に選んでも実際に観測される電場や磁束密度は変化しない。例えば、ローレンツ条件と呼ばれる条件:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \varepsilon\mu \frac{\partial\phi}{\partial t} = 0, \quad (1.14)$$

を満たすような  $\chi$  を定めると都合がよい。都合がよいというのは、(1.13a) と (1.13b) が

$$\nabla^2\phi - \varepsilon\mu \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}, \quad \nabla^2\mathbf{A} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu\mathbf{j}, \quad (1.15)$$

のように書き換えられるからだ。この式はまさに電磁場の波動方程式であり、電磁作用が速度  $1/\sqrt{\varepsilon\mu}$  で伝搬することを意味している。しかも、 $\rho/\varepsilon$  が静電ポテンシャル  $\phi$  の源であり、同様に、 $\mu\mathbf{j}$  がベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  の源である。このように静電ポテンシャル  $\phi$  とベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  が個別に記述できるようになり、マクスウェルの方程式の見通しがよくなる。これがローレンツ条件を設定することの利点だ。

数学記述の都合で導入されたローレンツ条件は、ベクトルポテンシャル  $\chi$  との関連性として面白い性質がある。ローレンツ条件 (1.14) に対して、 $\phi$  の代わりに  $\partial\chi/\partial t$  を、 $\mathbf{A}$  の代わりに  $\nabla\chi$  を代入すれば、ローレンツ条件が、

$$\nabla^2\chi - \varepsilon\mu \frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} = 0,$$

となることから、波動方程式の解が  $\chi$  として許容される自由度であることがわかる。空間を速度  $1/\sqrt{\varepsilon\mu}$  で伝搬する波に相当する波動関数を  $\chi$  として用いれば、ローレンツ条件を満たし、なおかつ、 $\mathbf{E}$  と  $\mathbf{B}$  が不変である。

波動方程式 (1.15) は、真空中において、電磁作用が光速で伝搬することを示唆している。真空の誘電率と透磁率を  $\varepsilon_0, \mu_0$  とすると、

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= 8.85418782 \times 10^{-6} \text{ F/m}, \\ \mu_0 &= 1.256637614 \times 10^{-6} \text{ H/m}, \end{aligned}$$

であるから電磁作用の伝搬速度を計算すると、

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = 2.99792458 \times 10^8 \text{ m/s},$$

が得られる。この値は真空中での光速と一致するので、マクスウェルは電磁波の存在を予言するとともに、光が電磁波の一種であると考えた。つまり、真空中での光速を  $c$  とすると、 $\epsilon_0\mu_0 = 1/c^2$  が成立し、真空中での電磁場の波動方程式は、

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\mathbf{j}, \quad (1.16)$$

と書き換えられる。これらの方程式は、平行移動と座標回転に対して不変 (または、共変) である。なぜなら、空間座標に関する微分はラプラス演算子のみだからである。それでは、ガリレイ変換に対してはどうであろうか? とりあえず、静電ポテンシャル  $\phi$  の波動方程式にガリレイ変換を適用してみると、

$$\left[ \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} + \frac{2v}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'} \right] \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0},$$

となる。この式には、 $x'$  と  $t'$  による混合偏微分項が含まれているため、 $\phi$  に関する波動方程式は、一般的には、ガリレイ変換に対して不変とはならない。ベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  の波動方程式に関しても同様の結果が得られる。また、ポテンシャル  $\phi$  とベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  の式を1次結合したとしても、混合偏微分項は消去できない。よって、マクスウェルの方程式はガリレイ変換に対して不変ではない。

電気と磁気を統一し、電磁波の存在すら予言したマクスウェルの方程式が、宇宙の対称性から要請されると思われるガリレイ変換に対して不変でないことは非常に都合が悪い。物理現象を正確に記述する理論をつくるのならば、ガリレイ変換、または、マクスウェルの方程式に修正が必要なのである。

## 1.5 マイケルソン・モーレーの実験

前節で示したように、光速はマクスウェルの方程式の中で、電磁作用の伝搬速度として現れる。マイケルソン (Michelson) とモーレー (Morley) が実施した実験によると、その光速もガリレイ変換にしたがわないことが観測され、19世紀末の物理学は大問題に直面した。その大問題とは、電磁波の伝搬速度についての問題である。

真空中のマクスウェルの方程式は波動方程式に書き換えることができ、その方程式に伝搬速度  $1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0} = c$  が含まれる。そもそも、その伝搬速度は何に対する速度なのか? 波動方程式に現れる伝搬速度は、波を伝える媒質に対する相対速度である。例えば、空気中を伝搬する音波の媒質は空気であり、地震波の媒質は地殻やマントルなどである。一方、ニュートンの時代から光が波であり、それが真空中を伝搬することも知られていた。そのため、宇宙空間 (真空中) には光の媒質であるエーテルという未知の物質で満たされている

と信じられてきた。マクスウェルの方程式によって、光が波であることが確実に became ため、より一層、エーテルの存在が強調されることとなった。

エーテルが存在した場合、宇宙には特別な絶対静止系、すなわち、エーテルに対する相対速度がゼロとなる系が存在するはずである。地球は太陽の周りを約 30 km/s で公転しているため、万一、1 年のうちのどこかでエーテルとの相対速度がゼロになる点があったとしても、大半はエーテルに対してゼロではない相対速度をもっている。エーテルとの相対速度は図 1.4 のように、エーテル流れと同じ方向、および、垂直な方向に対して光の往復時間を比較することによって計測できる。この図は、エーテルが右から左へ速度  $v$  で流れている場合を想定している。まず、(a) では光源からエーテル流れに逆らって発射した光を距離  $L$  だけ離れた鏡で反射し、その光が光源に戻るまでの時間を計測する。エーテルに対する光の伝搬速度を  $c$  とすると、行きはエーテル流れに逆らうため、光は速度  $c - v$  で進行する。反射した後、その光は速度  $c + v$  で戻ってくる。つまり、この場合において、光の往復に要する時間は、

$$\tau_a = \frac{L}{c - v} + \frac{L}{c + v} = \frac{2L}{c(1 - v^2/c^2)},$$

となる。一方、(b) はエーテル流れとは垂直な方向に光を発射した場合である。この図は、エーテルから見た様子を表している。エーテルから見ると、測定装置が右に向かって速度  $v$  で運動しているので、発射した光は図 1.4 (b) のような軌跡を描く。この場合、光はエーテル流れとは垂直な方向に、速度  $\sqrt{c^2 - v^2}$  で伝搬するので、往復に要する時間は、

$$\tau_b = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2L}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

となる。確かに、(a) と (b) では光の往復時間が異なっている。この時間差を検出できればエーテルの存在が確かめられるわけである。

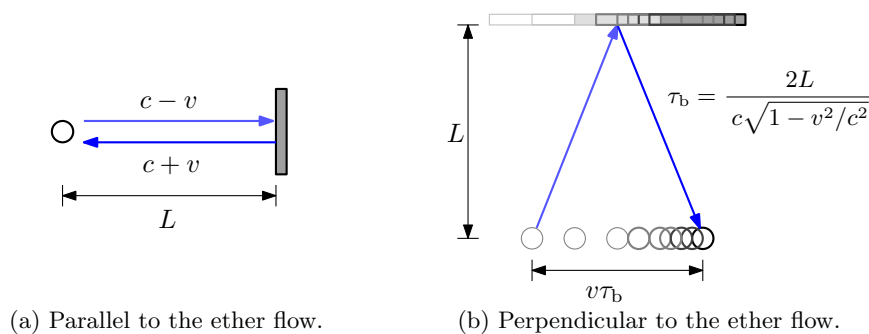


図 1.4: エーテル中の光の往復

波源から鏡までの距離を  $L = 10 \text{ m}$  とし、エーテルに対する地球の相対速度を  $v = 30 \text{ km/s}$  とすれば、図 1.4 の (a) と (b) における往復時間の差は、

$$\tau_a - \tau_b = \frac{2L}{c} \left( \frac{1}{1 - v^2/c^2} - \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) \simeq \frac{Lv}{c^3} \simeq 3.34 \times 10^{-16} \text{ s},$$

となる。この時間差は光でさえも約  $0.1 \mu\text{m}$  しか移動できない程度の短い時間である。しかし、この長さは光の波長と比較できる長さなので、1887年の時点で、マイケルソンの干渉計によって検出することが可能であった。マイケルソンとモーレーは1887年から、図1.5に示すマイケルソン干渉計を用いてエーテルの速度を検出しようとした。この実験はマイケルソン・モーレーの実験とよばれる。マイケルソン干渉計は、図1.5に示すように、光源とハーフミラー、2つの反射鏡と、検出器によって構成される。光源から発射された光は、半分がハーフミラー  $M_0$  を透過して反射鏡  $M_1$  へ、もう半分が  $M_0$  で反射して反射鏡  $M_2$  へ進行する。それらの反射鏡  $M_1$  と  $M_2$  で反射した光は、再び、 $M_0$  で反射した後に検出器で映像として観測される。ハーフミラーから反射鏡までの距離  $L_1$  と  $L_2$  を調整して、検出器で光が同位相で合成されるようになっていれば光は強め合い、その位相関係が変化すると、検出される光は弱くなる。

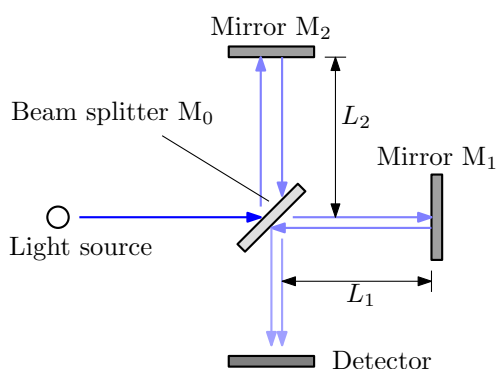


図 1.5: マイケルソン干渉計

マイケルソンとモーレーは、長さ  $L_1$  が地球の公転方向と一致するように干渉計を配置して、検出器の位置で光が強め合うように長さ  $L_1$  と  $L_2$  を調整して、続いて、長さ  $L_1$  が子午線方向を向くように(すなわち、90度)干渉計を回転させた。エーテル流れに平行な方向と垂直な方向では光の速度が異なるはずなので、回転させることによって光の位相関係が変化し、検出結果に変化が現れるはずである。しかも、この干渉計を水銀に浮かせた状態にしているため、干渉計を回転させる際に調整した距離を狂わせるような負荷が装置にかからないようになっている。しかしながら、この実験によって予想されていた時間差が検出できなかった。検出された時間差は、誤差の範囲ともいえるくらいの、予想値よりもはるかに小さな値だったのである。彼らは、1日のうちの観測時刻を変えてみたり、一年のうちの時期を変えてみたりしたが、結局エーテルの速度を検出することができなかったのである。

マクスウェルの方程式がガリレイ変換に対して不変でないことに加え、この実験の失敗によりエーテルの存在が危うくなった。いや、電磁波の媒質とはどのように解釈すべきなのかわからなくなったのだ。この実験を説明するため、様々な説が提唱された。ある者は、エーテルが粘性をもっているため、地球はエーテルを引きずりながら運動し、地表がエー



テルに対して静止しているという説を唱えた。その説が正しければ、地球周辺のエーテル流が宇宙からやってくる光を屈折させるはずであるが、そのような現象は観測されていない。甚だしい例としては、物理学を天動説に戻そうとする説まで現れた。

一方、ローレンツは、エーテルに対して運動するとその運動方向に  $\sqrt{1 - v^2/c^2}$  の割合で長さが縮むという説 (いわゆるローレンツ収縮) を唱えた。そうすれば、図 1.4 の例において、エーテル流れと平行な場合と垂直な場合における光の往復時間が等しくなり、その結果、マイケルソン・モーレーの実験でエーテルの速度が検出できなかったことを説明できる。しかも、ローレンツの説の検証を試みたとしても、計測に用いるものさし自体が同じ割合で収縮するため、検証すらできないのである。この説は直接ぼろが出ないような巧妙な説であった。とはいえ、ローレンツがこのような説を提唱するには、ある程度、理論的な裏づけがあった。実は、次節で導出するローレンツ変換によって、運動する関係系では静止系と長さの尺度が異なることがわかったからである。

## 1.6 ローレンツ変換

マクスウェルの方程式がガリレイ変換に対して不変でないことは既に説明した。ここでは、その代わりにマクスウェルの方程式を不変にする座標変換を求め、それがローレンツ収縮を説明できることを示す。ガリレイ変換に対してマクスウェルの方程式が不変でなかったのは、電磁場の波動方程式をガリレイ変換した際に  $x'$  と  $t'$  による混合微分項が現れるからである。この混合微分項は、 $x'$  の変換に  $t$  の依存性が含まれるにも関わらず、 $t'$  の変換に  $x$  の依存性が含まれないような非対称が原因である。つまり、 $t'$  の変換が  $x$  の依存性を含んでいれば、混合微分項を相殺してマクスウェルの方程式を不変にすることも可能である。

マクスウェルの方程式を不変にする変換を見つけることは困難ではない。実は、 $i^2 = -1$  を満たす虚数単位  $i$  を用いて  $w = ict$  という置き換えをすると、ポテンシャル  $\phi$  に関する波動方程式は、

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial w^2} \right) \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0},$$

のように書くことができる。これは 4次元座標  $[x, y, z, w]$  におけるポアソンの方程式であると考えられる。前に示したように、ラプラス演算子は座標回転に対して不変であった。つまり、4次元座標系  $[x, y, z, w]$  において、電磁場はいかなる方向に回転させても、その形を変化させないのである。それでは、 $xw$  平面内で、座標軸を角度  $\theta$  だけ回転させて新たな座標軸  $x', w'$  をつくってみよう。その場合、座標変換は、

$$x' = x \cos \theta - w \sin \theta, \quad w' = x \sin \theta + w \cos \theta,$$

のようになる。ここで、 $w$  をもとの座標  $t$  に戻すと、この座標変換は、

$$x' = x \cos \theta - ict \sin \theta, \quad t' = -i \frac{x}{c} \sin \theta + t \cos \theta,$$

のような形をしていたことがわかる。つまり、この変換式はマクスウェルの方程式を不変にする条件を満たす座標変換である。しかしながら、この変換式は虚数単位  $i$  を含むため、 $x$  と  $t$  が本来、実数であると考え、物理学的には都合が悪いように感じる。そこで、角度  $\theta$  が虚数であると仮定し、実数  $\vartheta$  を用いて  $\theta \equiv i\vartheta$  とおいてみよう。虚数角度の回転に関して、 $\cos i\vartheta = \cosh \vartheta$ ,  $i \sin i\vartheta = \sinh \vartheta$  となることに注意すると、

$$x' = x \cosh \vartheta - ct \sinh \vartheta, \quad t' = -\frac{x}{c} \sinh \vartheta + t \cosh \vartheta,$$

のように、虚数単位を取り除くことができ、物理学的にも満足できる座標変換が得られた。このような変換によって、 $\phi$  に関する波動方程式を座標変換した場合、 $x'$  と  $t'$  による混合偏微分項を相殺できるはずである。ベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  に関する波動方程式も同じ形であるので、同様の理屈が成り立ち、変換後の座標系においても、

$$\nabla'^2 \phi' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi'}{\partial t'^2} = -\frac{\rho'}{\varepsilon_0}, \quad \nabla'^2 \mathbf{A}' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}'}{\partial t'^2} = -\mu_0 \mathbf{j}',$$

が成り立つのである。ここで、 $\nabla'$  は変換後の座標系 ( $K'$  系) でのナブラ演算子であり、 $\phi'$ ,  $\mathbf{A}'$ ,  $\rho'$ ,  $\mathbf{j}'$  は  $K'$  系において観測される物理量であるとする。同様に、ローレンツ条件についても座標変換に対する不変性:

$$\nabla' \cdot \mathbf{A}' + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi'}{\partial t'} = 0,$$

が成り立つと考えるのが適切である。補足をするならば、ローレンツ条件は静電ポテンシャル  $\phi$  とベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  の関係を規定する制約条件である。すでに導出した波動方程式が、 $\phi$  と  $\mathbf{A}$  についての個別の数式となっているので、それを独立に不変にするのではなく、ローレンツ条件なる制約のもとで負変位するのだ。

ローレンツ条件について、得られた座標変換に対する不変性を検証してみよう。まず、 $x'$  と  $t'$  への座標変換を偏微分することによって、

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cosh \vartheta \frac{\partial}{\partial x'} - \frac{\sinh \vartheta}{c} \frac{\partial}{\partial t'}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = -c \sinh \vartheta \frac{\partial}{\partial x'} + \cosh \vartheta \frac{\partial}{\partial t'},$$

が得られる。これをローレンツ条件に代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'} \left( A_x \cosh \vartheta - \frac{\phi}{c} \sinh \vartheta \right) + \frac{\partial A_y}{\partial y'} + \frac{\partial A_z}{\partial z'} \\ + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'} \left( -c A_x \sinh \vartheta + \phi \sinh \vartheta \right) = 0, \end{aligned}$$

のように書き換えられる。これは一見、ローレンツ条件の不変性が破れているように思えるが、座標変換によってポテンシャル  $\phi$  とベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  が、

$$\begin{aligned}\phi' &= -cA_x \sinh \vartheta + \phi \cosh \vartheta, \\ A'_x &= A_x \cosh \vartheta - \frac{\phi}{c} \sinh \vartheta, \quad A'_y = A_y, \quad A'_z = A_z,\end{aligned}$$

のように変換されると考えれば、ローレンツ条件は、

$$\nabla' \cdot \mathbf{A}' + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi'}{\partial t'} = 0,$$

と書くことができ、得られた座標変換に対して不変であるとみなせる。さらに、 $\phi$  と  $\mathbf{A}$  の波動方程式に対して座標変換を適用すると、波動方程式の不変性も検証され、 $K'$  系における電荷密度  $\rho'$  と電流密度  $\mathbf{j}'$  が、

$$\begin{aligned}\rho' &= \rho \cosh \vartheta - \frac{j_x}{c} \sinh \vartheta, \\ j'_x &= j_x \cosh \vartheta - c\rho \sinh \vartheta, \quad j'_y = j_y, \quad j'_z = j_z,\end{aligned}$$

なる変換にしたがうことも導出される。この結果は、マクスウェルの方程式を不変とする座標変換のもとでの電荷密度と電流密度の変換である。マクスウェルの方程式が不変である条件で、 $K'$  系で観測される物理量が、このように変換されなければならないことを意味している。

上のようにしてマクスウェルの方程式が不変となるような座標変換を求めたが、その変換に用いたパラメータ  $\vartheta$  の物理的な意味がはっきりしていない。そこで、パラメータ  $\vartheta$  の正体を探るため、 $K'$  系から見たとき、 $K$  系の原点が  $x' = -vt'$  のように運動するという条件を用いてみよう。変換式に  $x = 0$  を代入し、 $x' = -vt'$  となるような条件を選ぶと、 $\tanh \vartheta = v/c$  であることがわかる。簡単のため、 $\beta \equiv v/c$  とおくと、

$$\cosh \vartheta = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \sinh \vartheta = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

となるので、ただちに、

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (1.17)$$

が得られる。この変換はローレンツ変換と呼ばれている。この変換は1899年と1904年にローレンツによって紹介されたので、数学者ポアンカレ (Poincaré) がこの変換にローレンツ変換と名付け、その名前が定着したようである。しかし、ローレンツ変換に類似した変換は1887年にフォクト (Voigt) によって紹介されている。しかし残念ながら、彼は導いた変換式を物理現象として考察するには至らなかった。その後、1897年にラーモア (Larmor)

もこの変換式を導出した。また、ローレンツ変換の名付けの親であるポアンカレ自身も変換式を導出した。ローレンツ変換は、 $v/c \rightarrow 0$ の極限においてガリレイ変換に近似できる。つまり、ローレンツ変換が真実であるならば、ガリレイ変換は光速に比べ十分に小さい速度の場合に成立する近似だったことになる。

ローレンツ変換 (1.17) を導出する過程において、静電ポテンシャル  $\phi$  とベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  が、その座標変換に対して共変であることがわかっていて、よって、物理的考察から決定されたパラメータ  $\vartheta$  を具体的に書くと、それらのポテンシャルは、

$$\phi' = \frac{\phi - vA_x}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad A'_x = \frac{A_x - v\phi/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad A'_y = A_y, \quad A'_z = A_z, \quad (1.18)$$

のような変換にしたがう。さらに、電荷密度  $\rho$  と電流密度  $\mathbf{j}$  も、

$$\rho' = \frac{\rho - vj_x/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad j'_x = \frac{j_x - v\rho}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad j'_y = j_y, \quad j'_z = j_z, \quad (1.19)$$

のような共変性があることがわかっている。同様に、電場  $\mathbf{E}$  と磁束密度  $\mathbf{B}$  なども共変性がある。それらがどのように変換されるかは、(1.12) と (1.11) を使えばよいが、検算の意味で、新たな座標変換をマクスウェルの方程式に適用して電場と磁束密度の変換を得ることもできる。電場や磁束密度の変換は、第 4.1 節で改めて導出するのでそちらを参照してもらいたい。

これでガリレイ変換に代わって、マクスウェルの方程式を不変にする座標変換を得ることができたのだが、このローレンツ変換の導出においてなぜ真空の場合に限定したのか不思議に思う人もいることだろう。結果的には、ローレンツ変換に対して、真空でない場合 (物質中) のマクスウェルの方程式も不変になるのだが、 $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$  と  $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$  なる関係が常に成立するものとして検証を試みると、波動方程式 (1.15) はローレンツ変換に対して不変とはならない。詳しくは第 4.6 節で検討するが、誘電体のような媒質に対してゼロではない相対速度をもつ場合、 $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$  と  $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$  のような簡単な関係が成り立たないからである。媒質に対してゼロでない相対速度をもつ場合の  $\mathbf{D}$  と  $\mathbf{B}$  が正しく記述できれば、任意の  $\epsilon$  と  $\mu$  においてもマクスウェルの方程式がローレンツ変換に対して不変であることが約束される。

ローレンツは変換 (1.17) から、エーテル内を運動する物質の長さが縮むこと (ローレンツ収縮) を主張し、マイケルソン・モーレーの実験でエーテルの速度が検出できなかったことを説明した。さらに、運動する物体に備え付けた時計が  $\sqrt{1 - \beta^2}$  の割合で遅れることにも気づき、その運動する物体固有の時間という意味で局所時間と名付けている。しかし、ローレンツは局所時間の物理的な意味については特に説明しなかった。そのような、長さや時間のローレンツ収縮については、アインシュタインの相対性理論において現れるので、第 2.5 節で説明する。

## 1.7 運動する荷電粒子による電磁場

ローレンツ変換は、マクスウェルの方程式が不変となるような座標変換であるが、その変換は、電磁作用が有限の速度で伝搬することと関係している。本節では、電磁作用の伝搬遅延を考慮して、等速運動する荷電粒子がつくる電磁場を考察し、ローレンツ変換との関連性を調べる。

マクスウェルの方程式は、(1.15) のような波動方程式に書き換えることができ、電磁作用が有限の速度で伝搬することを意味する。真空の場合においては、 $\epsilon_0\mu_0 = 1/c^2$  であるので、電磁作用の伝搬速度は真空中での光速に等しい。当然、この微分方程式の一般解としては、電磁作用の伝搬による遅延を考慮した次のような解をもつ：

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}_s, t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|} d^3\mathbf{r}_s, \quad (1.20)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}_s, t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|} d^3\mathbf{r}_s. \quad (1.21)$$

この解において、 $\mathbf{r}_s$  はポテンシャル  $\phi$  とベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  に寄与する電荷密度と電流密度が存在する位置を表す。ただし、その時間依存性は  $t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|/c$  となっているので、位置  $\mathbf{r}_s$  から観測点  $\mathbf{r}$  まで電磁作用が伝搬する時間分の遅延が考慮されていることがわかる。このようなポテンシャルは遅延ポテンシャルとよばれる。

この遅延ポテンシャルを、運動する荷電粒子に対して適用してみよう。荷電粒子は電荷  $e$  をもち、時刻  $t$  において位置  $\mathbf{s}(t)$  に存在する。この位置ベクトルを時間について微分すれば荷電粒子の速度となるが、その物理量は  $d\mathbf{s}/dt = \mathbf{v}$  とする。ここで、荷電粒子は等速度運動しているとする。この荷電粒子に関する電荷密度  $\rho$  と電流密度  $\mathbf{j}$  はディラック (Dirac) のデルタ関数を用いると、

$$\rho(\mathbf{r}, t) = e \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{s}(t)), \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = e \mathbf{v} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{s}(t)),$$

のように書ける。これらを遅延ポテンシャルの式に代入すれば運動する荷電粒子がつくるポテンシャルを計算できるが、デルタ関数の取り扱いには注意が必要である。静電ポテンシャル  $\phi(\mathbf{r}, t)$  に関して計算してみると、

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dt_i \int \frac{\rho(\mathbf{r}_s, t_i) \delta(t_i - (t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|/c))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|} d^3\mathbf{r}_s \\ &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \int dt_i \int \frac{\delta(\mathbf{r} - \mathbf{s}(t_i)) \delta(t_i - (t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|/c))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|} d^3\mathbf{r}_s \\ &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\delta(t_i - (t - |\mathbf{r} - \mathbf{s}(t_i)|/c))}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}(t_i)|} dt_i, \end{aligned} \quad (1.22)$$

のようになる。ただし、 $t_i$  は便宜上用いた時間に関する積分変数である。ここでデルタ関数の変数がゼロとなるように  $t_i$  を置き換えて積分記号をはずせばよいと思われるかもしれないが、そう簡単ではない。それはデルタ関数の変数が  $t_i$  の汎関数になっているからである。例えば、汎関数  $f(t_i)$  を変数とするデルタ関数は、

$$\delta(f(t_i)) = \left| \frac{1}{df/dt_i} \right|_{t_i=t_0} \delta(t_i - t_0), \quad (1.23)$$

のように書き換えることができる。ただし、 $t_0$  は  $f(t_i) = 0$  の解である。そこで、(1.22) の右辺に含まれるデルタ関数の変数を微分しておくとして、

$$\frac{d}{dt_i} \left[ t_i - \left( t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{s}(t_i)|}{c} \right) \right] = 1 - \frac{\mathbf{r} - \mathbf{s}(t_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}(t_i)|} \cdot \frac{\mathbf{v}}{c},$$

が得られる。よって、(1.23) に注意して (1.22) をさらに計算すると、

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}(t_0)| - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{s}(t_0))/c}, \quad (1.24)$$

が得られる。ただし、変数  $t_0$  は、 $t_i$  を未知数とする方程式:

$$t_i = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{s}(t_i)|}{c},$$

の解である。得られた (1.24) は運動する電荷に関する静電ポテンシャルである。この結果から、ベクトルポテンシャルが、

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e\mathbf{v}}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}(t_0)| - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{s}(t_0))/c}, \quad (1.25)$$

となることは容易に理解できるだろう。ベクトル  $\mathbf{v}$  は上で述べたように、位置ベクトル  $\mathbf{s}$  の時間微分、すなわち、荷電粒子の速度である。これらのポテンシャル (1.24) と (1.25) は、1898年にリエナール (Liénard) が、1900年にヴィーヘルト (Wiechert) が独立に計算したことにより、リエナール・ヴィーヘルトのポテンシャルと呼ばれる。

荷電粒子が K 系の  $x$  軸上を速度  $v$  で等速運動しているとする。荷電粒子の位置は  $x = vt$ ,  $y = z = 0$  で与えられるとする。この条件をリエナール・ヴィーヘルトのポテンシャルに代入すると、観測点  $\mathbf{r} \equiv [x, y, z]$  でのポテンシャルは、

$$\phi(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{\sqrt{(x - vt)^2 + (1 - \beta^2)(y^2 + z^2)}},$$

$$\mathbf{A}(x, y, z, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e\mathbf{v}}{\sqrt{(x - vt)^2 + (1 - \beta^2)(y^2 + z^2)}},$$

となる。ただし、 $\beta \equiv v/c$  とおいた。静止する荷電粒子による等位ポテンシャル面は図 1.6 (a) のように荷電粒子を中心とする球面となるが、運動する荷電粒子による等位ポテンシ

ル面は図 1.6 (b) のように回転楕円体の表面となる。この図に記載している時刻  $t_0$  は時刻  $t$  に観測点  $\mathbf{r}$  への電磁作用が荷電粒子を出発した時刻を表す。この時刻は、

$$t_0 = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{s}(t_0)|}{c},$$

の解である。ところで、遅延ポテンシャルによる計算をしているにも関わらず、回転楕円体の中心は、荷電粒子の過去の位置  $\mathbf{s}(t_0)$  ではなく現在の位置  $\mathbf{s}(t)$  となっていること<sup>4</sup>に注意すべきである。

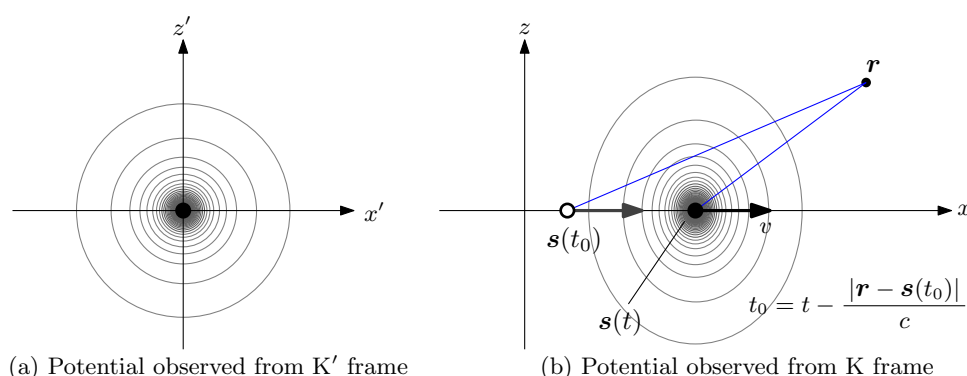


図 1.6: 運動する荷電粒子によるポテンシャル

回転楕円体の表面となった等位ポテンシャル面には、ローレンツ変換との関係性が見られる。というのは、上記ポテンシャルは、

$$\phi(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{\sqrt{1-\beta^2}} \left[ \left( \frac{x-vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \right)^2 + y^2 + z^2 \right]^{-1/2},$$

のように展開でき、ローレンツ変換された座標で記述されることからわかる。運動する荷電粒子の等位ポテンシャル面が回転楕円体になっているのは、もともと球面だった等位ポテンシャル面が運動方向にローレンツ変換によって回転楕円体に変換されると解釈できる。

さて、ここまでの相対性理論が発表される前の物理学の展開である。マクスウェル方程式がガリレイ変換に対して不変とならず、ローレンツ変換によってその方程式を不変にできることを確認した。そのことからガリレイ変換が光速に対して十分小さい速度における近似であると考えられることができる。これで、マクスウェルの方程式の不変性、および、マイケルソン・モーレーの実験における光速に関する矛盾を説明することができたように思える。しかしながら、まだ未知の媒質エーテルの存在が前提になっている。次章で説明する相対性理論はエーテルの存在を否定する理論である。しかしながら、ローレンツ変換などがそのままの形で現れることは驚くに値する。

<sup>4</sup>荷電粒子が加速度をもっている場合、これは成り立たない。

