第5章　共変形式

5.1　数学的準備

本節では, 相対性理論を簡潔に記述するための手法としてリーマン幾何学の記法を紹介する。リーマン幾何学は一般相対性理論を記述するためにアインシュタインによって採用されたが, 座標変換に関する物理量を記述する上では特殊相対性理論であっても非常に有用な数学的な道具である。

5.1.1　座標と座標変換

座標系 K における座標を x^μ と書き, それを K$'$ 系に座標変換して得られる座標を x'^μ と書く。ここで, 右上に付した文字 μ はベクトルの添え字である。リーマン幾何学では, 座標については右上に添え字を書くことになっている。K 系から K$'$ 系への座標変換が $x'^\mu \equiv x'^\mu(x^0, x^1, \ldots, x^{N-1})$ のような関数で与えられているとする。ここで, N は想定している空間の次元を表す。相対性理論では $N = 4$ である。この変換式を微分すると,

$$\mathrm{d}x'^\mu = \sum_{\nu=0}^{N-1} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \mathrm{d}x^\nu, \tag{5.1}$$

となることは解析学の公式から明らかである。ところで, リーマン幾何学ではこのような総和を用いた数式が頻繁に登場する。そのような数式では, (5.1) で使用される ν のようにペアになっている添え字について総和をとることが常である。つまり, ペアになっている添え字について和をとるという約束をしていれば, 総和記号 Σ を省略して書いたとしても不都合は生じない。よって, リーマン幾何学では (5.1) を

$$\mathrm{d}x'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \mathrm{d}x^\nu, \tag{5.2}$$

のように記述する。この省略記法はアインシュタインの総和の規約と呼ばれる。名前のとおり, この怠惰な記法はアインシュタインが一般相対性理論のために提案した方法で, 便利さゆえに使われ続けている。正確に言うと, 総和をとるための添え字はどのような組み合わせでもよいわけではない。一方の添え字が共変成分であれば, 対となるもう一方は反

変成分でなければならないという制限がある。共変成分, 反変成分という言葉については後に説明するので今のところは特に気にしないでもよいだろう。

K 系から K′ 系への座標変換がローレンツ変換ならば, 座標の完全微分 (5.2) に見られる係数 $\partial x'^\mu/\partial x^\nu$ をヤコビアン行列の第 μ 行目, 第 ν 列目の成分とすると, そのヤコビアン行列は,

$$\left[\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\right] = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

のようにローレンツ変換の展開係数を表す行列となる。これに対して,

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\nu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} = \delta^\mu{}_\nu,$$

であることから, 逆変換を表す $\partial x^\mu/\partial x'^\alpha$ は, $\partial x'^\alpha/\partial x^\nu$ の逆行列であることがわかる。このようなローレンツ変換の展開係数とヤコビアン行列の関係は, 物理量の変換を考える際に役に立つ。

5.1.2 スカラとベクトル

スカラとベクトルはリーマン幾何学で導入された概念ではないが, リーマン幾何学は座標変換に対する性質として, スカラとベクトルを論理的に分類している。スカラは座標変換に対して不変な値であり, ベクトルは座標変換に伴って変換される量である。さらにその変換の性質により, ベクトルは共変ベクトルと反変ベクトルに分類される。

既に述べたように, **スカラ**とは座標変換に対して不変となる量である。特殊相対性理論においては, ローレンツ変換に対して不変となる質量や電荷がスカラである。数式で表現するならば, ある座標系で定義されたスカラを ϕ とし, 別の座標系において ϕ に対応する量を ϕ' とすれば,

$$\phi' = \phi, \tag{5.3}$$

となる。電磁気では, ベクトルポテンシャルに対して静電ポテンシャルのことをスカラポテンシャルと呼ぶことがある。しかし, 静電ポテンシャルがローレンツ変換に対して (5.3) の関係が成り立たないため, 本書では静電ポテンシャルをスカラポテンシャルとは呼ばない。

任意のスカラ ϕ を座標 x^μ で偏微分することによって定義されるベクトル $\partial\phi/\partial x^\mu$, いわゆる勾配ベクトルは, 解析学の公式より,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\frac{\partial \phi}{\partial x^\nu},$$

という性質がある。これと同じ性質をもつベクトルを**共変ベクトル**という。共変ベクトルは, u_μ のように添え字を右下に書く習慣になっている。座標変換に関する性質を改めて書くと, 共変ベクトル u_μ は,

$$u'_\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} u_\nu, \tag{5.4}$$

なる関係を満足する。つまり, ローレンツ変換に対して, 共変ベクトルは座標変換の逆変換にしたがう。また, 容易に示せるが, 勾配ベクトルのほかに, 共変ベクトルをスカラで微分したベクトルも共変ベクトルである。

前項でも書いたように, 微小な座標変化 $\mathrm{d}x^\mu$ は, 座標変換に対して,

$$\mathrm{d}x'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \mathrm{d}x^\nu,$$

のように変換される。これと同じ性質をもつベクトルを**反変ベクトル**という。共変ベクトルは, v_μ のように添え字を右上に書く習慣になっている。座標変換に関する性質を改めて書くと, 反変ベクトル v^μ は,

$$v'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} v^\nu, \tag{5.5}$$

なる関係を満足する。つまり, ローレンツ変換に対して, 反変ベクトルは座標変換と同一の変換にしたがう。また, 容易に示せるが, 反変ベクトルをスカラで微分したベクトルも反変ベクトルである。

5.1.3　2 階テンソル

共変ベクトル, または, 反変ベクトルのダイアド積をとることによって添え字を 2 つもつ量 $T_{\mu\nu} \equiv u_\mu v_\nu$, $T^{\mu\nu} \equiv u^\mu v^\nu$, ${T_\mu}^\nu \equiv u_\mu v^\nu$ などを定義できる。添え字がともに下にある量を共変テンソル, 添え字がともに上にある量を反変テンソル, 添え字が上と下にある量を混合テンソルという。ベクトルと同様, 座標変換に対して, 共変な成分は逆変換にしたがい, 反変な成分は座標変換と同一変換にしたがう。その性質を数式で表現するならば,

$$\begin{aligned} T'_{\mu\nu} &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} T_{\alpha\beta}, \\ T'^{\mu\nu} &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} T^{\alpha\beta}, \\ {T'_\mu}^\nu &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} {T_\alpha}^\beta, \end{aligned}$$

となる。同様にダイアド積を重ねてさらに高階のテンソルを定義することもできるが, 特殊相対性理論で登場するのは 2 階のテンソルまでである。

逆に, 高階のテンソルの階数を下げる操作を縮約という。例えば, 2 階の共変テンソル $T_{\mu\nu}$ に反変ベクトル u^{μ} を掛けて, 添え字 μ について縮約をとると,

$$T_{\mu\nu}u^{\mu} \equiv v_{\nu},$$

のような共変ベクトルが得られる。容易に予想できるように, ベクトルに対して縮約をとった値 $u_{\mu}v^{\mu}$ はスカラ量になる。このスカラ量は, 次項で紹介するベクトルの内積である。

5.1.4 計量テンソル

座標 x^{μ} の微小変化によって得られるベクトル $\mathrm{d}x^{\mu}$ の長さ $\mathrm{d}s$ は線素と呼ばれる。三次元のユークリッド空間であれば, 線素は $\mathrm{d}s^2 = (\mathrm{d}x^1)^2 + (\mathrm{d}x^2)^2 + (\mathrm{d}x^3)^2$ のように三平方の定理で表される。まぎらわしい記法だが, 括弧の外の右肩の数値は自乗を意味する。一般的には, 各項に 1 以外の係数を伴い, $\mathrm{d}x^1\,\mathrm{d}x^2$ のように異なる成分の混合項を伴うこともある。そのような一般形式は,

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^{\mu}\mathrm{d}x^{\nu},$$

のような 2 次形式で表現できる。この 2 次形式の係数を与える行列 $g_{\mu\nu}$ を計量テンソルという。この 2 次形式において, $\mathrm{d}x^{\mu}$ と $\mathrm{d}x^{\mu}$ の順序を交換しても $\mathrm{d}s^2$ が変化しないので, $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ である。つまり, 計量テンソルは対称テンソルである。計量テンソルの具体例として, カルテシアン座標系では $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ となる。また, 2 本の座標軸が角度 θ で交わるような 2 次元の斜交座標系では $g_{00} = g_{11} = 1$, $g_{01} = g_{10} = \cos\theta$ となる。係数行列 $g_{\mu\nu}$ は計量テンソルと呼ばれるように, テンソル性をもつので, 座標変換に対して,

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}}g_{\alpha\beta},$$

のような変換にしたがう。このテンソル性は $\mathrm{d}s^2$ がスカラであることから容易に証明できる。さらに, 計量テンソルの添え字を上に書いた記号 $g^{\mu\nu}$ は, 計量テンソル $g_{\mu\nu}$ の逆行列を表す。

計量テンソルはその座標系における長さの尺度を定義する量であり, その尺度を用いてベクトルの内積を定義することができる。二つの反変ベクトル u^{μ} と v^{μ} の内積は $g_{\mu\nu}u^{\mu}v^{\nu}$ によって与えられる。つまり, 線素の自乗 $\mathrm{d}s^2$ は位置ベクトルの微小変化 $\mathrm{d}x^{\mu}$ の自分自身との内積である。

計量テンソルには, ベクトルやテンソルの共変性と反変性を交換するはたらきがある。例えば, 反変ベクトル u^{μ} に $g_{\mu\nu}$ を掛けて μ について縮約をとれば, $u^{\mu}g_{\mu\nu} = u_{\nu}$ のように共変ベクトルに変換できる。逆に, 共変ベクトル v_{μ} に $g^{\mu\nu}$ を掛けて μ について縮約をとると, $v_{\mu}g^{\mu\nu} = v^{\nu}$ のように反変ベクトルに変換できる。このことから, u^{μ} と v^{μ} の内積は $u^{\mu}v_{\mu}$ $(= u_{\mu}v^{\mu})$ と書くこともできる。

計量テンソル $g_{\mu\nu}$ と座標についての 2 階偏微分演算子には下に記述する定理が成り立つ。

定理 1 ある座標系に関する計量が $\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu$ で与えられているとする。座標 x^μ を座標変換によって x'^μ に変換したとき, 計量テンソル $g_{\mu\nu}$ が不変であれば,

$$g^{\mu\nu}\frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = g^{\mu\nu}\frac{\partial^2}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu},$$

が成り立つ。

これを証明するには, 左辺を座標変換すればよい。

$$\begin{aligned}
g^{\mu\nu}\frac{\partial^2}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} &= g^{\mu\nu}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\right) \\
&= g^{\mu\nu}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\left(\frac{\partial \delta_\alpha{}^\beta}{\partial x'^\nu} + \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}\frac{\partial^2}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta}\right) \\
&= \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g^{\mu\nu}\frac{\partial^2}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta} = g'^{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta}.
\end{aligned}$$

座標変換後も軽量テンソルが一定であるので, $g_{\mu\nu} = g'_{\mu\nu}$ が成立する。したがって, 上の式が証明された。この定理は, 平行移動や座標回転を適用しても, ラプラスの微分方程式が不変であることに直結している。また, 次節で説明するミンコフスキー計量にも関係する定理である。

5.2 ミンコフスキー計量

Galilei 変換に対して不変となる空間はラプラス演算子が不変であることが条件となる。これに対し, ローレンツ変換に対して不変となる空間 (時空) は, マクスウェルの方程式に関する不変性を調べたときに明らかになったように,

$$\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

なる演算子が不変であることが条件となる。この演算子は, ダランベルシアンと呼ばれているので, 特殊相対性理論では, ローレンツ変換に対してダランベルシアンが不変であることが条件となる。この条件は,

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 - c^2\mathrm{d}t^2, \tag{5.6}$$

が不変であることと等価である。この式がリーマン幾何学における線素の 2 次形式になっているので, 時刻 t も位置を表す座標と同じ扱いをすることにする。そのため, ct が長さ

と同じ次元をもつことを利用すれば, $[x^0, x^1, x^2, x^3] \equiv [ct, x, y, z]$ のように座標を対応づければよい。すると, ローレンツ変換に対して不変となる空間の計量 $\eta_{\mu\nu}$ は,

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

となる。この計量 $\eta_{\mu\nu}$ をミンコフスキー計量と呼び, この計量で長さが定義される空間をミンコフスキー空間と呼ぶ。つまり, 特殊相対性理論は, ユークリッド空間の代わりに時間を座標として加えたミンコフスキー空間を取り扱う物理学である。既に述べたように, ミンコフスキー空間の微小距離を表す線素 $\mathrm{d}s$ はスカラであるが, 相対性理論では $\mathrm{d}\tau^2 = -\mathrm{d}s^2$ を満たすパラメータ τ を使用することが多い。ここで, 微小パラメータ $\mathrm{d}\tau$ を,

$$\mathrm{d}\tau = \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left[\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]}\,\mathrm{d}t, \tag{5.7}$$

のように書き換えれば, その物理的な意味が見えてくるだろう。状況としては, ある特定の質点Pを観測している場合を考えればよい。その場合, $[x, y, z]$ は3次元空間における質点Pの位置ベクトルで, t は時刻である。質点Pの速度を u とすれば, (5.7) は $\mathrm{d}\tau = \sqrt{1 - u^2/c^2}\,\mathrm{d}t$ のように書き換えられる。この関係式は, 速度 u で運動する慣性系における時計の遅れを表す式である。よって, $\mathrm{d}\tau$ は質点Pと併走する時計による時間の尺度を表すと考えられるので, τ は質点Pにおける時刻を表すパラメータである。そのため, τ は固有時間と呼ばれる。

5.3　4元速度と運動量

ニュートン力学とは異なり, 相対性理論では慣性系によって長さや時間の尺度が異なる。前節で学んだように, 特殊相対性理論で扱う空間はミンコフスキー空間であるため, 時刻 t は座標 $[x, y, z]$ と同じように扱われ, もはや, 全宇宙で共通のスカラパラメータではなくなった。そのため, 速度を $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ のように, t についての導関数として表現すると扱いづらい。

これに関して, 運動する物体の固有時間 τ がスカラであることは前節で説明した。つまり, τ はいかなる慣性系から見ても共通の尺度で変化する時間であるので, t の代わりに τ を用いて速度を定義することが有効と思われる。よって,

$$u^\mu = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau},$$

によって定義される u^μ を 4 元速度と呼ぶ。ここで, $x^0 = ct$, $\mathrm{d}\tau = \sqrt{1 - v^2/c^2}\,\mathrm{d}t$ であることに注意すると, 新たに定義した 4 元速度 u^μ と, 3 次元ベクトルによる速度 $\boldsymbol{u}$ の間には,

$$[u^\mu] = \left[\frac{c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad \frac{\boldsymbol{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}\right], \tag{5.8}$$

のような対応関係がある。定義によれば, 座標をスカラパラメータについて微分して得られる 4 元速度 u^μ は反変ベクトルであるので, 座標と同じ変換を受ける。 例えば, K 系とは相対的に x 軸方向に速度 v で等速運動する慣性系 K′ 系から同じ物体を見た相対論的速度は

$$u'^0 = \frac{u^0 - \beta u^1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \qquad u'^1 = \frac{u^1 - \beta u^0}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \qquad u'^2 = u^2, \qquad u'^3 = u^3, \tag{5.9}$$

となる。この変換式から, 第 3.1 節で導出した速度の変換式 (3.2) を導くこともできる。また, 3 次元における速度が光速 c に等しいとき, 4 元速度が無限大となるため, 光速は到達不可能な究極の速さであることを意味している。

得られた公式 (5.9) のように, 4 元ベクトルの速度変換則が座標変換とまったく同じ形式であるのは便利であるが, 第 3 章で導出した速度変換則と違うのことに違和感があるかもしれない。その違和感を取り除くため, (5.9) から第 3 章の速度変換則が導出できることを示そう。K 系における 3 元速度ベクトルの成分を $[u_x, u_y, u_z]$ とし, そのベクトルの大きさを u とする。一方, K′ 系における観測量はプライム (′) を付して表すことにする。相対論的速度の変換則 (5.9) に注意して, $\sqrt{1 - u'^2/c^2}$ を計算すると,

$$\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}} = \frac{\sqrt{(1 - \beta^2)(1 - u^2/c^2)}}{1 - u_x v/c^2},$$

が得られる。K 系における 4 元速度ベクトル (5.8) の定義は, K′ 系でも同様, すなわち,

$$[u'^\mu] = \left[\frac{c}{\sqrt{1 - u'^2/c^2}}, \quad \frac{\boldsymbol{u}}{\sqrt{1 - u'^2/c^2}}\right],$$

である。この法則性に注意して, K′系 における速度成分 u'_x, u'_y, u'_z を特定すると,

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - u_x v/c^2}, \qquad u'_y = \frac{\sqrt{1 - u^2/c^2}\,u_y}{1 - u_x v/c^2}, \qquad u'_z = \frac{\sqrt{1 - u^2/c^2}\,u_z}{1 - u_x v/c^2},$$

が得られる。いうまでもなく, 第 3 章で導出した速度変換則が得られた。この速度ベクトルのように, 4 元と 3 元で異なる形式の物理量は, 変換則が異なるように見えるが, ここで実演したように 4 元ベクトルの変換則から 3 元ベクトルの変換則を導くことができる。ここで実演した速度変換は, 計算が容易とは言えないが, 物理的な考察をすることなく, 数学的な処方にしたがうだけで変換則を導出できることが共変形式で記述したことの意義であるといえる。

運動量は, 我々が観測する運動量と 4 元ベクトルが形式的に一致する例である。運動量に対応する 4 元ベクトル (4 元運動量ベクトル) は, 4 元速度ベクトル u^μ に物体の質量 m を乗じて得られるベクトル:

$$p^\mu \equiv m u^\mu = m \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}, \tag{5.10}$$

を考えよう。この 4 元ベクトルは,

$$[p^\mu] = \left[\ \frac{mc}{\sqrt{1-u^2/v^2}}, \quad \frac{m\boldsymbol{u}}{\sqrt{1-u^2/v^2}} \ \right] = \left[\ E/c, \quad \boldsymbol{p} \ \right],$$

のように書くことができるので, エネルギー E と運動量 $\boldsymbol{p}$ と同じ形式で数学表現されている。しかも, 4 元運動量は反変ベクトルをスカラ倍した量なので, 反変ベクトルである。よって, 4 元運動量は座標変換と同一の変換:

$$p'^0 = \frac{p^0 - \beta p^1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad p'^1 = \frac{p^1 - \beta p^0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad p'^2 = p^2, \qquad p'^3 = p^3,$$

にしたがう。この変換式は, まさに運動量とエネルギーの変換 (3.20) そのものである。運動量とエネルギーの関連性は, 座標変換の共変性から導かれる性質ということができるだろう。

5.4　4 元加速度と力

前節に引き続き, 4 元速度 u^μ をさらに固有時間 τ で微分すると, やはり, 反変ベクトルが得られる。この反変ベクトルは, 4 元速度を固有時間について微分したベクトルなので, 4 元加速度をよばれる。記号を用いて書くと, 4 元加速度は,

$$B^\mu = \frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2}, \tag{5.11}$$

のように定義される。相対論的な性質であるが, 4 元加速度は 4 元速度と直交する。なぜなら, ミンコフスキー空間における線素の 2 次形式 $\eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu = -c^2\mathrm{d}\tau^2$ を変形して得られる $\eta_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -c^2$ の両辺を τ について微分すると,

$$\eta_{\mu\nu}u^\mu B^\nu = 0,$$

が導かれるからである。この結果は, 4 元加速度と 4 元速度の内積がゼロであること, すなわち, 4 元加速度が 4 元速度と直交することを表している。

上のように定義された 4 元加速度 (5.11) は, 3 次元の加速度ベクトル $\dot{\boldsymbol{u}}$ との間の関係はいささか複雑である。前節で定義した 4 元速度ベクトルが 3 元速度ベクトルとの間にローレンツ因子 $(1-u^2/c^2)^{-1/2}$ を含んでいたため, それをさらに τ で微分すると, 複雑さが増し,

$$[B^\mu] = \left[\frac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u})/c}{(1-u^2/c^2)^2}, \quad \frac{\boldsymbol{a}}{1-u^2/c^2} + \frac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u})/c}{(1-u^2/c^2)^2}\frac{\boldsymbol{u}}{c} \right],$$

なる関係で記述される。この式の右辺は何かに似ていないだろうか? この式は (4.41) で導出した力のベクトルと類似した形をしている。よって, 4 元加速度 B^μ に質量 m を乗じた量:

$$K^\mu = m\frac{\mathrm{d}^2 u^\mu}{\mathrm{d}\tau^2}, \tag{5.12}$$

を 4 元力として定義するのがよさそうである。しかも, この式の形はニュートン力学における力の定義 $\boldsymbol{K} = m\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t$ と類似しているので, この式を相対論的力と呼んでも違和感はないだろう。このように定義された 4 元力は, 3 次元の力ベクトル $\boldsymbol{K}$ との間に,

$$[K^\mu] = \left[\frac{P/c}{\sqrt{1-u^2/c^2}},\quad \frac{\boldsymbol{K}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right],$$

なる関係が成立する。ここで, P は (3.17) に示した仕事率である。この 4 元力も反変ベクトルであるので, 座標変換と同じ変換にしたがう。つまり, K 系に対して x 軸方向に速度 v で運動する K$'$ 系からみた 4 元力 K'^μ は

$$K'^0 = \frac{K^0-\beta K^1}{\sqrt{1-\beta^2}},\qquad K'^1 = \frac{K^1-\beta K^0}{\sqrt{1-\beta^2}},\qquad K'^2 = K^2,\qquad K'^3 = K^3,$$

のように変換される。当然, この式から 3 次元の力の変換 (4.42) も容易に導出できる。4 元力ベクトルの成分が 4 元速度ベクトルに類似した成分表示になっているため, 3 元力ベクトルに関するローレンツ変換は速度ベクトルと類似した変換式にしたがうわけだ。

5.5 光行差とドップラ効果

本章では, 既に運動学の章で導いたローレンツ変換に対する各物理量の変換を共変形式で記述した。これに対し, 本節では, 共変形式を用いて新たに物理量の変換を導出し, 共変形式が相対性理論記述において有効な手段であることを示す。本節のタイトルのように, 光のドップラ効果を求めてみよう。

マクスウェルが彼の方程式によって予言したように, 光は電磁波の一種である。例えば, 平面波であるような光を考えると, その波動関数は,

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \exp i(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}),$$

となる。ただし, $\boldsymbol{k} \equiv [k_x, k_y, k_z]$ は波数ベクトルと呼ばれ, 光波の伝播方向を向いているベクトルである。しかも, 光の波長を λ としたとき, 波数ベクトルの長さは $k = 2\pi/\lambda$ となる。また, ω は光の角周波数である。電磁気学の章で述べたように, 電磁波の位相 φ は座標変換に対して不変であるので,

$$\varphi = \omega t - k_x x - k_y y - k_z z,$$

はスカラである。さらに, このスカラを座標について偏微分して得られる 4 元ベクトル:

$$k_\mu = -\frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu},$$

を定義しよう。この 4 元ベクトルはスカラの勾配ベクトルであるので, 共変ベクトルである。また, このベクトルに計量テンソル $\eta^{\mu\nu}$ を掛けて縮約をとれば反変ベクトル:

$$k^\mu = \eta^{\mu\nu} k_\nu,$$

に変換することができる。さて, この反変ベクトルを具体的に書き下すと,

$$k^\mu = \left[\ \omega/c, \quad \boldsymbol{k}\ \right],$$

となることは明らかであろう。新たに定義された反変ベクトルは, 角周波数と波数ベクトルを成分とすることから, 4 元波数ベクトルとよばれる。既に学んだように, 座標がローレンツ変換されれば, 反変ベクトルもまったく同じ変換にしたがうので, K 系に対して x 軸方向に速度 v で運動する K$'$ 系から見た 4 元波数ベクトル k'^μ は

$$k'^0 = \frac{k^0 - \beta k^1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad k'^1 = \frac{k^1 - \beta k^0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad k'^2 = k^2, \qquad k'^3 = k^3,$$

なる変換にしたがう。この変換式を角周波数と 3 元波数ベクトルとの表記に書き換えると,

$$\omega' = \frac{\omega - v\, k_x}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad k'_x = \frac{k_x - v\,\omega/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad k'_y = k_y, \qquad k'_z = k_z,$$

が得られる。もちろん, この変換式は第 2 章のように, 座標をローレンツ変換した上で位相が不変となるように角周波数と波数ベクトルを決定する方法によっても導出できる。しかし, ベクトルの共変性を利用すればほとんど計算をすることなく, 波数ベクトルの変換を得ることができる。これが, 共変性を利用した数学の利点である。

5.6 電磁場の共変形式

力学における力や運動量では, 共変形式を用いることで相対論的な関係式を簡潔に記述することができた。電磁場の場合においても共変形式を用いることで方程式を簡潔に記述することができる。本節では, 真空中におけるマクスウェルの方程式を共変形式によって記述する。

電磁場を共変形式で記述するために, 静電ポテンシャル ϕ とベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ を持ち出そう。これらは, 電磁場の表記を簡略化するために導入される数学的な量であり, 自由度をもった量である。その自由度を規定するため,

$$\nabla\cdot \boldsymbol{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0,$$

なるローレンツ条件をしばしば適用する。当然, 相対性原理があるためローレンツ条件はいかなる慣性系でも成立しなければならない。このローレンツ条件は, 電磁場を共変形式で記述する上で重要な役割を果たす。というのは,

$$[\phi^\mu] = \left[\ \phi/c, \quad \boldsymbol{A}\ \right], \tag{5.13}$$

なるベクトル ϕ^μ を定義すると, ローレンツ条件は,

$$\frac{\partial \phi^\mu}{\partial x^\mu} = 0, \tag{5.14}$$

のような形で記述できるからである。ローレンツ条件の右辺はいかなる慣性系でも, 必ず, ゼロであるので, その量はスカラである。静電ポテンシャル ϕ とベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ を (5.13) のような 4 元ベクトルとして定義すれば, その 4 元ベクトルの発散がローレンツ条件と一致するのである。当然, 反変ベクトル ϕ^μ には,

$$\phi'^0 = \frac{\phi^0 - \beta\phi^1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad \phi'^1 = \frac{\phi^1 - \beta\phi^0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad \phi'^2 = \phi^2, \qquad \phi'^3 = \phi^3, \tag{5.15}$$

なるローレンツ変換が成立する。この式を, 通常の静電ポテンシャルとベクトルポテンシャルの記号を用いて書くと,

$$\phi' = \frac{\phi - vA_x}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad A'_x = \frac{A_x - \dfrac{v}{c^2}\phi}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad A'_y = A_y, \qquad A'_z = A_z,$$

が得られるが, これは既に学んだ変換式と一致している。

これから, 電磁場を表す $\boldsymbol{E}$ や $\boldsymbol{B}$ の共変形式を探すわけだが, ここで $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ を参考にしてみよう。これは, 磁束密度 $\boldsymbol{B}$ がベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ の回転であることを意味している。これに習って, 4 元ベクトル ϕ^μ のテンソル回転:

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial \phi_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \phi_\mu}{\partial x^\nu}, \tag{5.16}$$

を評価してみよう。ここで, $\phi_\mu = \eta_{\mu\alpha}\phi^\alpha$ である。この定義式より, 2 階のテンソル $F_{\mu\nu}$ は, $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$ なる交代テンソルである。つまり, $F_{\mu\nu}$ は独立な 6 個の成分をもつテンソルである。この式を実際に計算してみると,

$$[F_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ E_z/c & B_y & -B_z & 0 \end{bmatrix}, \tag{5.17}$$

が得られる。つまり, 独立な 6 成分のうち, 3 成分は電場 $\boldsymbol{E}$ を表し, 残りの 3 成分は磁束密度 $\boldsymbol{B}$ を表す。この 2 階の共変テンソルは座標変換に対して,

$$F'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}F_{\lambda\sigma}, \tag{5.18}$$

のように変換される。その座標変換がローレンツ変換であれば, $\partial x^\lambda/\partial x'^\mu$ はその逆変換行列, すなわち,

$$\left[\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu}\right] = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

となるので, これを (5.18) に代入すれば, 電場の変換 (4.17) と磁束密度の変換 (4.17) が得られる。ただし, $\gamma \equiv (1-\beta^2)^{-1/2}$ とおいた。この 2 階の共変テンソル $F_{\mu\nu}$ は, (5.16) によって定義されているため, テンソルの回転に関して,

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} = 0, \tag{5.19}$$

なる関係が成り立つ。この関係式がマクスウェルの方程式のうちどの法則に対応しているか調べてみよう。$F_{\mu\nu}$ が交代テンソルであることから, (μ, ν, λ) のうち 2 つに同じ番号が当てられた場合, そのテンソルの回転は明示的にゼロとなる。明示的にはゼロとならない成分について回転を計算すると,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_{12}}{\partial x^3} + \frac{\partial F_{31}}{\partial x^2} + \frac{\partial F_{23}}{\partial x^1} &= \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}, \\
\frac{\partial F_{02}}{\partial x^3} + \frac{\partial F_{30}}{\partial x^2} + \frac{\partial F_{23}}{\partial x^0} &= \frac{1}{c}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + \frac{\partial B_x}{\partial t}\right), \\
\frac{\partial F_{01}}{\partial x^3} + \frac{\partial F_{30}}{\partial x^1} + \frac{\partial F_{13}}{\partial x^0} &= -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial t}\right), \\
\frac{\partial F_{01}}{\partial x^2} + \frac{\partial F_{20}}{\partial x^1} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x^0} &= \frac{1}{c}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial t}\right),
\end{aligned}$$

となる。上で述べたように, これらの成分もゼロとなるので, 最初の成分は磁束保存の法則, 残りの 3 成分はファラデーの法則に対応する。

次にテンソル $F_{\mu\nu}$ の発散を計算してみよう。ただし, 共変テンソルでは発散を計算するには都合が悪いので, $F^{\mu\nu} \equiv \eta^{\mu\lambda}\eta^{\nu\sigma}F_{\lambda\sigma}$ のように変換された 2 階の反変テンソルを用いることにする。リーマン幾何学における 2 階のテンソルの発散は, ミンコフスキー空間のように曲率をもたない座標系に限り,

$$\mu_0 j^\mu = \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu},$$

のように計算される。この式は, テンソル $F^{\mu\nu}$ の発散が反変ベクトルであることも意味している。ただし, 後の便宜のため, 左辺には真空中の透磁率 μ_0 を係数として付加しておいた。具体的に発散を計算してみると,

$$\frac{\partial F^{0\nu}}{\partial x^\nu} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) = \mu_0\, c\rho,$$

$$\frac{\partial F^{1\nu}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t} = \mu_0\, j_x,$$
$$\frac{\partial F^{2\nu}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_y}{\partial t} = \mu_0\, j_y,$$
$$\frac{\partial F^{3\nu}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_z}{\partial t} = \mu_0\, j_z,$$

が得られる。ただし, これらの式の右辺への変形に関しては, 取り扱っている電磁場が真空であることを仮定し, 真空中の誘電率と透磁率に関する関係 $\varepsilon_0\mu_0 = 1/c^2$ を用いた。つまり, 計算したテンソルの発散は真空中におけるガウスの法則とアンペールの法則に対応する。また, この結果から, 電荷密度 ρ と電流密度 $\boldsymbol{j}$ が,

$$[j^\mu] = \left[\ c\rho,\quad \boldsymbol{j}\ \right], \tag{5.20}$$

のような反変ベクトル s^μ で表現できることを意味している。これまでと同様, s^μ はローレンツ変換に対して,

$$j'^0 = \frac{j^0 - \beta j^1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad j'^1 = \frac{j^1 - \beta j^0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad j'^2 = j^2, \qquad j'^3 = j^3,$$

のように変換される。これを, 電荷密度 ρ と電流密度 $\boldsymbol{j}$ に関して明示的に記述すると,

$$\rho' = \frac{\rho - \dfrac{v}{c^2} j_x}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad j'_x = \frac{j_x - v\,\rho}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad j'_y = j_y, \qquad j'_z = j_z,$$

となる。これも既に導出されている変換式と一致する。

改めて, 結果を書くと, テンソル表現によってマクスウェルの方程式は,

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} = 0, \tag{5.21}$$
$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = \mu_0 j^\mu, \tag{5.22}$$

のように書き換えることができる。既に述べたように, (5.21) は磁束保存の法則とファラデーの法則に, (5.22) は真空中におけるガウスの法則とアンペールの法則に対応する方程式である。ベクトル記法によるマクスウェルの方程式もシンプルにまとまった方程式であるが, 共変形式を用いると, その方程式もさらに簡潔にまとまっている。

5.7 分極テンソル

前節では真空中のマクスウェルの方程式をテンソルを用いて記述した。それを引き継ぎ, 本節では物質内のマクスウェルの方程式をテンソルによって記述する。前節で記述し

たうち, (5.21) は物質内でも成り立つ。修正が必要なのは, (5.22) である。簡単な方法としては, 前節に習って,

$$[H^{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} 0 & cD_x & cD_y & cD_z \\ -cD_x & 0 & H_z & -H_y \\ -cD_y & -H_z & 0 & H_x \\ -cD_z & H_y & -H_x & 0 \end{bmatrix}, \tag{5.23}$$

のようなテンソルを定義することである。このテンソルを用いれば, ガウスの法則とアンペールの法則を,

$$\frac{\partial H^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = j^\mu$$

の形に書くことができる。座標変換に関しては, 2 階の反変テンソルである $H^{\mu\nu}$ は,

$$H'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} H^{\lambda\sigma},$$

にしたがう。実際に計算してみれば, この変換式が, 電束密度に関する変換 (4.15) と, 磁場に関する変換 (4.16) に対応していることがわかる。さて, 新たに定義されたテンソル $H^{\mu\nu}$ は $F^{\mu\nu}$ とどのような関係があるだろうか? 古典的な電磁気学のように $\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$ や $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{B}/\mu$ を期待してはいけない。既に説明したように, この関係が成り立つのは取り扱う物質との相対速度がゼロの場合に限る。一般的には,

$$H^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0} F^{\mu\nu} - M^{\mu\nu}, \tag{5.24}$$

のような関係を仮定すればよいだろう。この式に付加された $M^{\mu\nu}$ は物質によって異なる要素であり, 真空中ではゼロになる。しかも, $F^{\mu\nu}$ と $H^{\mu\nu}$ がテンソルであるので, $M^{\mu\nu}$ もテンソルである。この新たなテンソルの正体を決定するには,

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}, \qquad \boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \boldsymbol{M},$$

の関係を用いればよい。ここで, $\boldsymbol{P}$ は分極ベクトル, $\boldsymbol{M}$ は磁化ベクトルである。この関係より, テンソル $M^{\mu\nu}$ が,

$$[M^{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} 0 & -cP_x & -cP_y & -cP_z \\ cP_x & 0 & M_z & -M_y \\ cP_y & -M_z & 0 & M_x \\ cP_z & M_y & -M_x & 0 \end{bmatrix}, \tag{5.25}$$

であることが, 容易に導かれる。この新たなテンソル $M^{\mu\nu}$ は分極テンソルと呼ぶことにする。また, このテンソル性より, 分極ベクトル $\boldsymbol{P}$ と磁化ベクトル $\boldsymbol{M}$ が, (4.61), (4.62) の変換にしたがうことは明らかである。

上のような考察によって, 物質中の電磁場に関するマクスウェルの方程式を共変形式で書くことができる。共変形式による電磁場の表記は, 電場と磁束密度を表現するテンソル $F^{\mu\nu}$, 電束密度と磁場を表現するテンソル $H^{\mu\nu}$, それから, 電荷密度と電流密度を表現する 4 元ベクトル s^μ を用いて,

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} = 0, \tag{5.26}$$

$$\frac{\partial H^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = j^\mu, \tag{5.27}$$

のように記述される。ベクトル形式ではマクスウェルの方程式は 4 つの方程式であったが, 相対性理論における共変形式では 2 つの方程式にまとめられている。ついでに, ガウスの法則とアンペールの法則を表す (5.27) の発散を評価してみよう。

$$\frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} = \frac{\partial^2 H^{\mu\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\nu}, \tag{5.28}$$

ここで, テンソル $H^{\mu\nu}$ が交代テンソルであることを利用すると,

$$\text{RHS of (5.28)} = -\frac{\partial^2 H^{\nu\mu}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = -\frac{\partial^2 H^{\mu\nu}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} = -\frac{\partial^2 H^{\mu\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\nu}, \tag{5.29}$$

のように変形される。この数式変形は, 縮約をとる添え字 μ と ν の記号を入れ替え, その後, 微分演算子の順序を入れ替えることによって実行されている。このような変形をしたとしても, (5.28) と (5.29) はまったく同じ式であるはずなので等号で結ぶと,

$$\frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} = 0 \tag{5.30}$$

であることがわかる。この結果は,

$$\nabla\cdot\boldsymbol{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

すなわち, 電荷に関する連続の方程式である。つまり, 電荷に関する連続の方程式は, 4 元電流密度ベクトルの発散がゼロであることを表す数式となる。

ところで, 4 元電流密度 j^μ を成分表示すると, $[j^\mu] = [c\rho, \boldsymbol{j}]$ のようになる。そのうち, ρ は電場 $\boldsymbol{E}$ が存在しなくても存在する電荷密度, いわゆる真性電荷密度である。もう一方, $\boldsymbol{j}$ は伝導電流密度である。物質内部では, 電荷密度や電流密度に, 分極や磁化による影響が重ね合わされる。分極や磁化による電荷密度と電流密度への影響は,

$$\left[\ -c\,\nabla\cdot\boldsymbol{P},\quad \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} + \nabla\times\boldsymbol{M}\ \right] = \left[\frac{\partial M^{\mu\nu}}{\partial x^\nu}\right],$$

なる関係より, 分極テンソル $M^{\mu\nu}$ の各行の発散によって表される。この発散によってつくられるベクトルは, 第 0 成分が分極電荷密度を表し, 残りの 3 成分が分極による変位電流

密度と磁化電流密度の和になっている。よって, 電場や磁束密度中の物質内部の全電荷密度と電流密度を 4 元電流密度 $\tilde{\jmath}^{\mu} \equiv [c\tilde{\rho}, \tilde{\boldsymbol{\jmath}}]$ とすれば,

$$\tilde{\jmath}^{\mu} = \frac{\partial H^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial M^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} = \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}}, \tag{5.31}$$

のように書くことができる。

5.8 マクスウェルの応力テンソル

電場 $\boldsymbol{E}$ と磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の中を電荷 e をもつ荷電粒子が速度 $\boldsymbol{u}$ で運動するとき, その荷電粒子には, $\boldsymbol{K} = e(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B})$ のローレンツ力が作用する。すでに説明したように, ローレンツ力は運動する電荷に働く相対論的な力であり, ローレンツ変換に対して共変性を示す力である。

対象が荷電粒子ではなく, 連続的に広がる物質についても同様の考察ができる。例えば, その物質中の全電荷密度を $\tilde{\rho}$, 全電流密度を $\tilde{\boldsymbol{\jmath}}$ としたとき, 物質中の単位体積あたりに作用する電磁気力は, $\boldsymbol{f} = \tilde{\rho}\boldsymbol{E} + \tilde{\boldsymbol{\jmath}}\times\boldsymbol{B}$ となる。この単位体積あたりの力を共変形式で書くと,

$$f^{\mu} = F^{\mu\nu}\tilde{\jmath}_{\nu}, \tag{5.32}$$

となることは容易にわかるだろう。ただし, 物質中の全電荷密度と全電流密度を表す 4 元ベクトル $\tilde{\jmath}^{\mu}$ は, (5.31) の関係を満たす。電磁気力の密度 (5.32) は, ある 2 階のテンソル $T^{\mu\nu}$ を用いて,

$$f^{\mu} = \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}}, \tag{5.33}$$

のような形で表すことができる。本節では, この関係を導出し, テンソル $T^{\mu\nu}$ の物理的な意味を考察する。

まず, (5.31) の関係を用いて (5.32) の右辺を変形すると,

$$\begin{aligned}\text{RHS of (5.32)} &= \frac{1}{\mu_0}\eta_{\nu\lambda}F^{\mu\nu}\tilde{\jmath}^{\lambda} = \frac{1}{\mu_0}\eta_{\nu\lambda}F^{\mu\nu}\frac{\partial F_{\lambda\alpha}}{\partial x^{\alpha}} \\ &= \frac{1}{\mu_0}\left[\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}(\eta_{\nu\lambda}F^{\mu\nu}F^{\lambda\alpha}) - \eta_{\nu\lambda}F^{\lambda\alpha}\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}}\right],\end{aligned} \tag{5.34}$$

となるが, この式の右辺第 2 項に透磁率 μ_0 を乗じると,

$$\eta_{\nu\lambda}F^{\lambda\alpha}\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} = \eta^{\nu\beta}\eta^{\nu\kappa}\eta_{\nu\lambda}F^{\lambda\alpha}\frac{\partial F_{\beta\kappa}}{\partial x^{\alpha}} = \eta^{\mu\beta}F^{\lambda\alpha}\frac{\partial F_{\beta\lambda}}{\partial x^{\alpha}}, \tag{5.35}$$

が得られる。そこで, テンソル $F^{\mu\nu}$ が交代テンソルであることを利用して, (5.35) の右辺を変形すると,

$$\text{RHS of (5.35)} = \eta^{\mu\beta}F^{\alpha\lambda}\frac{\partial F_{\lambda\beta}}{\partial x^{\alpha}} = \eta^{\mu\beta}F^{\lambda\alpha}\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x^{\lambda}}, \tag{5.36}$$

となる。一方, テンソル $F^{\mu\nu}$ の回転がゼロであること (磁束保存の法則とファラデーの法則) に注意すると, (5.35) の右辺は,

$$\text{RHS of (5.35)} = -\eta^{\mu\beta}F^{\lambda\alpha}\left(\frac{\partial F_{\lambda\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x^{\lambda}}\right), \tag{5.37}$$

のようにも変形される。当然, (5.36) と (5.37) は同じ式であるので, 等号で結ぶことができ,

$$\eta^{\mu\beta}F^{\lambda\alpha}\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial\lambda} = -\frac{1}{2}\eta^{\mu\beta}F^{\lambda\alpha}\frac{\partial F_{\lambda\alpha}}{\partial\beta}, \tag{5.38}$$

なる関係が得られる。この関係式の左辺と右辺を, それぞれ, さらに変形すると,

$$\begin{aligned}\text{LHS of (5.38)} &= \eta_{\nu\lambda}F^{\lambda\alpha}\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}},\\ \text{RHS of (5.38)} &= -\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}(\eta^{\mu\alpha}F^{\lambda\nu}F_{\lambda\nu}),\end{aligned}$$

となるので, (5.38) の関係は,

$$\eta_{\nu\lambda}F^{\lambda\alpha}\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} = -\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}(\eta^{\mu\alpha}F^{\lambda\nu}F_{\lambda\nu}), \tag{5.39}$$

のように書き換えられる。この関係を (5.34) に代入すると, 単位体積あたりに作用する電磁気力は,

$$f^{\mu} = -\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left(\eta_{\nu\lambda}F^{\mu\nu}F^{\alpha\lambda} - \frac{1}{4}\eta^{\mu\alpha}F^{\lambda\nu}F_{\lambda\nu}\right), \tag{5.40}$$

のように書くことができる。ここで,

$$T^{\mu\nu} = -\frac{1}{\mu_0}\left(\eta_{\alpha\lambda}F^{\mu\alpha}F^{\nu\lambda} - \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F^{\lambda\alpha}F_{\lambda\alpha}\right), \tag{5.41}$$

なる量を定義すると, その量がテンソルの 1 次結合であるので, やはり, $T^{\mu\nu}$ はテンソルであり, (5.33) が成立することが示された。

それでは, 新たに定義されたテンソル $T^{\mu\nu}$ がどのような量を表すのかを調べてみよう。まず, $F^{\mu\nu}$ が交代テンソルであるので, $T^{\mu\nu}$ は対象テンソル, すなわち, $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$ が成り立つことがわかる。さらに, 具体的に要素を計算してみると,

$$T^{00} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0\boldsymbol{E}^2 + \frac{\boldsymbol{B}^2}{\mu_0}\right), \tag{5.42}$$

$$T^{0k} = \frac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})_k, \tag{5.43}$$

$$T^{ik} = \varepsilon_0E_iE_k + \frac{1}{\mu_0}B_iB_k - \frac{1}{2}\delta^{ik}\left(\varepsilon_0\boldsymbol{E}^2 + \frac{\boldsymbol{B}^2}{\mu_0}\right), \tag{5.44}$$

が導かれる。ここで, 添え字 i と k は 1 から 3 までの整数である。まず, (5.42) は単位体積あたりの電磁エネルギーである。また, (5.43) はポインティングベクトルと呼ばれる電磁エネルギーの流れを表すベクトルである。実際に f^0 について展開してみると,