

目次

| | |
|---------------------------|-----------|
| 第1章 相対性原理 | 1 |
| 1.1 相対運動 | 1 |
| 1.1.1 相対速度 | 1 |
| 1.1.2 ガリレイ変換 | 2 |
| 1.2 相対性と慣性系 | 4 |
| 1.3 ニュートン力学の基本原則 | 5 |
| 1.3.1 座標変換に対する不変性 | 7 |
| 1.3.2 ラプラス演算子の不変性 | 9 |
| 1.3.3 ガリレイ変換に対する不変性 | 10 |
| 1.4 マクスウェルの方程式の不変性 | 12 |
| 1.5 マイケルソン・モーレーの実験 | 14 |
| 1.6 ローレンツ変換 | 17 |
| 1.7 運動する荷電粒子による電磁場 | 21 |
| | |
| 第2章 アインシュタインの相対性原理 | 25 |
| 2.1 光速不変の原理 | 25 |
| 2.2 時計合わせ | 26 |
| 2.3 慣性系間の座標変換 | 28 |
| 2.4 同時性と因果性 | 31 |
| 2.5 ローレンツ収縮 | 32 |
| 2.5.1 長さの収縮 | 33 |

| | | |
|------------|------------------|-----------|
| 2.5.2 | 時間の収縮 | 34 |
| 2.5.3 | 斜めのローレンツ収縮 | 36 |
| 2.6 | 幾何学的解釈 | 39 |
| 2.6.1 | ミンコフスキー時空 | 40 |
| 2.6.2 | 時空の虚数角度回転 | 41 |
| 2.6.3 | タキオンと因果律 | 45 |
| 第3章 | 運動学 | 49 |
| 3.1 | 速度変換 | 49 |
| 3.2 | 加速度変換 | 52 |
| 3.3 | 等加速度運動 | 54 |
| 3.4 | 運動量 | 56 |
| 3.5 | 相対論的運動エネルギー | 59 |
| 3.6 | 質量とエネルギー | 61 |
| 3.7 | 質量増大の法則 | 63 |
| 第4章 | 電磁気学 | 65 |
| 4.1 | 電磁場のローレンツ変換 | 65 |
| 4.1.1 | 電場と磁場 | 65 |
| 4.1.2 | 電荷と電流 | 69 |
| 4.2 | 磁場と相対性理論 | 70 |
| 4.3 | 磁場の発生原理 | 71 |
| 4.3.1 | 考察の準備 | 72 |
| 4.3.2 | 直線電流と平行に運動する荷電粒子 | 74 |
| 4.3.3 | 直線電流と垂直に運動する荷電粒子 | 76 |
| 4.3.4 | 非相対性理論との比較 | 80 |
| 4.4 | 光行差とドップラ効果 | 81 |

| | | |
|------------|-------------------------|------------|
| 4.4.1 | 位相の不変性からの導出 | 81 |
| 4.4.2 | 光行差の物理的解釈 | 84 |
| 4.4.3 | ドップラ効果と光量子仮説 | 86 |
| 4.5 | 力の変換 | 91 |
| 4.6 | 運動する物質内の電磁場 | 94 |
| 4.7 | 分極ベクトルと磁化ベクトル | 97 |
| 4.8 | 電磁放射 | 99 |
| 4.8.1 | 荷電粒子のエネルギー損失 | 99 |
| 4.8.2 | 電磁放射の反作用 | 104 |
| 第5章 | 共変形式 | 109 |
| 5.1 | 数学的準備 | 109 |
| 5.1.1 | 座標と座標変換 | 109 |
| 5.1.2 | スカラとベクトル | 110 |
| 5.1.3 | 2階テンソル | 111 |
| 5.1.4 | 計量テンソル | 112 |
| 5.2 | ミンコフスキー計量 | 113 |
| 5.3 | 4元速度と運動量 | 114 |
| 5.4 | 4元加速度と力 | 116 |
| 5.5 | 光行差とドップラ効果 | 117 |
| 5.6 | 電磁場の共変形式 | 118 |
| 5.7 | 分極テンソル | 121 |
| 5.8 | マクスウェルの応力テンソル | 124 |
| 付録A | 応力テンソル | 127 |
| A.1 | 連続体の運動方程式 | 127 |
| A.2 | 応力テンソル | 129 |

| | |
|-----------------------------|-----|
| 付録 B 電磁場の運動量密度 | 131 |
| B.1 Poynting ベクトル | 131 |
| B.2 Maxwell の応力 | 133 |

第1章 相対性原理

アインシュタインの相対性理論では、しばしば、ある物理現象に「相対性が成立する」、または、「相対的である」という記述がみられる。そもそも、相対性とは何であろうか？本章ではアインシュタインの相対性理論を取り扱う前の段階として、相対性とは何かを説明し、相対性が成立する場合の数学的記述を紹介する。数学記述によって、ニュートン力学が電磁気学を取り扱う際に、相対性が破綻することを紹介する。さらに、電磁気学において相対性が成立するような物理学の修正を考察する。

1.1 相対運動

相対性について説明する前に相対運動について考えよう。相対運動とは、絶対的な運動ではなく、ある観測者から見た運動状態である。例えば、走行中の自動車から見ると、対向車が大きな速度で後ろに走り抜けていくように見えるのが相対運動に相当する。

1.1.1 相対速度

走行する自動車から見たとき、街路樹は後ろに移動するように見え、同じ方向に走行する自動車との距離がゆっくりと変化するのに対し、対向車は一瞬で後ろに移動する。その動きを議論するには相対速度という概念を用いると便利である。

地上を基準にして考え、 x 軸上に道路が直線的に伸びているとする。自動車 A が正の方向に速さ v で、自動車 B が同じ方向に速さ u で運動している。自動車 A から見ると、自動車 B の速度が $u - v$ であると考えたのではないだろうか。本当にそうなのか？それを検証するため、自動車の位置を考えよう。時刻 $t = 0$ のとき、自動車 A が $x = 0$ の位置に、自動車 B が $x = x_0$ の位置に存在するならば、任意の時刻において、自動車 A と B は、それぞれ、

$$x_A = vt, \quad x_B = ut + x_0,$$

となる。自動車 B と自動車 A の位置の差は、

$$x_B - x_A = (u - v)t + x_0,$$

である。この数式が正であれば自動車 B が自動車 A より前に存在する。言い換えると、自動車 A から見ると、自動車 B が距離 $(u - v)t + x_0$ だけ前方に存在する。その距離は単位時間あたり、 $u - v$ ずつ増加する。つまり、自動車 A から見ると自動車 B は単位時間あたり距離 $u - v$ だけ前方に移動している。これは、自動車 B が速度 $u - v$ で前進しているように見えることを意味する。確かに自動車 A から見た自動車 B の速度が $u - v$ であることが示された。自動車 A から見た自動車 B の速度は、自動車 A に対する相対速度と呼ばれる。

具体的な速度を代入してみよう。自動車 A が 40 km/h で運動し、自動車 B が 60 km/h で同じ方向に運動しているとしよう。その場合、自動車 A から見ると、自動車 B は 20 km/h で運動しているように見える。次に、自動車 B が逆方向に 60 km/h で運動している場合を考えよう。この例では自動車 B の速度を -60 km/h と考えればよい。その場合、相対速度が -100 km/h となるので、自動車 A から見ると自動車 B は 100 km/h で後方に移動しているように見えるだろう。

ここまで述べた理屈で言うと、自分自身の相対速度がゼロになるはずであるから、自分自身を見ると常に静止しているように見えるはずである。しかし、それは奇妙に思えるかもしれない。計算では相対速度がゼロになるのだが、車で移動をしているとき、自分が動いているのか静止しているのかは、明確に区別できる。なぜ区別できるかという、外の景色と比較しているからであり、走行中に多少なりとも路面の凹凸を車輪を通して感じているからである。

次のような体験をしたことはないだろうか？ 駅で停止中の電車に乗っていると。隣のホームにも電車が停止していて、観測者は窓越しにその電車を見ている。そのうち、隣の電車がゆっくりと動き始めた。そのとき、動いているのは自分ではないかと錯覚したことはないだろうか？ このような錯覚を感じるのは、視界に相手の電車以外のものが存在しない場合に限られる。少なくとも、地面や建造物が見えていれば、そのような錯覚はないだろう。我々は、速度という物理量を、地面を基準に考えるからである。基準となる地面が見えなくなると、自分が動いているかどうかを誤ることがあるのだ。例えば、宇宙空間に出たらどうであろう？ 自分が動いているかどうかを知るすべがないのではないか？ そもそも、地球でさえ約 30 km/h という高速度で太陽を公転しているではないか。その運動を意識したことはないだろう。そう考えると、自分が絶対的に動いていると判定することはできず、せいぜい、何かに対して、どれくらいの相対速度で動いているとしか表現できないのだ。

1.1.2 ガリレイ変換

前項で述べた相対速度の概念はガリレイが考察していた。それを定式化し、ガリレイ変換と呼ばれる座標変換が導かれる。その座標変換は、ある基準の座標系から、運動してい

る観測者の座標系へ変換する数式を与える。

前項では、 x 軸に沿って速度 v で走行する自動車と、速度 u で走行する自動車を考えた。そのとき、自動車 A から見た自動車 B の位置が、

$$x_B - x_A = (u - v)t + x_0,$$

であることを前項で述べた。ここで、ある基準系 (地面) から見た自動車 B の位置を x 、自動車 A から見た座標を x' なる記号で記述しよう。すると、

$$x = ut + x_0, \quad x' = (u - v)t + x_0,$$

であるので、 u を消去すると、

$$x' = x - vt, \tag{1.1}$$

となる。この数式は**ガリレイ変換**と呼ばれる。この数式を時間 t で微分すると、相対速度を与える数式:

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - v,$$

が得られる。前項では $dx/dt = u$ であったので、前項での記号を用いると、相対速度が確かに $u - v$ であることが再確認できる。ガリレイ変換はさらに一般化された形式になっており、自動車 B の速度が一定速度でなくても、対象物の瞬時速度と自分の速度の差が自分から見たときの相対速度であることを表している。

ガリレイ変換 (1.1) は、3次元カルテシアン座標のベクトル成分 $[x, y, z]$ についても同様である。速度 v が x 軸方向の運動とすると、 y と z に速度 v が影響しないと考えられるので、ガリレイ変換は、

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \tag{1.2}$$

のように表現できる。この変換式を時間 t について微分すると、

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - v, \quad \frac{dy'}{dt} = \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz'}{dt} = \frac{dz}{dt},$$

となるので、相対速度も x 軸方向にしか影響しないことが導かれる。例えば、地上に静止する観測者と東に速度 v で移動する自動車 A に乗った観測者が、自動車 B を観測したとする。地上の観測者から見て、自動車 B の速度が $[u_x, u_y]$ だったとする。なお、 u_x と u_y は、それぞれ、東向きの速度成分と北向きの速度成分である。これを自動車 A から見ると、 $[u_x - v, u_y]$ となるのである。これは、観測者が変わると、観測される速度の方向が変化することを意味している。

放物運動 地上で物体を投げ上げると、地球の重力に引かれて、途中で軌跡が折り返し地上に落下する。その運動を考えよう。高さを表す座標として z を用い、地上で $z = 0$ とし、鉛直上方を正とする。そのとき、投げ出された物体の高さは、

$$z = u_0 t - \frac{1}{2} g t^2,$$

なる数式で計算できる。ここで、 u_0 は投げ上げられた物体の初速度であり、 g は重力加速度 ($\approx 9.8 \text{ m/s}^2$) である。その物体が鉛直上方に投げ上げられたと仮定すると、水平位置は時間に依存せず $x = y = 0$ である。初速度 20 m/s で鉛直方向に発射した物体を 0.1 秒間隔でプロットすると、図 1.1 (a) のようになる。それに対して、 x 軸方向に速度 $-v$ で運動する観測者から見た場合、ガリレイ変換によって発射された物体の座標は、

$$x' = vt, \quad z' = u_0 t - \frac{1}{2} g t^2,$$

となるはずだ。なお、観測者の座標系は、原点が t のとき地上から見た原点と一致するように選ばれているとした。地上に対する観測者の速度を -10 m/s とすると、観測される物体の軌跡は図 1.1 (b) に示す曲線を描く。その軌跡は、放物線と呼ばれる 2 次曲線を描く。

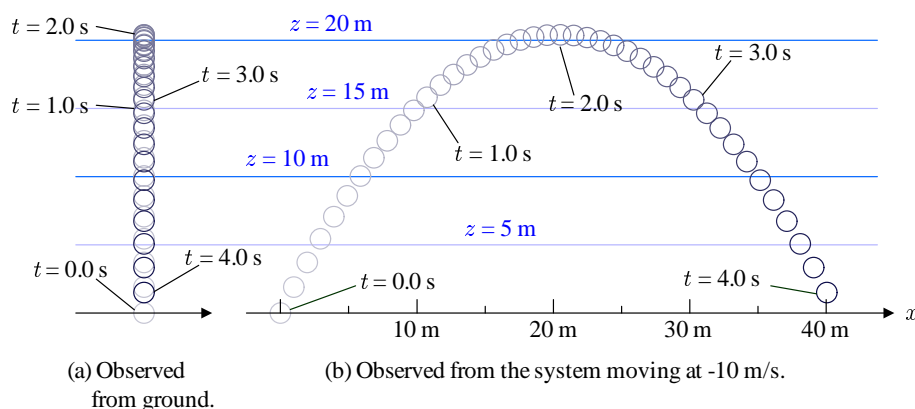


図 1.1: 観測者と放物運動

例えば、地上で真上に投げ上げたボールを走行中の電車から見ると、あたかも水平方向に 10 m/s 、鉛直方向に 20 m/s の斜めに投げ出されたように見え、その軌跡は図 1.1 (b) に示す放物線を描くのである。

1.2 相対性と慣性系

相対性という言葉が使われるのはアインシュタインの理論が最初ではない。相対性はガリレイの相対性原理で既に現れている。相対性が成立するとは、相対性原理が成立するという意味である。なお、ガリレイの相対性原理は、「ある慣性系に対して一定の相対速度

で直線運動をしている系も慣性系となり、すべての力学法則は、これらの系で同一の形式で記述できる」ことを主張している。

非常にわかりづらい記述なので、用語を説明しよう。慣性系とは加速度をもたない系である。言い換えると、等速度で運動を続ける観測者が見た世界である。ガリレイの相対性原理では、ある特定の慣性系との間でガリレイ変換で関係づけられる系を慣性系と呼ぶ。ガリレイ変換は前節で紹介した座標変換である。慣性系が、上で述べたように等速度で運動する観測者から見た世界であるので、ガリレイ変換は等速度で運動する観測者の世界を別の速度で運動する観測者の世界に置き換える座標変換である。

慣性系は、力を受けない観測者が見た世界である、と言い換えることもできる。運動する物体は力を受けない限り、永遠に一定速度で運動を続ける。地面を転がるボールが減速して、やがて静止するのは、地面から摩擦力を受けているからである。一方、氷上を滑る物体がほとんど速度が低下しないのは、摩擦力が小さいからである。そもそも、摩擦力のような力が作用しなければ、運動する物体は速度を変えないのである。

力学法則が同一の形式で記述できるとは、ある慣性系で成立する力学の基本方程式が、別の慣性系でも同一の形式で書けることを意味する。力学の基本方程式が同一形式で書けるということは、その慣性系とともに運動する観測者は、自分の運動速度を特定できないことを意味している。ましてや、自分が運動しているかどうか分からないのだ。等速度で運動を続ける観測者は、上で述べたように力を受けていないので、その観測者は自分が運動しているのか、静止しているのかを判別できない。例えば、地球は自転をしながら約 30 km/s の速さで太陽の周りを公転している。その太陽でさえ、約 250 km/s の速さで銀河系を周回している。にも関わらず、中世まで、地球が宇宙の中心に静止し、太陽、月、その他の天体が地球の周りを周回するという、いわゆる天動説が信じられてきた。そもそも、宇宙には静止状態を判別するための基準がなく、運動とはある座標系、または、観測者に対する相対的な位置の変化のことであるので、天動説のような誤解が宗教と結びつき、1,500 年もの間、存続したのである。宇宙唯一の絶対静止系の存在を否定し、相対運動によって物理現象を説明するための原理を相対性原理という。

1.3 ニュートン力学の基本原則

ニュートン力学は、微分方程式という数学的手法によって、宇宙全体の物理現象を説明することに成功した力学理論である。ニュートン力学は三つの原理: 慣性の法則、運動方程式、作用反作用の法則に基づき、機械や天体などの運動する物体に関する物理現象を十分な精度で説明することに成功している。ニュートン力学の根底に存在する三つの原理は次のように説明される。

慣性の法則 あらゆる物体は現在の速度を保とうとする。ある観測者に対して静止している物体は、力を加えない限り静止を続ける。運動している物体は、力を加えない限りその速度を一定に保つ。例えば、地上に対して 900 km/h で飛行する航空機でも、客室乗務員が地上と同じように紙コップに飲み物を注ぐことができるのは、飲み物も航空機とともに地上に対して 900 km/h で運動しているからである。航空機に乗っているものから見ると、トレイも飲み物も航空機に対して静止しているので、地上から見た速度は自分の行動とは無関係なのだ。

運動方程式 力を受けない物体が一定の速度で運動を持続することは、力を受けた物体は速度が変化することを意味する。物体の速度変化を記述するには、単位時間あたりの速度変化を用いると便利である。単位時間あたりの速度変化は加速度と呼ばれる。質量 m の物体に力 \mathbf{K} を加えたとき、物体は運動方程式:

$$\mathbf{K} = m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}, \quad (1.3)$$

にしたがって運動する。ここで、 \mathbf{r} は物体の位置ベクトルである。位置ベクトルを時間について微分した導関数は速度である。速度をさらに時間について微分した導関数が加速度である。運動方程式によると、大きな力を与えると大きな加速度が得られる。また、同じ力を与えても、質量が大きな物体は加速しにくい。

作用反作用の法則 ある物体に力を作用させたとき、その物体から力の源に対して逆方向に同じ大きさの力が作用する。この法則は、互いに接する物体間であっても、重力や電磁気力のような遠隔力であっても成立する。例えば、図 1.2 (a) のように、地面に置いた箱を考えよう。箱には地球から重力が作用し、その重力で地面を押す。それに反して地面は同じ大きさの垂直抗力 (normal reaction) を箱に作用させる。その結果、力が釣り合い、箱は地面にめり込むことも、地面から弾かれることもない。図 1.2 (b) のように二つの天体間に

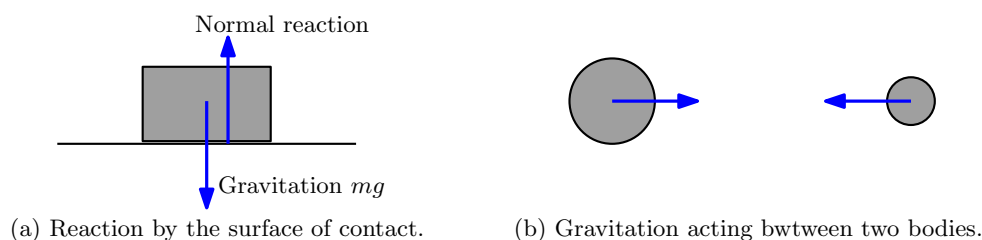


図 1.2: 作用反作用の法則の例

作用する重力も同様である。例えば、月が地球から受ける重力と同じ力で地球も月から重力を受けている。月はその重力の影響で地球の周りを公転している。地球の軌道も月による重力で揺動するが地球の質量が大きいため、その影響は小さい。しかし、月による重力は潮の干満という形で、地球に明確に作用している。

1.3.1 座標変換に対する不変性

ニュートン力学はこれらの基本原理から宇宙すべての物理現象を説明する力学理論である。言い換えれば、これらの基本原理は宇宙にいるいかなる観測者から見ても常に成立しなければならない。いかなる観測者から見た物理法則は、数学が得意とする一般化した形式で記述すればよい。具体的には、図 1.3 に示される平行移動と座標回転を適用して、物理法則の記述がどのように変化するか調べるのである。

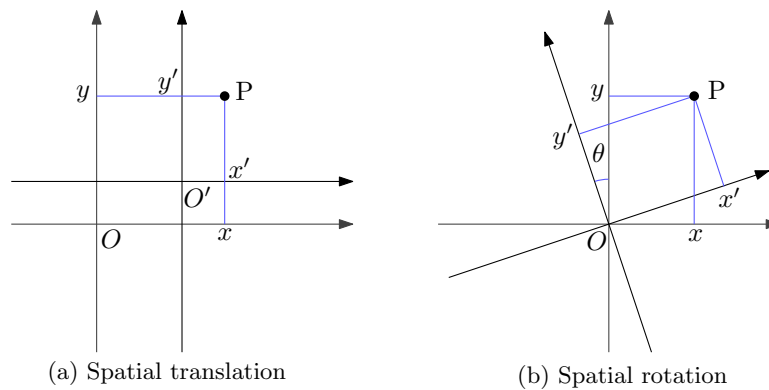


図 1.3: 空間の平行移動と回転

平行移動は観測者の位置を別の場所に置き換えたことに対応する。例えば、平行移動で物理法則の形が変わらないということは、東京で成立する物理法則が札幌や福岡でも成立することを意味する。一方、座標回転は観測者の視線を置き換えたことに対応する。例えば、回転によって物理法則の形が変わらないということは、北を向いている観測者にとって成立する物理法則は南や東を向いている観測者にとっても成立することを意味する。これを拡大解釈すると、ある場所で成立する物理法則は、宇宙の任意の場所でどの方向を向いても成立するということだ。これを一般的に表すには数学を用いるのが便利である。一般的な座標の平行移動と回転を施しても物理の基本方程式が変化しなければ、物理法則が宇宙の任意の場所で、任意の方向を向いても成立するといえるのだ。ニュートン力学における基本方程式は、先ほど紹介した運動方程式である。運動方程式が平行移動や回転によって変化しないことを証明すればよい。

平行移動 図 1.3 (a) のような平行移動を考えよう。対象とする位置を $[x, y, z]$ で表す座標系を K 系とし、平行移動した座標系を K' 系としよう。K 系から K' 系への座標変換は、

$$x' = x - \xi, \quad y' = y - \eta, \quad z' = dz - \zeta, \quad (1.4)$$

であるとする。ここで用いた ξ, η, ζ が定数であるなら、K 系と K' 系の関係は 3 次元空間における平行移動である。これらの 2 つの座標系において運動方程式を調べることは、隔

てた場所にいる2人の観測者が観測する物理現象を比較することと同じである。座標変換(1.4)の微分:

$$dx' = dx, \quad dy' = dy, \quad dz' = dz,$$

を運動方程式(1.3)に代入し、 $\mathbf{K}' \equiv \mathbf{K}$ とおくと、

$$\mathbf{K}' = m \frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2},$$

が得られる。ただし、 $\mathbf{r}' = [x', y', z']$ とおいた。また、 \mathbf{K}' はK'系で観測される力を意味する。K系を任意距離だけ平行移動したK'系において、運動方程式が形を変えずに成立するので、運動方程式は平行移動に対して不変、すなわち、宇宙の任意の場所でニュートンの運動方程式が成り立つことを意味する。

座標回転 図1.3(b)に示す座標回転についての不変性を検証してみよう。この図に記載されていないz軸は、紙面の裏面から手前に向かって伸びているとする。この座標回転は、z軸を中心にしてxy平面を右ネジの方向(この図では左回り)に角度 θ だけ回転させることによって、座標系K'を得る変換である。そのとき、各座標成分は、

$$x' = x \cos \theta + y \sin \theta, \quad y' = -x \sin \theta + y \cos \theta, \quad z' = z, \quad (1.5)$$

のように変換される。これを(1.3)に代入すると、

$$\begin{aligned} m \left(\cos \theta \frac{d^2 x'}{dt^2} + \sin \theta \frac{d^2 y'}{dt^2} \right) &= K_x, \\ m \left(-\sin \theta \frac{d^2 x'}{dt^2} + \cos \theta \frac{d^2 y'}{dt^2} \right) &= K_y, \\ m \frac{d^2 z'}{dt^2} &= K_z, \end{aligned}$$

が得られる。これらの方程式は、

$$m \frac{d^2 x'}{dt^2} = K_x \cos \theta + K_y \sin \theta, \quad m \frac{d^2 y'}{dt^2} = -K_x \sin \theta + K_y \cos \theta, \quad m \frac{d^2 z'}{dt^2} = K_z,$$

のように書き換えることもできるので、力のベクトル \mathbf{K} が、

$$K'_x = K_x \cos \theta + K_y \sin \theta, \quad K'_y = -K_x \sin \theta + K_y \cos \theta, \quad K'_z = K_z, \quad (1.6)$$

のように変換されると思えば、K'系におけるニュートンの運動方程式が

$$\mathbf{K}' = m \frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2},$$

となっていると言える。この考察結果は非常に興味深い。なぜなら、(1.6)はベクトル \mathbf{K} を反時計回りに $-\theta$ だけ回転した結果と一致するからだ。そもそも、K'系はK系を反時計

回りに θ だけ回転した座標系であった。そのため、 K' 系から見たベクトルは、 K 系から見たベクトルを反時計回りに $-\theta$ だけ回転した結果と一致するのである。

上記の考察は、相対性理論を学ぶには非常に大切な要素である。相対性理論は異なる観測者から見たときの物理現象を記述するための手段を与える物理学である。その記述には、特殊相対性理論の場合、座標変換しても物理現象が同一形式であることを要請するのだ。その要請から得られる方程式が、異なる観測者が見た物理現象というわけである。今回の例では、反時計回りに θ だけ回転した座標系から見ると、ベクトルは $-\theta$ だけ回転したベクトルとして観測されることが導き出されたのだ。

さらに、相対性理論において重要な共変性ということについて説明しよう。変換(1.6)と座標変換(1.5)を比較すると、まったく同じ形の変換であることがわかる。このように座標とまったく同じ変換をされることは**共変**と呼ばれる。共変変換の例は、日常において簡単に確認することができる。例えば、南を向いたときに太陽は天球上を左から右へ移動しているように見えるが、北を向くと、太陽は右から左へ移動しているように見える。このように観測されるのは、速度ベクトル $d\mathbf{r}/dt$ が座標回転に対して共変だからである。そのような共変性を受け入れた上で、ニュートンの運動方程式は回転運動に対して不変(本当は共変というべき)である。

1.3.2 ラプラス演算子の不変性

平行移動と座標回転という変換は、任意の場所におかれた微小ベクトル $[dx, dy, dz]$ の長さを不変に保つ¹特徴がある。その計量の不変性は、座標変換(1.4)と(1.5)を微分すればすぐにわかる。さらに、その特徴は物理学において面白い性質:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2}, \quad (1.7)$$

と等価である。この証明は容易であるので、ここでは省略する。数式(1.7)の左辺と右辺は、それぞれ、 K 系と K' 系におけるラプラス演算子である。ラプラス演算子は物理学では、しばしば現れる。その一例として、ニュートンの万有引力の法則があげられる。質量 M の質点 P が K 系の原点にあり、質量 m の質点 A が位置 \mathbf{r} に存在しているとする。このとき、万有引力定数を G とすれば、質点 A に作用する重力は

$$\mathbf{K} = -\frac{GMm}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r},$$

¹幾何学的には、この表現は正しくない。計量が変わらないという表現が正しい。

となる。これが万有引力の法則である。この法則に関して、質量 M を質点ではなく、密度 ρ で空間に分布する質量として拡張すると、 \mathbf{r} に存在する質点 A に作用する重力は、

$$\mathbf{K} = -Gm \int \frac{\rho(\mathbf{r}_p)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_p|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_p}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_p|} d^3\mathbf{r}_p,$$

のようになる。この方程式は、位置 \mathbf{r}_p に存在する密度 $\rho(\mathbf{r}_p)$ による重力への寄与を重ね合わせた表現になっている。この方程式はガウスの発散の定理によって、

$$\nabla \cdot \mathbf{K} = -4\pi G m \rho,$$

と書き換えることができる。さらに、 $\mathbf{K} \equiv -m \nabla \phi$ なる重力ポテンシャル ϕ を導入すれば、万有引力の法則は、

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho,$$

なる方程式に変形される。説明が長くなったが、万有引力の法則はラプラス演算子を用いた式で記述できる。しかも、平行移動、座標回転といった座標変換に対してラプラス演算子は不変であるということなので、K系を平行移動、または、座標回転して得られる K'系においても、万有引力の法則が形を変えずに成立するということになる。

1.3.3 ガリレイ変換に対する不変性

相対速度を説明した際に、運動する観測者から見た座標系はガリレイ変換で計算できることを示した。また、ある慣性系に対してガリレイ変換で関係づけられる座標系が慣性系であることも前に述べた。これを逆の立場で記述すると、二つの慣性系の中の座標変換には、ガリレイ変換と呼ばれる変換があるということである。二つの慣性系の中の任意の座標変換がガリレイ変換であるわけではないが、ガリレイ変換には物理学を記述するために重要な性質がある。

ある慣性系 K に対して x 軸方向に速度 v で運動している慣性系 K' について考えよう。これは、電車に乗ったときに窓から眺めた景色を想像すればよい。例えば、60 km/h で移動する電車の窓から見たとき、地上の木や建物は、60 km/h で後ろに流れていくように見える。これを K'系から見たときの座標変換として表現すると、

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t, \quad (1.8)$$

のようになる。ガリレイ変換では、座標変換しても時間の尺度が変わらないので、わざわざ、 $t' = t$ などと書くことはないのだが、今後のためにあえて書いておいた。まず、ガリレイ変換 (1.8) を微分すると、

$$dx' = dx - v dt, \quad dy' = dy, \quad dz' = dz, \quad dt' = dt, \quad (1.9)$$

が得られる。この関係式から、空間座標を時間座標について微分した量を書くと、

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx}{dt} - v, \quad \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{dt},$$

となる。例えば、東に 40 km/h で走る自動車を 60 km/h で追い抜く電車から見たとき、その自動車は 20 km/h で西に移動しているように見える。この式はそのような経験的な事実と一致する。この式をもう一度、時間について微分すると、

$$\frac{d^2x'}{dt'^2} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{d^2y'}{dt'^2} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{d^2z'}{dt'^2} = \frac{d^2z}{dt^2},$$

となるので、運動方程式 (1.3) は、

$$\mathbf{K}' = m \frac{d^2\mathbf{r}'}{dt'^2},$$

が成り立つ。ただし、 $\mathbf{K}' = \mathbf{K}$ である。つまり、ニュートンの運動方程式はガリレイ変換に対して不変である。言い換えると、観測者が等速度運動をしている限り、どのような観測者に対しても、ニュートンの運動方程式が成り立っている。

一方、ニュートンの万有引力の法則はガリレイ変換に対してどのように振舞うだろうか？ 解析学の公式を用いて偏微分演算子を計算すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 x'}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 t'}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} = \frac{\partial^2}{\partial x'^2}, \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2}{\partial y'^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial z'^2}, \end{aligned}$$

となるので、ラプラス演算子が不変となることは明らかであろう。つまり、ニュートンの万有引力の法則もガリレイ変換に対して不変である。また、微小ベクトル $[dx, dy, dz]$ の長さが不変となるような座標変換をすれば、ラプラス演算子も不変になることは前節で述べた。ガリレイ変換においては、 $dt = 0$ とすれば微小ベクトル $[dx, dy, dz]$ の長さが不変となる。つまり、ラプラス演算子に含まれない座標 t が一定のもとでは、微小ベクトル $[dx, dy, dz]$ の長さが不変となり、前節で述べた性質が成り立っている。つまり、万有引力の法則がガリレイ変換について不変になるためには、条件があるということである。その条件とは、 $dt = 0$ であるわけだが、それは、万有引力の法則がたとえ遠方の要因であっても瞬時に伝搬し、反映されるということである。言い換えると、重力の作用は無限大の速度で伝わるのが、ガリレイ変換について万有引力の法則が不変となるための条件である²。

²確かに、ニュートン力学では重力は速度無限大で伝搬することが前提になっている。しかし、後に議論するように無限大の速度での情報伝搬は不可能である。そのため、重力理論は後に (一般相対性理論によって) 書き換えられることになる。

1.4 マクスウェルの方程式の不変性

ニュートンの運動方程式で示されたような不変性が電磁気学においても成り立つか調べてみよう。電磁気学の基本法則はマクスウェル (Maxwell) の方程式によって記述される。ある慣性系 K において、電場 \mathbf{E} と磁束密度 \mathbf{B} があり、それらに対応して電束密度 \mathbf{D} 、磁場 \mathbf{H} が存在しているとする。マクスウェルの方程式によると、これらの物理量は、

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{j}, \quad (1.10a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (1.10b)$$

なる関係にしたがう。ここで、 ρ と \mathbf{j} は、それぞれ、電荷密度と電流密度である。まず、(1.10a) の左側はガウス (Gauss) の法則、右側はアンペール (Ampère) の法則である。もう一方、(1.10b) の左側は磁束保存の法則、右側はファラデー (Faraday) の法則である。電磁気学の不変性を調べるには、前節と同様、座標変換の結果として方程式の形が変わらないことを検証すればよい。マクスウェルの方程式に直接座標変換を適用してもよいのだが、それよりも簡単に考察する方法を紹介する。それには、電場 \mathbf{E} や磁束密度 \mathbf{B} を直接あつかうかわりにベクトルポテンシャル \mathbf{A} と静電ポテンシャル³ ϕ を導入する。ベクトルポテンシャル \mathbf{A} は、

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (1.11)$$

となるように定義された量である。この定義式は磁束保存の法則からの要請を意味している。さらに、この定義式をファラデーの法則に代入すると、

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (1.12)$$

であることがわかる。ここで導入した ϕ は、任意の勾配ベクトルの回転が必ずゼロであることから追加される自由度である。この追加された ϕ は、面白いことに、静電ポテンシャルと一致している。これらの関係をガウスの法則、および、アンペールの法則に代入すると、

$$\nabla^2 \phi + \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\rho}{\varepsilon}, \quad (1.13a)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \varepsilon \mu \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = -\mu \mathbf{j}, \quad (1.13b)$$

が得られる。この式の導出に関して、誘電率 ε と透磁率 μ によって、 $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ 、 $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ と表されることを利用した。先ほど、電場 \mathbf{E} の関係式において自由度 ϕ を追加したが、実は、

³ベクトルポテンシャルに対して、こちらはスカラポテンシャルと呼びたいところだが、後に示すように、この量はスカラとはいえないので静電ポテンシャルと呼ぶことにする。

磁束密度 \mathbf{B} の関係式についてもベクトルポテンシャルに自由度をもたせることができる。具体的に言うと、任意関数 χ を用いて、

$$\phi_\chi = \phi + \frac{\partial\chi}{\partial t}, \quad \mathbf{A}_\chi = \mathbf{A} - \nabla\chi,$$

を静電ポテンシャル、ベクトルポテンシャルとして選んだとしても、電場 \mathbf{E} と磁束密度 \mathbf{B} はまったく変わらない。これらのポテンシャルが自由度をもつのは、ポテンシャルが場の積分形であることため、積分定数が自由度となるからである。この積分定数を任意に選んでも実際に観測される電場や磁束密度は変化しない。例えば、ローレンツ条件と呼ばれる条件:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \varepsilon\mu \frac{\partial\phi}{\partial t} = 0, \quad (1.14)$$

を満たすような χ を定めると都合がよい。都合がよいというのは、(1.13a) と (1.13b) が

$$\nabla^2\phi - \varepsilon\mu \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}, \quad \nabla^2\mathbf{A} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu\mathbf{j}, \quad (1.15)$$

のように書き換えられるからだ。この式はまさに電磁場の波動方程式であり、電磁作用が速度 $1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ で伝搬することを意味している。しかも、 ρ/ε が静電ポテンシャル ϕ の源であり、同様に、 $\mu\mathbf{j}$ がベクトルポテンシャル \mathbf{A} の源である。このように静電ポテンシャル ϕ とベクトルポテンシャル \mathbf{A} が個別に記述できるようになり、マクスウェルの方程式の見通しがよくなる。これがローレンツ条件を設定することの利点だ。

数学記述の都合で導入されたローレンツ条件は、ベクトルポテンシャル χ との関連性として面白い性質がある。ローレンツ条件 (1.14) に対して、 ϕ の代わりに $\partial\chi/\partial t$ を、 \mathbf{A} の代わりに $\nabla\chi$ を代入すれば、ローレンツ条件が、

$$\nabla^2\chi - \varepsilon\mu \frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} = 0,$$

となることから、波動方程式の解が χ として許容される自由度であることがわかる。空間を速度 $1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ で伝搬する波に相当する波動関数を χ として用いれば、ローレンツ条件を満たし、なおかつ、 \mathbf{E} と \mathbf{B} が不変である。

波動方程式 (1.15) は、真空中において、電磁作用が光速で伝搬することを示唆している。真空の誘電率と透磁率を ε_0, μ_0 とすると、

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= 8.85418782 \times 10^{-6} \text{ F/m}, \\ \mu_0 &= 1.256637614 \times 10^{-6} \text{ H/m}, \end{aligned}$$

であるから電磁作用の伝搬速度を計算すると、

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = 2.99792458 \times 10^8 \text{ m/s},$$

が得られる。この値は真空中での光速と一致するので、マクスウェルは電磁波の存在を予言するとともに、光が電磁波の一種であると考えた。つまり、真空中での光速を c とすると、 $\epsilon_0\mu_0 = 1/c^2$ が成立し、真空中での電磁場の波動方程式は、

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\mathbf{j}, \quad (1.16)$$

と書き換えられる。これらの方程式は、平行移動と座標回転に対して不変（または、共変）である。なぜなら、空間座標に関する微分はラプラス演算子のみだからである。それでは、ガリレイ変換に対してはどうであろうか？ とりあえず、静電ポテンシャル ϕ の波動方程式にガリレイ変換を適用してみると、

$$\left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} + \frac{2v}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'} \right] \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0},$$

となる。この式には、 x' と t' による混合偏微分項が含まれているため、 ϕ に関する波動方程式は、一般的には、ガリレイ変換に対して不変とはならない。ベクトルポテンシャル \mathbf{A} の波動方程式に関しても同様の結果が得られる。また、ポテンシャル ϕ とベクトルポテンシャル \mathbf{A} の式を1次結合したとしても、混合偏微分項は消去できない。よって、マクスウェルの方程式はガリレイ変換に対して不変ではない。

電気と磁気を統一し、電磁波の存在すら予言したマクスウェルの方程式が、宇宙の対称性から要請されると思われるガリレイ変換に対して不変でないことは非常に都合が悪い。物理現象を正確に記述する理論をつくるのならば、ガリレイ変換、または、マクスウェルの方程式に修正が必要なのである。

1.5 マイケルソン・モーレーの実験

前節で示したように、光速はマクスウェルの方程式の中で、電磁作用の伝搬速度として現れる。マイケルソン (Michelson) とモーレー (Morley) が実施した実験によると、その光速もガリレイ変換にしたがわないことが観測され、19世紀末の物理学は大問題に直面した。その大問題とは、電磁波の伝搬速度についての問題である。

真空中のマクスウェルの方程式は波動方程式に書き換えることができ、その方程式に伝搬速度 $1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0} = c$ が含まれる。そもそも、その伝搬速度は何に対する速度なのか？ 波動方程式に現れる伝搬速度は、波を伝える媒質に対する相対速度である。例えば、空気中を伝搬する音波の媒質は空気であり、地震波の媒質は地殻やマントルなどである。一方、ニュートンの時代から光が波であり、それが真空中を伝搬することも知られていた。そのため、宇宙空間（真空中）には光の媒質であるエーテルという未知の物質で満たされている

と信じられてきた。マクスウェルの方程式によって、光が波であることが確実に became ため、より一層、エーテルの存在が強調されることとなった。

エーテルが存在した場合、宇宙には特別な絶対静止系、すなわち、エーテルに対する相対速度がゼロとなる系が存在するはずである。地球は太陽の周りを約 30 km/s で公転しているため、万一、1 年のうちのどこかでエーテルとの相対速度がゼロになる点があったとしても、大半はエーテルに対してゼロではない相対速度をもっている。エーテルとの相対速度は図 1.4 のように、エーテル流れと同じ方向、および、垂直な方向に対して光の往復時間を比較することによって計測できる。この図は、エーテルが右から左へ速度 v で流れている場合を想定している。まず、(a) では光源からエーテル流れに逆らって発射した光を距離 L だけ離れた鏡で反射し、その光が光源に戻るまでの時間を計測する。エーテルに対する光の伝搬速度を c とすると、行きはエーテル流れに逆らうため、光は速度 $c - v$ で進行する。反射した後、その光は速度 $c + v$ で戻ってくる。つまり、この場合において、光の往復に要する時間は、

$$\tau_a = \frac{L}{c - v} + \frac{L}{c + v} = \frac{2L}{c(1 - v^2/c^2)},$$

となる。一方、(b) はエーテル流れとは垂直な方向に光を発射した場合である。この図は、エーテルから見た様子を表している。エーテルから見ると、測定装置が右に向かって速度 v で運動しているので、発射した光は図 1.4 (b) のような軌跡を描く。この場合、光はエーテル流れとは垂直な方向に、速度 $\sqrt{c^2 - v^2}$ で伝搬するので、往復に要する時間は、

$$\tau_b = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2L}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

となる。確かに、(a) と (b) では光の往復時間が異なっている。この時間差を検出できればエーテルの存在が確かめられるわけである。

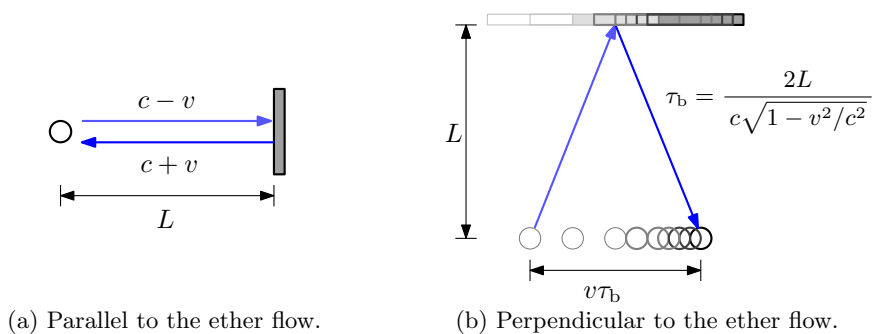


図 1.4: エーテル中の光の往復

波源から鏡までの距離を $L = 10 \text{ m}$ とし、エーテルに対する地球の相対速度を $v = 30 \text{ km/s}$ とすれば、図 1.4 の (a) と (b) における往復時間の差は、

$$\tau_a - \tau_b = \frac{2L}{c} \left(\frac{1}{1 - v^2/c^2} - \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) \simeq \frac{Lv}{c^3} \simeq 3.34 \times 10^{-16} \text{ s},$$

となる。この時間差は光でさえも約 $0.1 \mu\text{m}$ しか移動できない程度の短い時間である。しかし、この長さは光の波長と比較できる長さなので、1887年の時点で、マイケルソンの干渉計によって検出することが可能であった。マイケルソンとモーレーは1887年から、図1.5に示すマイケルソン干渉計を用いてエーテルの速度を検出しようとした。この実験はマイケルソン・モーレーの実験とよばれる。マイケルソン干渉計は、図1.5に示すように、光源とハーフミラー、2つの反射鏡と、検出器によって構成される。光源から発射された光は、半分がハーフミラー M_0 を透過して反射鏡 M_1 へ、もう半分が M_0 で反射して反射鏡 M_2 へ進行する。それらの反射鏡 M_1 と M_2 で反射した光は、再び、 M_0 で反射した後に検出器で映像として観測される。ハーフミラーから反射鏡までの距離 L_1 と L_2 を調整して、検出器で光が同位相で合成されるようになっていれば光は強め合い、その位相関係が変化すると、検出される光は弱くなる。

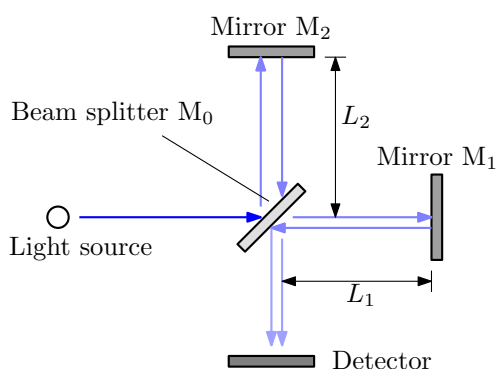


図 1.5: マイケルソン干渉計

マイケルソンとモーレーは、長さ L_1 が地球の公転方向と一致するように干渉計を配置して、検出器の位置で光が強め合うように長さ L_1 と L_2 を調整して、続いて、長さ L_1 が子午線方向を向くように(すなわち、90度)干渉計を回転させた。エーテル流れに平行な方向と垂直な方向では光の速度が異なるはずなので、回転させることによって光の位相関係が変化し、検出結果に変化が現れるはずである。しかも、この干渉計を水銀に浮かせた状態にしているため、干渉計を回転させる際に調整した距離を狂わせるような負荷が装置にかからないようになっている。しかしながら、この実験によって予想されていた時間差が検出できなかった。検出された時間差は、誤差の範囲ともいえるくらいの、予想値よりもはるかに小さな値だったのである。彼らは、1日のうちの観測時刻を変えてみたり、一年のうちの時期を変えてみたりしたが、結局エーテルの速度を検出することができなかったのである。

マクスウェルの方程式がガリレイ変換に対して不変でないことに加え、この実験の失敗によりエーテルの存在が危うくなった。いや、電磁波の媒質とはどのように解釈すべきなのかわからなくなったのだ。この実験を説明するため、様々な説が提唱された。ある者は、エーテルが粘性をもっているため、地球はエーテルを引きずりながら運動し、地表がエー

テルに対して静止しているという説を唱えた。その説が正しければ、地球周辺のエーテル流が宇宙からやってくる光を屈折させるはずであるが、そのような現象は観測されていない。甚だしい例としては、物理学を天動説に戻そうとする説まで現れた。

一方、ローレンツは、エーテルに対して運動するとその運動方向に $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ の割合で長さが縮むという説（いわゆるローレンツ収縮）を唱えた。そうすれば、図 1.4 の例において、エーテル流れと平行な場合と垂直な場合における光の往復時間が等しくなり、その結果、マイケルソン・モーレーの実験でエーテルの速度が検出できなかったことを説明できる。しかも、ローレンツの説の検証を試みたとしても、計測に用いるものさし自体が同じ割合で収縮するため、検証すらできないのである。この説は直接ぼろが出ないような巧妙な説であった。とはいえ、ローレンツがこのような説を提唱するには、ある程度、理論的な裏づけがあった。実は、次節で導出するローレンツ変換によって、運動する関係系では静止系と長さの尺度が異なることがわかったからである。

1.6 ローレンツ変換

マクスウェルの方程式がガリレイ変換に対して不変でないことは既に説明した。ここでは、その代わりにマクスウェルの方程式を不変にする座標変換を求め、それがローレンツ収縮を説明できることを示す。ガリレイ変換に対してマクスウェルの方程式が不変でなかったのは、電磁場の波動方程式をガリレイ変換した際に x' と t' による混合微分項が現れるからである。この混合微分項は、 x' の変換に t の依存性が含まれるにも関わらず、 t' の変換に x の依存性が含まれないような非対称が原因である。つまり、 t' の変換が x の依存性を含んでいれば、混合微分項を相殺してマクスウェルの方程式を不変にすることも可能である。

マクスウェルの方程式を不変にする変換を見つけることは困難ではない。実は、 $i^2 = -1$ を満たす虚数単位 i を用いて $w = ict$ という置き換えをすると、ポテンシャル ϕ に関する波動方程式は、

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial w^2} \right) \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0},$$

のように書くことができる。これは 4 次元座標 $[x, y, z, w]$ におけるポアソンの方程式であると考えられる。前に示したように、ラプラス演算子は座標回転に対して不変であった。つまり、4 次元座標系 $[x, y, z, w]$ において、電磁場はいかなる方向に回転させても、その形を変化させないのである。それでは、 xw 平面内で、座標軸を角度 θ だけ回転させて新たな座標軸 x', w' をつくってみよう。その場合、座標変換は、

$$x' = x \cos \theta - w \sin \theta, \quad w' = x \sin \theta + w \cos \theta,$$

のようになる。ここで、 w をもとの座標 t に戻すと、この座標変換は、

$$x' = x \cos \theta - ict \sin \theta, \quad t' = -i \frac{x}{c} \sin \theta + t \cos \theta,$$

のような形をしていたことがわかる。つまり、この変換式はマクスウェルの方程式を不変にする条件を満たす座標変換である。しかしながら、この変換式は虚数単位 i を含むため、 x と t が本来、実数であると考え、物理学的には都合が悪いように感じる。そこで、角度 θ が虚数であると仮定し、実数 ϑ を用いて $\theta \equiv i\vartheta$ とおいてみよう。虚数角度の回転に関して、 $\cos i\vartheta = \cosh \vartheta$, $i \sin i\vartheta = \sinh \vartheta$ となることに注意すると、

$$x' = x \cosh \vartheta - ct \sinh \vartheta, \quad t' = -\frac{x}{c} \sinh \vartheta + t \cosh \vartheta,$$

のように、虚数単位を取り除くことができ、物理学的にも満足できる座標変換が得られた。このような変換によって、 ϕ に関する波動方程式を座標変換した場合、 x' と t' による混合偏微分項を相殺できるはずである。ベクトルポテンシャル \mathbf{A} に関する波動方程式も同じ形であるので、同様の理屈が成り立ち、変換後の座標系においても、

$$\nabla'^2 \phi' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi'}{\partial t'^2} = -\frac{\rho'}{\varepsilon_0}, \quad \nabla'^2 \mathbf{A}' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}'}{\partial t'^2} = -\mu_0 \mathbf{j}',$$

が成り立つのである。ここで、 ∇' は変換後の座標系 (K' 系) でのナブラ演算子であり、 ϕ' , \mathbf{A}' , ρ' , \mathbf{j}' は K' 系において観測される物理量であるとする。同様に、ローレンツ条件についても座標変換に対する不変性:

$$\nabla' \cdot \mathbf{A}' + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi'}{\partial t'} = 0,$$

が成り立つと考えるのが適切である。補足をするならば、ローレンツ条件は静電ポテンシャル ϕ とベクトルポテンシャル \mathbf{A} の関係を規定する制約条件である。すでに導出した波動方程式が、 ϕ と \mathbf{A} についての個別の数式となっているので、それを独立に不変にするのではなく、ローレンツ条件なる制約のもとで負変位するのだ。

ローレンツ条件について、得られた座標変換に対する不変性を検証してみよう。まず、 x' と t' への座標変換を偏微分することによって、

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cosh \vartheta \frac{\partial}{\partial x'} - \frac{\sinh \vartheta}{c} \frac{\partial}{\partial t'}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = -c \sinh \vartheta \frac{\partial}{\partial x'} + \cosh \vartheta \frac{\partial}{\partial t'},$$

が得られる。これをローレンツ条件に代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'} \left(A_x \cosh \vartheta - \frac{\phi}{c} \sinh \vartheta \right) + \frac{\partial A_y}{\partial y'} + \frac{\partial A_z}{\partial z'} \\ + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'} \left(-c A_x \sinh \vartheta + \phi \sinh \vartheta \right) = 0, \end{aligned}$$

のように書き換えられる。これは一見、ローレンツ条件の不変性が破れているように思えるが、座標変換によってポテンシャル ϕ とベクトルポテンシャル \mathbf{A} が、

$$\begin{aligned}\phi' &= -cA_x \sinh \vartheta + \phi \cosh \vartheta, \\ A'_x &= A_x \cosh \vartheta - \frac{\phi}{c} \sinh \vartheta, \quad A'_y = A_y, \quad A'_z = A_z,\end{aligned}$$

のように変換されると考えれば、ローレンツ条件は、

$$\nabla' \cdot \mathbf{A}' + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi'}{\partial t'} = 0,$$

と書くことができ、得られた座標変換に対して不変であるとみなせる。さらに、 ϕ と \mathbf{A} の波動方程式に対して座標変換を適用すると、波動方程式の不変性も検証され、 K' 系における電荷密度 ρ' と電流密度 \mathbf{j}' が、

$$\begin{aligned}\rho' &= \rho \cosh \vartheta - \frac{j_x}{c} \sinh \vartheta, \\ j'_x &= j_x \cosh \vartheta - c\rho \sinh \vartheta, \quad j'_y = j_y, \quad j'_z = j_z,\end{aligned}$$

なる変換にしたがうことも導出される。この結果は、マクスウェルの方程式を不変とする座標変換のもとでの電荷密度と電流密度の変換である。マクスウェルの方程式が不変である条件で、 K' 系で観測される物理量が、このように変換されなければならないことを意味している。

上のようにしてマクスウェルの方程式が不変となるような座標変換を求めたが、その変換に用いたパラメータ ϑ の物理的な意味がはっきりしていない。そこで、パラメータ ϑ の正体を探るため、 K' 系から見たとき、 K 系の原点が $x' = -vt'$ のように運動するという条件を用いてみよう。変換式に $x = 0$ を代入し、 $x' = -vt'$ となるような条件を選ぶと、 $\tanh \vartheta = v/c$ であることがわかる。簡単のため、 $\beta \equiv v/c$ とおくと、

$$\cosh \vartheta = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \sinh \vartheta = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

となるので、ただちに、

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (1.17)$$

が得られる。この変換はローレンツ変換と呼ばれている。この変換は1899年と1904年にローレンツによって紹介されたので、数学者ポアンカレ (Poincaré) がこの変換にローレンツ変換と名付け、その名前が定着したようである。しかし、ローレンツ変換に類似した変換は1887年にフォクト (Voigt) によって紹介されている。しかし残念ながら、彼は導いた変換式を物理現象として考察するには至らなかった。その後、1897年にラーモア (Larmor)

もこの変換式を導出した。また、ローレンツ変換の名付けの親であるポアンカレ自身も変換式を導出した。ローレンツ変換は、 $v/c \rightarrow 0$ の極限においてガリレイ変換に近似できる。つまり、ローレンツ変換が真実であるならば、ガリレイ変換は光速に比べ十分に小さい速度の場合に成立する近似だったことになる。

ローレンツ変換 (1.17) を導出する過程において、静電ポテンシャル ϕ とベクトルポテンシャル \mathbf{A} が、その座標変換に対して共変であることがわかっていて、よって、物理的考察から決定されたパラメータ ϑ を具体的に書くと、それらのポテンシャルは、

$$\phi' = \frac{\phi - vA_x}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad A'_x = \frac{A_x - v\phi/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad A'_y = A_y, \quad A'_z = A_z, \quad (1.18)$$

のような変換にしたがう。さらに、電荷密度 ρ と電流密度 \mathbf{j} も、

$$\rho' = \frac{\rho - vj_x/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad j'_x = \frac{j_x - v\rho}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad j'_y = j_y, \quad j'_z = j_z, \quad (1.19)$$

のような共変性があることがわかっている。同様に、電場 \mathbf{E} と磁束密度 \mathbf{B} なども共変性がある。それらがどのように変換されるかは、(1.12) と (1.11) を使えばよいが、検算の意味で、新たな座標変換をマクスウェルの方程式に適用して電場と磁束密度の変換を得ることもできる。電場や磁束密度の変換は、第 4.1 節で改めて導出するのでそちらを参照してもらいたい。

これでガリレイ変換に代わって、マクスウェルの方程式を不変にする座標変換を得ることができたのだが、このローレンツ変換の導出においてなぜ真空の場合に限定したのか不思議に思う人もいることだろう。結果的には、ローレンツ変換に対して、真空でない場合 (物質中) のマクスウェルの方程式も不変になるのだが、 $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ と $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ なる関係が常に成立するものとして検証を試みると、波動方程式 (1.15) はローレンツ変換に対して不変とはならない。詳しくは第 4.6 節で検討するが、誘電体のような媒質に対してゼロではない相対速度をもつ場合、 $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ と $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ のような簡単な関係が成り立たないからである。媒質に対してゼロでない相対速度をもつ場合の \mathbf{D} と \mathbf{B} が正しく記述できれば、任意の ϵ と μ においてもマクスウェルの方程式がローレンツ変換に対して不変であることが約束される。

ローレンツは変換 (1.17) から、エーテル内を運動する物質の長さが縮むこと (ローレンツ収縮) を主張し、マイケルソン・モーレーの実験でエーテルの速度が検出できなかったことを説明した。さらに、運動する物体に備え付けた時計が $\sqrt{1 - \beta^2}$ の割合で遅れることにも気づき、その運動する物体固有の時間という意味で局所時間と名付けている。しかし、ローレンツは局所時間の物理的な意味については特に説明しなかった。そのような、長さや時間のローレンツ収縮については、アインシュタインの相対性理論において現れるので、第 2.5 節で説明する。

1.7 運動する荷電粒子による電磁場

ローレンツ変換は、マクスウェルの方程式が不変となるような座標変換であるが、その変換は、電磁作用が有限の速度で伝搬することと関係している。本節では、電磁作用の伝搬遅延を考慮して、等速運動する荷電粒子がつくる電磁場を考察し、ローレンツ変換との関連性を調べる。

マクスウェルの方程式は、(1.15) のような波動方程式に書き換えることができ、電磁作用が有限の速度で伝搬することを意味する。真空の場合においては、 $\epsilon_0\mu_0 = 1/c^2$ であるので、電磁作用の伝搬速度は真空中での光速に等しい。当然、この微分方程式の一般解としては、電磁作用の伝搬による遅延を考慮した次のような解をもつ：

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}_s, t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|} d^3\mathbf{r}_s, \quad (1.20)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}_s, t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|} d^3\mathbf{r}_s. \quad (1.21)$$

この解において、 \mathbf{r}_s はポテンシャル ϕ とベクトルポテンシャル \mathbf{A} に寄与する電荷密度と電流密度が存在する位置を表す。ただし、その時間依存性は $t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|/c$ となっているので、位置 \mathbf{r}_s から観測点 \mathbf{r} まで電磁作用が伝搬する時間分の遅延が考慮されていることがわかる。このようなポテンシャルは遅延ポテンシャルとよばれる。

この遅延ポテンシャルを、運動する荷電粒子に対して適用してみよう。荷電粒子は電荷 e をもち、時刻 t において位置 $\mathbf{s}(t)$ に存在する。この位置ベクトルを時間について微分すれば荷電粒子の速度となるが、その物理量は $d\mathbf{s}/dt = \mathbf{v}$ とする。ここで、荷電粒子は等速度運動しているとする。この荷電粒子に関する電荷密度 ρ と電流密度 \mathbf{j} はディラック (Dirac) のデルタ関数を用いると、

$$\rho(\mathbf{r}, t) = e \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{s}(t)), \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = e \mathbf{v} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{s}(t)),$$

のように書ける。これらを遅延ポテンシャルの式に代入すれば運動する荷電粒子がつくるポテンシャルを計算できるが、デルタ関数の取り扱いには注意が必要である。静電ポテンシャル $\phi(\mathbf{r}, t)$ に関して計算してみると、

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dt_i \int \frac{\rho(\mathbf{r}_s, t_i) \delta(t_i - (t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|/c))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|} d^3\mathbf{r}_s \\ &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \int dt_i \int \frac{\delta(\mathbf{r} - \mathbf{s}(t_i)) \delta(t_i - (t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|/c))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|} d^3\mathbf{r}_s \\ &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\delta(t_i - (t - |\mathbf{r} - \mathbf{s}(t_i)|/c))}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}(t_i)|} dt_i, \end{aligned} \quad (1.22)$$

のようになる。ただし、 t_i は便宜上用いた時間に関する積分変数である。ここでデルタ関数の変数がゼロとなるように t_i を置き換えて積分記号をはずせばよいと思うかもしれないが、そう簡単ではない。それはデルタ関数の変数が t_i の汎関数になっているからである。例えば、汎関数 $f(t_i)$ を変数とするデルタ関数は、

$$\delta(f(t_i)) = \left| \frac{1}{df/dt_i} \right|_{t_i=t_0} \delta(t_i - t_0), \quad (1.23)$$

のように書き換えることができる。ただし、 t_0 は $f(t_i) = 0$ の解である。そこで、(1.22) の右辺に含まれるデルタ関数の変数を微分しておくとして、

$$\frac{d}{dt_i} \left[t_i - \left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{s}(t_i)|}{c} \right) \right] = 1 - \frac{\mathbf{r} - \mathbf{s}(t_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}(t_i)|} \cdot \frac{\mathbf{v}}{c},$$

が得られる。よって、(1.23) に注意して (1.22) をさらに計算すると、

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}(t_0)| - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{s}(t_0))/c}, \quad (1.24)$$

が得られる。ただし、変数 t_0 は、 t_i を未知数とする方程式:

$$t_i = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{s}(t_i)|}{c},$$

の解である。得られた (1.24) は運動する電荷に関する静電ポテンシャルである。この結果から、ベクトルポテンシャルが、

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e\mathbf{v}}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}(t_0)| - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{s}(t_0))/c}, \quad (1.25)$$

となることは容易に理解できるだろう。ベクトル \mathbf{v} は上で述べたように、位置ベクトル \mathbf{s} の時間微分、すなわち、荷電粒子の速度である。これらのポテンシャル (1.24) と (1.25) は、1898年にリエナール (Liénard) が、1900年にヴィーヘルト (Wiechert) が独立に計算したことにより、リエナール・ヴィーヘルトのポテンシャルと呼ばれる。

荷電粒子が K 系の x 軸上を速度 v で等速運動しているとする。荷電粒子の位置は $x = vt$, $y = z = 0$ で与えられるとする。この条件をリエナール・ヴィーヘルトのポテンシャルに代入すると、観測点 $\mathbf{r} \equiv [x, y, z]$ でのポテンシャルは、

$$\phi(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{\sqrt{(x - vt)^2 + (1 - \beta^2)(y^2 + z^2)}},$$

$$\mathbf{A}(x, y, z, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e\mathbf{v}}{\sqrt{(x - vt)^2 + (1 - \beta^2)(y^2 + z^2)}},$$

となる。ただし、 $\beta \equiv v/c$ とおいた。静止する荷電粒子による等位ポテンシャル面は図 1.6 (a) のように荷電粒子を中心とする球面となるが、運動する荷電粒子による等位ポテンシ

ル面は図 1.6 (b) のように回転楕円体の表面となる。この図に記載している時刻 t_0 は時刻 t に観測点 \mathbf{r} への電磁作用が荷電粒子を出発した時刻を表す。この時刻は、

$$t_0 = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{s}(t_0)|}{c},$$

の解である。ところで、遅延ポテンシャルによる計算をしているにも関わらず、回転楕円体の中心は、荷電粒子の過去の位置 $\mathbf{s}(t_0)$ ではなく現在の位置 $\mathbf{s}(t)$ となっていること⁴に注意すべきである。

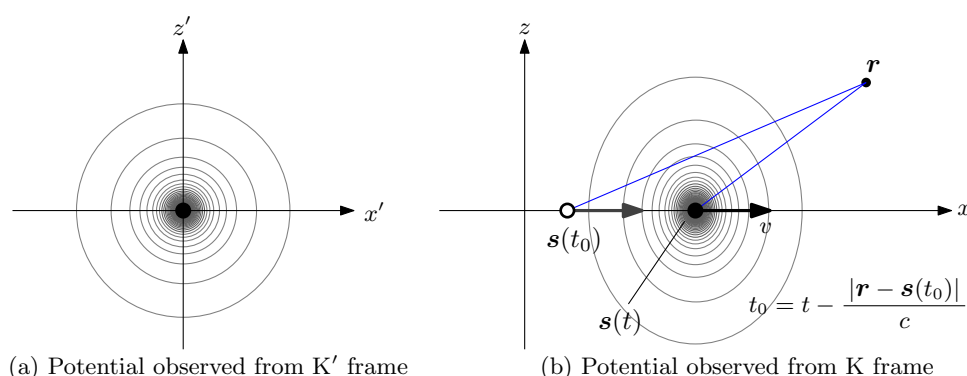


図 1.6: 運動する荷電粒子によるポテンシャル

回転楕円体の表面となった等位ポテンシャル面には、ローレンツ変換との関係性が見られる。というのは、上記ポテンシャルは、

$$\phi(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{\sqrt{1-\beta^2}} \left[\left(\frac{x-vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \right)^2 + y^2 + z^2 \right]^{-1/2},$$

のように展開でき、ローレンツ変換された座標で記述されることからわかる。運動する荷電粒子の等位ポテンシャル面が回転楕円体になっているのは、もともと球面だった等位ポテンシャル面が運動方向にローレンツ変換によって回転楕円体に変換されると解釈できる。

さて、ここまでの相対性理論が発表される前の物理学の展開である。マクスウェル方程式がガリレイ変換に対して不変とならず、ローレンツ変換によってその方程式を不変にできることを確認した。そのことからガリレイ変換が光速に対して十分小さい速度における近似であると考えられることができる。これで、マクスウェルの方程式の不変性、および、マイケルソン・モーレーの実験における光速に関する矛盾を説明することができたように思える。しかしながら、まだ未知の媒質エーテルの存在が前提になっている。次章で説明する相対性理論はエーテルの存在を否定する理論である。しかしながら、ローレンツ変換などがそのままの形で現れることは驚くに値する。

⁴荷電粒子が加速度をもっている場合、これは成り立たない。

第2章 アインシュタインの相対性原理

前の章で紹介したように、互いに相対速度をもつ慣性系間の座標変換であるガリレイ変換に対して、ニュートン力学の基本法則は不変であったが、19世紀に発表された電磁気学に関するマクスウェルの方程式はガリレイ変換に対して不変ではない。しかも、マイケルソンとモーレーの努力もむなしく、電磁場の媒質と考えられたエーテルと地球の相対速度を検出することもできなかった。ローレンツはマクスウェルの方程式を不変にする座標変換を導出し、運動する物体の長さが収縮することによってマイケルソン・モーレーの実験が失敗した理由を説明したが、依然とエーテル仮説が続いていた。これに対して、アインシュタインはエーテルの存在を否定し、マイケルソン・モーレーの実験の失敗を物理の基本原則として受け入れる、いわゆる光速不変の原理によって相対性原理を修正した。

2.1 光速不変の原理

アインシュタインの相対性原理においても、ガリレイの相対性と同様、等速運動をする観測者は自分が静止しているのか運動しているのかを識別できないことを原理としている。つまり、ある慣性系 K で成り立つ物理法則は、それとは相対速度をもつ慣性系 K' でも形を変えずに成り立つのである。それに加えて、アインシュタインの相対性原理では光速不変の原理が追加される。それは、等速運動をしている限り、いかなる観測者が見ても、その速度によらず光速はある一定の値になるという原理である。

慣性系 K から光を発射したとする。その光の速度を K 系から計測すると c であったとする。別の慣性系 K' が速度 v で遠ざかっているとする。ガリレイの相対性原理では K' 系からみた光の速度は $c - v$ となるはずであるが、アインシュタインの相対性原理では c となる。当然、 K' 系が速度 v で近づいていたとしても、観測される光の速度は c である。

光速不変の原理は、我々の日常からかけ離れた大胆な主張である。いかなる観測者から見ても、必ず、光速は一定の値になるという主張は正しいのか？ しかし、マイケルソン・モーレーの実験では、30 km/s という地球の公転速度をまったく検出できず、光速が一定値として計測された事実がある。「だから、仕方ないではないか。光速は誰から見ても同じ値なのだ。」というのが、光速不変の原理である。開き直りにも思える理屈であるが、我々が

計測する速度や長さ、そして、時間は光の速度が基準となっていると考えればよい。言い換えると、等速運動する観測者から見たとき、光の速度が一定値 $c (= 2.99792458 \times 10^8 \text{ m/s})$ となるように宇宙ができていくということである。そうすることで、もはやエーテルの存在を必要とはしないのである。

光速不変の原理は、強引にとって付けられた原理に思えるかもしれないが、相対性原理を確かなものとするには必要な原理である。なぜなら、相対性原理によると、上で述べたように、等速運動をする観測者は自分が静止しているのか運動しているのかを識別できないはずだ。しかし、光速がある基準となる慣性系に対する相対速度に依存して変化するのであれば、光速を計測することによって、基準となる慣性系に対する相対速度が特定できるのである。つまり、光速不変の原理がなければ、宇宙には絶対静止系が存在することとなり、相対性原理が成り立たないことになる。アインシュタインの相対性原理においても、ガリレイの相対性と同様、等速運動をする観測者は自分が静止しているのか運動しているのかを識別できないことを原理としている。つまり、ある慣性系 K で成り立つ物理法則は、それとは相対速度をもつ慣性系 K' でも形を変えずに成り立つのである。それに加えて、アインシュタインの相対性原理では光速不変の原理が追加される。それは、等速運動をしている限り、いかなる観測者が見ても、その速度によらず光速はある一定の値になるという原理である。

アインシュタインの相対性理論は、光速不変の原理から始まる。光速不変の原理は、宇宙がそのようにできているという基本原理であり、証明することはできない。本書で扱う物理現象はすべて、光速不変の原理が成立することを認めたうえでの議論である。

2.2 時計合わせ

いかなる慣性系から見ても光の速度が一定値になるという原理によって、速度や長さ、時間の尺度はニュートン力学で扱っていたものとは異なると予想される。しかも、すべての慣性系によって一律に異なるのではなく、その速度によって異なると考えたほうがよい。つまり、互いに相対速度をもつ慣性系の間では速度、長さ、時間の尺度が異なるということである。よって、アインシュタインの相対性原理では時間、特に、同時性の取り扱いには注意が必要である。

例えば、ある観測者 A から見て電車が7時に駅に到着したという事象が観測されたとする。この事象は、 A がもっている時計の針が7時を指したのと同時に電車が駅に着いたことを意味する。これを別の観測者 B から見るとどうであろうか？ 観測者 A と B の相対速度が互いにゼロで、しかも、時計合わせができているならば、 B から見ても電車が7時に駅に到着したことになるだろう。しかし、その時計が合っているかどうかは注意を要する。観

測者 A が B の時計を調べるために、いったん、B がいる場所まで歩いていき、時計を調べるという方法が考えられるが、それはよくない。なぜなら、歩いていく間、および、歩いて戻る間に運動状態が変化するため時間の尺度が変わってしまい、確認したことが台無しになってしまうからである。

時計を合わせを定義しよう。時計合わせは、アインシュタインの第1論文の冒頭でもしっかりと定義されている。当時、その論文を読んだ人は何を主張しているのかと首をかしげたかもしれないが、その内容を筆者なりの表現でアレンジして書くと次のようになる。

観測者間で時計を合わせるために、観測者が移動することなく、光に時間情報を載せ、互いの時計の読みを比較することを考えてみる。その時計合わせを、図 2.1 のような世界線を描いて説明しよう。この図は、時間の進行方向を下から上に流れるように描いている。横方向は空間的な位置を表す。このような座標設定において観測者や対象物の座標をプロットした曲線が世界線である。この図は、観測者 A からみた世界線を示している。観測者 B は、観測者 A に対して任意の運動をしているものとする。さて、A から B の時刻を確認するには、まず、時刻 t_{A0} に B に向かって時刻要求の光を送る。図では、A から B に伸びる右上がりの直線が時刻情報を載せた光の世界線である。B は時刻要求の光を受けると、自分

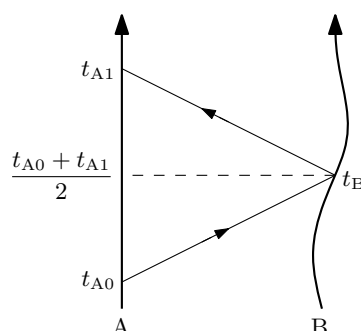


図 2.1: 観測者 A による時計合わせの世界線

の時刻情報 t_B を乗せた光を A に返信する。その返信信号の世界線は、図中の左上がりの直線である。A はその返信を時刻 t_{A1} に受信する。光速不変の原理より、送信した光と受信した光の速度は、ともに一定値 c である。よって、図 2.1 に示すように、観測者 A から見たとき、光が行きに要した時間と戻りに要した時間は等しい。したがって、 $t_{A0} + t_{A1} < 2t_B$ ならば B の時計は進んでいる。一方、 $t_{A0} + t_{A1} > 2t_B$ ならば B の時計は遅れている。そうではなく、 $t_{A0} + t_{A1} = 2t_B$ が成り立つ場合に、A と B の時計は合っている。時計を合わせるということは、このような行為によって互いの時計の読みを調整することである。なお、このように時計が調整された場合、

$$t_A = t_B = \frac{t_{A0} + t_{B1}}{2},$$

の条件で時計合わせされている、という。しかし、残念なことに、時計が合っていることは、

その瞬間でしか保証されない。A と B がゼロでない相対速度をもつのであれば、後に示すように、A と B の時計は互いに進むペースが異なるのである。

勘のいい読者は、観測者 B から見ると、光の往路の時間と復路の時間が等しいとは限らないことに気付いたかもしれない。そのとおりである。観測者 A が発射した光の往路と復路の時間は、A が見ると互いに等しいのだが、B が見ると等しいとは限らないのだ。それは、後に議論する同時性の不一致という現象である。同時性の不一致があるので、観測者 A が自分の時計を B の時計に合わせるときの操作として、A から B への時刻要求と、B から A への時刻応答を用いる。観測者 B の時計を A に合わせるには、立場を逆にしなければならない。

2.3 慣性系の中の座標変換

光速不変の原理を含む相対性原理を満たすように、ガリレイ変換の代わりとなる座標変換を求めてみよう。光速不変の原理を追加したとはいえ、物理学を記述するための座標変換であるので、光速より十分に小さな速度においては近似的にガリレイ変換と一致する結果を得るはずである。

二つの慣性系 K と K' について考えよう。K' 系は K 系に対して x 軸方向に等速度 v で運動している。K 系の時計で $t = 0$ のときに二つの座標系の原点が一致し、そのときに K' 系の時計が $t' = 0$ となるように時計合わせされているとする。

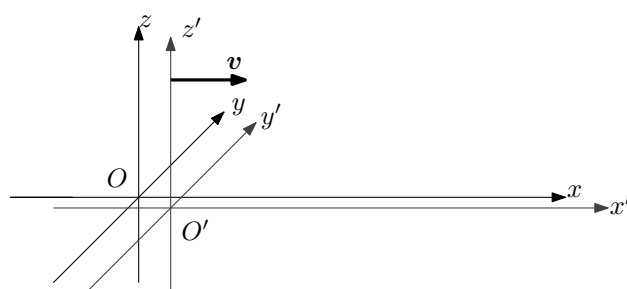


図 2.2: 運動する座標系

ここで議論する座標変換は線形変換である。言い換えると、座標に関する 2 次以上の項 (非線形項) を含まない。そうでなければ、等速度運動をしているにもかかわらず、非線形項が加速度をつくり出す。それは相対性原理に矛盾することである。その理由で座標変換は線形変換である。つまり、導出を試みる座標変換は、

$$\begin{aligned} ct' &= a_{00}ct + a_{01}x + a_{02}y + a_{03}z, \\ x' &= a_{10}ct + a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y' &= a_{20}ct + a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\z' &= a_{30}ct + a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z,\end{aligned}$$

なる形でなければならない。この座標変換の係数 a は、速度 v の関数であるので、厳密には $a_{\mu\nu}(v)$ が座標変換の係数である。ただし、添え字 μ と ν は 0 から 3 の整数である。さらに、 $a_{\mu\nu}(-v)$ は $a_{\mu\nu}(v)$ の逆行列である。なぜなら、K 系に対して速度 v で運動する K' 系への変換の後、K' 系に対して速度 $-v$ で運動する慣性系への座標変換すると K 系に戻るはずだからである。

上に書いた変換式は未知係数を 16 個も含んでいる。しかし、速度が x 軸方向であることに着目すれば、特定すべき未知係数を減らすことができる。まず、空間座標 x', y', z' の変換式に現れる係数は、対応しない他の空間座標に関する項を含んではならない。言い換えると、 x' の変換式には y と z の項を含んではならない。もし、他の空間座標に関する項を含めば、その座標変換は座標回転、あるいは、斜交座標への変換となる。その場合、異なる慣性系では座標軸の方向が変化することを意味する。これは相対性原理から受け入れられないはずだ。

続いて、 y' と z' の変換式が t に関する項を含まないことも予想できる。なぜなら、 t の依存項を含む場合、K 系に静止した物体を K' 系から観測すると、 y 方向や z 方向に速度成分をもってしまう。この現象も受け入れがたい。逆に、 ct' の変換式が y と z の項を含むことも好ましくないはずだ。ここまでの考察で、慣性系間の座標変換は、

$$\begin{aligned}ct' &= a_{00}ct + a_{01}x, & x' &= a_{10}ct + a_{11}x, \\y' &= a_{22}y, & z' &= a_{33}z,\end{aligned}$$

まで簡略化できたことになる。空間の座標軸の選び方に関して、 x は慣性系の速度方向に制限されているが、 y と z には自由度がある。その自由度ゆえに、 $a_{22} = a_{33}$ が成立しなければならない。さらに、K 系に対して速度 v で運動する K' 系に変換した後、速度 $-v$ で運動する慣性系に変換すると、

$$y'' = a_{22}(-v) a_{22}(v) y,$$

のように変換される。変換された先の座標系は K 系であるはずなので、 $y'' = y$ である。したがって、 $a_{22}(-v) a_{22}(v) = 1$ が成立する。しかも、 a_{22} は速度 v における y 方向の長さの尺度であるので、速度が $-v$ のように符号が入れ替わっても同じ値 $a_{22}(-v) = a_{22}(v)$ であると考えるのが自然である。したがって、 $[a_{22}(v)]^2 = 1$ なのだから $a_{22}(v) = \pm 1$ が導かれる。そのうち、負の符号は座標軸の方向反転を意味するので除外すべきだろう。当然、 z についても同様であるので、 $y' = y$ 、 $z' = z$ となる。

ここまでの考察で未知係数をかなり減らすことができた。残った未知係数は 4 個だけである。未知係数を含む変換式は、

$$ct' = a_{00}ct + a_{01}x, \quad x' = a_{10}ct + a_{11}x, \tag{2.1}$$

である。これから、簡単な物理的な考察によって、これら4つの未知係数 a を求め、具体的な座標変換を導出しよう。

K系の原点をK'系から観測すると、その位置が $x' = -vt'$ となることは直感的にわかる。そこで、(2.1) に $x = 0$ を代入してK系の原点をK'系から観測した座標を計算すると、 $x' = (a_{10}/a_{00}) ct'$ となるので、

$$\frac{a_{10}}{a_{00}} = -\frac{v}{c}, \quad (2.2)$$

なる条件が導かれる。逆にK'系の原点をK系から見た場合、その位置は $x = vt$ となっているはずである。先ほどと同様に、(2.1) に $x' = 0$ を代入すると、 $x = -(a_{10}/a_{11}) ct$ が得られるので、もう一つの条件:

$$\frac{a_{10}}{a_{11}} = -\frac{v}{c}, \quad (2.3)$$

が得られる。さらに、(2.2) と (2.3) を比較すると、 $a_{00} = a_{11}$ であることがわかる。ここで、後に利用するため、 $a_{00} = a_{11} \equiv \gamma$ と書いておく。

次に、 $t = t' = 0$ のときに原点から x 軸方向に放射された光線について考える。光速不変の原理より、 $x = ct$ と $x' = ct'$ が同時に成り立つ。そこで、(2.1) に $x = ct$ を代入すると、

$$ct' = (a_{00} + a_{01})ct, \quad x' = (a_{10} + a_{11})ct, \quad (2.4)$$

となるが、同時に $x' = ct'$ も成り立つので、 $a_{01} = a_{10} \equiv -\gamma v/c$ であることがわかる。つまり、変換式(2.1)は、

$$ct' = \gamma ct - \gamma \frac{v}{c} x, \quad x' = -\gamma \frac{v}{c} ct + \gamma x, \quad (2.5)$$

のような形をしている。この変換の逆変換を計算すると、

$$ct = \frac{1}{\gamma^2(1 - v^2/c^2)} \left(\gamma ct' - \gamma \frac{v}{c} x' \right), \quad (2.6)$$

$$x = \frac{1}{\gamma^2(1 - v^2/c^2)} \left(-\gamma \frac{v}{c} ct' + \gamma x' \right).$$

が得られる。逆の立場として、K'系から観測するとK系が x 軸方向に速度 $-v$ で運動しているように見えるはずなので、逆変換(2.6)は変換式(2.5)の速度 v を $-v$ に置き換えたものと同一になるはずである。その条件より、 $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ が得られるので、ガリレイ変換に代わる座標変換は、

$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad (2.7)$$

であることが導き出された。ここで、 $\beta = v/c$ とする。この変換は $v/c \ll 1$ の極限のもとでガリレイ変換と一致する。光速不変の原理を含む相対性によって求めたこの座標変換は、アインシュタイン変換とは呼ばれず、**ローレンツ変換**と呼ばれる。なぜなら、マクスウェ

ルの方程式を不変にするために導かれたローレンツ変換と一致するからである。つまり、ローレンツ変換は、マクスウェルの方程式が不変にするだけでなく、光速不変の原理を含む相対性原理に基いた座標変換なのだ。

ローレンツ変換と同一の座標変換を得たとはいえ、アインシュタインの相対性原理はエーテルの概念を捨て、マイケルソン・モーレーの実験結果をそのまま受け入れることによって、慣性系ごとに時間や長さの尺度が異なるという独自の姿勢をとったことが物理学における革新である。その結果得られるローレンツ変換は、単なる数学的記述ではなく、慣性系における時間や長さの尺度を規定する法則である。

2.4 同時性と因果性

ローレンツ変換によると、あらゆる観測者に対する共通の同時性が成立しなくなる。言い換えると、ある観測者が同時に観測した事象 A と B は、等速度運動する別の観測者から見ると、その2つの事象は同時発生していないのである。例えば、事象 A が $x = x_A$ で、事象 B が $x = x_B$ で、K 系の同一時刻 $t = 0$ のときに発生したとしよう。ローレンツ変換にそれらの座標を代入すると、K' 系で観測した事象発生時刻は、

$$t'_A = \frac{-vx_A/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad t'_B = \frac{-vx_B/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

のように算出される。ただし、 $\beta = v/c$ である。つまり、 $x_A \neq x_B$ である限り、2つの事象は、K' 系では異なる時刻に発生していることになる。この同時性の不一致は、図 2.3 に示すように、原点から $-x$ 方向と $+x$ 方向に照射された光線で説明できる。K 系の $x = -a$ と $x = +a$ に、それぞれ、感光センサ A と B があった場合、K 系から見たとき、2つセンサは同時に光線を検出するだろう。しかしながら、K' から見たとき、センサ B のほうが先に感光するのである。



図 2.3: 同時性の不一致

同時性が成り立たなくなることから、因果性を狂わせることはないのでしょうか。上であげた2つの感光センサの例において、もし、K' 系の運動方向が逆、すなわち、K 系に対する速度が x 軸方向に $-v$ であったなら、上の例とは逆にセンサ A が先に感光するのである。つまり、観測者によって事象の発生時刻が異なって見えるのである。これは、原因と結果の発生順序の入れ替わり、すなわち、因果性の破綻を意味しないのか。

K系とK'系で事象の発生順序が入れ替わる条件とは、事象AとBの発生時刻について、 $t_B - t_A$ の符号が $t'_B - t'_A$ と異符号であるということである。これを形式的に書くと、

$$(t_B - t_A)(t'_B - t'_A) < 0,$$

となる。これにローレンツ変換を適用すると、

$$(t_B - t_A) \frac{(t_B - t_A) - v(x_B - x_A)/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} < 0,$$

となるので、

$$|t_B - t_A| < \frac{v}{c^2} |x_B - x_A|,$$

が順序入れ替わりの条件である。さらに、 $v/c \leq 1$ という条件をつけると、

$$|t_B - t_A| < \frac{|x_B - x_A|}{c},$$

という条件が得られる。事象AとBに因果性があるならば、座標 x_A で事象Aが発生した情報が座標 x_B に伝達した後に事象Bが発生するはずである。光より速い情報伝達手段が存在しないならば、因果性のある2つの事象は必ず $|t_B - t_A| \geq |x_B - x_A|/c$ を満たしている。その場合、因果性のある事象の順序は決して入れ替わることがない。順序が入れ替わる条件を満たす組み合わせは、因果性のない事象である。感光センサの例では、一方のセンサが感光したことと、もう一方のセンサが感光したことには因果性がない。どちらが先に感光しても物理的に不都合はないのである。一方、原点から光線が照射されたこととセンサが感光したことは因果関係がある。K系の時計で $t = 0$ のときに照射された光線が $x = a$ のセンサで検出される時刻は $t = a/c$ である。この例では、 $|t_B - t_A| = |x_B - x_A|/c$ となり、順序が入れ替わることはない。

仮に光より速い伝達手段が存在するならば、因果性は破綻してしまうことになる。後に示すように、光速度より遅い物体を超光速に加速することは不可能であるが、それに加えて、因果性が保持されるためにも光より速い情報伝達は不可能と考えるべきであろう。

2.5 ローレンツ収縮

相対論的な効果の一つとしてローレンツ収縮と呼ばれる長さと時間の収縮がローレンツ変換から導かれる。ローレンツ変換を見れば、慣性系Kとそれに対して速度 v で運動する別の慣性系K'には、長さと時間の尺度が違っていることがわかる。特に時間に対するローレンツ収縮は、科学小説などでも引き合いに出されるのでなじみが深いだろう。本節ではローレンツ変換からローレンツ収縮を導いてみる。

2.5.1 長さの収縮

長さの測定方法について考えてみよう。長さは、対象となる2つの点(例えば、点Aと点B)を選び、この2点にもさしを当てれば測定できる。しかし、運動している対象の長さを測る場合には注意が必要である。点Aの位置を記録してから、点Bの位置を記録するまでの間に点Aが移動するからである。よって、運動する物体の長さを測定するには、両端の位置を同時に記録しなければならない。

図2.4のように速度 v で運動する物体の長さを測定する場合を考えてみよう。その物体と併走する慣性系を K' 、長さを測定する観測者が存在する慣性系を K とする。この運動する対象物体の midpoint には時限式の発光装置が設置され、特定の時刻になると発光装置から左右にパルス状の光を発射する。その光は同時に両端(点Aと点B)に到達し、その場所に設置されている反射鏡によって進路を直角に曲げられて、 K 系に備え付けられている感光紙に位置を記録する。そうすることで物体の長さを正確に測定できるように思える。しかしそれは K' 系から見たときの話(図2.4(a))である。光速不変の原理によると、 K 系から見たとき、物体の midpoint から発射された光は先に点Aに到達(図2.4(b))する。点Bに光が到達する頃には、物体はさらに移動しているので、感光紙に記録された2点間の距離は物体の長さより長いはずである。つまり、 K 系から見た物体の長さは K' 系が主張する長さより短いはずである。

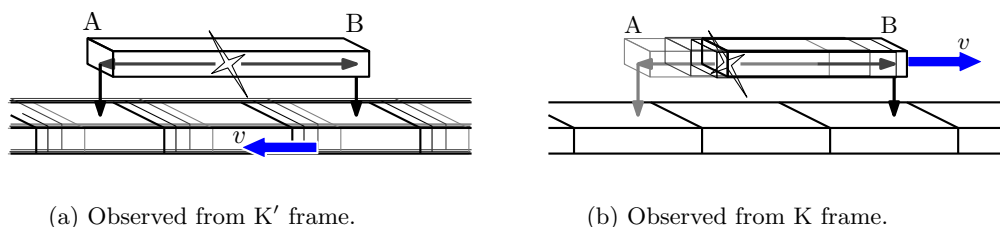


図 2.4: 運動する物体の長さ測定

K' 系が主張する長さより短いというだけでは不明確であるので、その短さを数式で表現してみよう。 K' 系における微小長さ dx' を K 系から測定すると、 dx なる長さが得られるとする。その長さを評価するには、ローレンツ変換の微分:

$$dx' = \frac{dx - v dt}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

を利用するとよい。上で述べたように、 K 系から長さを測定するときは、 K 系の時計において同時に両端の位置を記録する必要があるので $dt = 0$ とする。その結果、

$$dx = \sqrt{1 - \beta^2} dx', \quad (2.8)$$

となるので、 K 系から測定される長さは K' 系が主張する長さより短くなっている。当然、

微小ではない長さを考えるのであれば, (2.8) を積分すればよいので, K' 系から見た運動物体の長さを L' とすると, K 系の観測者にとっては, $L = \sqrt{1 - \beta^2} L'$ に収縮して見える。

逆に, K' 系から見ると, K 系が x' 軸方向に速度 $-v$ で運動しているので, 感光紙の長さが短くなっているように見える。これもローレンツ変換から導くことができる。ここでも, ローレンツ変換の微分を書いておくと,

$$dx' = \frac{dx - v dt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad dt' = \frac{dt - (v/c^2) dx}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

である。今度は K' 系から長さを測定するので $dt' = 0$ が条件となる。その条件から容易にわかる関係 $dt = (v/c^2) dx$ を, dx' の式に代入すると $dx' = \sqrt{1 - \beta^2} dx$ が得られ, 結局, K' 系から見ると K 系の長さが収縮しているようにみえるのである。

この収縮現象がローレンツ収縮と呼ばれるのは, アインシュタインが相対性理論を発表する前にローレンツがこの収縮に気づいたからである。ローレンツは, エーテル内を運動する物体はその運動方向に $\sqrt{1 - \beta^2}$ の割合で長さが縮むことを主張し, それが理由でマイケルソン・モーレーの実験でエーテルの速度が検出できなかったとした。ローレンツの主張による収縮の割合がアインシュタインの理論とは一致するが, 物理的な解釈はまったく異なる。ローレンツの主張によるとエーテルに対して運動する物体は, 物体を構成する原子が, 運動する荷電粒子として振舞うため, 分子間力となる電気的な力が変化し, 速度方向の長さが縮むのである。この主張によると, 運動する物体の長さは本当に縮むのであるが, 長さを測る物差しも同様に縮むので, この収縮を検証できない。これに対してアインシュタインの主張によると, ある慣性系 K から相対速度をもつ別の慣性系 K' を見たとき, K' 系の長さが速度方向に縮んで見えるのであって, K' 系の長さが本当に縮むわけではない。この収縮現象は, 相対速度による座標変換によって生じる観測の不一致であるため, 逆に, K' 系から見ると K 系の長さが速度方向に縮んで見えるのである。

もうひとつローレンツ収縮について補足しておこう。ローレンツ収縮は単に物体の長さが縮むだけではない。座標変換によってもたらされる収縮であるので, 物体の長さというよりも宇宙全体が縮んでいると解釈したほうがよい。例えば, 地球から月までの距離は約 38.4 万 km であるが, 地球とは相対的に光速の 86.6 % で運動する観測者から見ると, 地球と月の距離は約 19.2 万 km となる。

2.5.2 時間の収縮

相対性理論において時間を議論するとき, 必ず, 座標系の定点に張り付いた時計を考えなければならない。既に見たように, 運動が長さや時間の尺度を変化させる現象であるので, 時計が座標系の中を動き回った場合, その運動のため時計の読みが狂ってしまうかもしれない。

K'系の時計の読みをK計の時計と比較するには、長さの収縮と同様の手法を用いればよい。つまり、再び、ローレンツ変換の微分:

$$dx' = \frac{dx - v dt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad dt' = \frac{dt - (v/c^2) dx}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

を利用するのだ。K'系の定点に張り付いた時計ならば、 $dx' = 0$ が条件となるはずである。この条件から容易に $dx = v dt$ が導かれるので、

$$dt' = \sqrt{1 - \beta^2} dt,$$

なる関係が得られる。この式が主張するのは、K系から見たときK'系の時計が $\sqrt{1 - \beta^2}$ の割合で遅れて見えるということである。例えば、K'系がK系に対して光速の50%で運動しているとする。K系から見ると、1時間たつ間に、K'系ではその86.7%にあたる52分しか経過したように見えないということである。当然、相対性原理のため、K'系から見るとK系の時計が遅れて見える。上に書いたローレンツ変換の微分に対し、 $dt = 0$ という条件を適用すると、 $dt = \sqrt{1 - \beta^2} dt'$ が得られるはずである。

時間収縮は、相対性理論から導かれる現象の中で最も理解しがたいことかもしれない。飛行機の速度をもってしても、その速度は光速の100万分の1であるので、1時間の移動あたりで遅れる時間は 1.8×10^{-9} 秒に過ぎない。ところが、宇宙から降り注ぐ宇宙線によって相対性理論による時計の遅れが観測されている。宇宙線と大気原子核の衝突によって生じたミュー粒子が地表に到達していることが観測され、相対論的な時計の遅れが実証されるのだ。大気の上層で何が起きているかを、図2.5を用いて説明しよう。大気中で発生する変化の一例であるが、ほぼ光速で降り注ぐ宇宙線 (cosmic ray) が大気原子核¹と衝突することによって、中性子 (n) だけでなく、パイ中間子 (π^+) を放出する。パイ中間子の寿命は0.026マイクロ秒のように非常に短いため、間もなくミュー粒子 (μ^+) とミューニュートリノ (ν_μ) に崩壊する。ミュー粒子 (μ^+) も2マイクロ秒程度の短寿命であり、崩壊すると、陽電子 (e^+) と反ミューニュートリノ ($\bar{\nu}_\mu$) と電子ニュートリノ (ν_e) に変化する。このような衝突は、地表から約20kmの高度で起きていて、非相対論的な予想では生成されたミュー粒子は寿命までに600m程度しか移動できないので地表に到達できないはずである。それにも関わらず、ミュー粒子が地表に到達するのは、高速運動するミュー粒子の時計が遅れているからである。仮に、ミュー粒子の速度が光速の99.99%であるならば、地表から見たミュー粒子の寿命は70倍長くなり、崩壊するまでにミュー粒子は42km移動することができる。だから、地表に到達することが可能というわけだ。中間的に発生するパイ中間子にも相対論的な時計の遅れが発生するが、寿命がミュー粒子の100分の1程度なので、時計遅れがあっても地表に到達できない。

¹宇宙船のほとんどが陽子であり、原子核との衝突は陽子どうしの衝突が重要であるため、図中では、宇宙線と原子核ともに陽子を意味する記号 p を付してある。

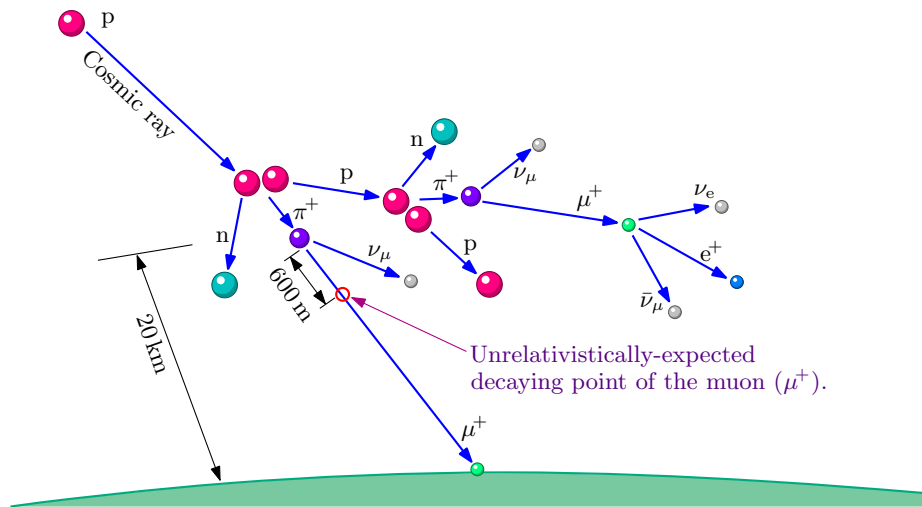


図 2.5: 宇宙線によって生成されたミュー粒子の地表への到達

運動している観測者の時計が遅れるといっても、絶対静止系が存在しないので、それは相対速度に関する性質である。つまり、生成されたミュー粒子から見ると地球の時計が遅れているはずである。ミュー粒子自身は自分の時計が遅れているとか、進んでいるという自覚がない。そう考えたとき、本当にミュー粒子は崩壊する前に地表に達するのであろうか？ ミュー粒子から見ると地表面は光速に近い速度で接近している。前項での説明によると、大きな相対速度をもつものは物体だけでなく空間もローレンツ収縮されるので、ミュー粒子が生成した時点で既に地表面はローレンツ収縮のため 600 m 以内の距離まで迫っているのだ。そのため、ミュー粒子自身の時計を説明に用いても、間違いなくミュー粒子は地表面に到達するのだ。

2.5.3 斜めのローレンツ収縮

運動している物体の長さが運動方向に $\sqrt{1 - \beta^2}$ の割合で収縮することを確認した。もし、座標軸と運動方向が一致しない場合、どのようにローレンツ収縮が起きるかを調べてみよう。つまり、観測者に対して、 $[u_x, u_y]$ のような速度ベクトルをもつ物体のローレンツ収縮を調べるのである。

物体のローレンツ収縮を調べるための前段として、物体形状が異なる慣性系でどのように変化するか調べてみよう。速度ベクトル $[u_x, u_y]$ をもつ物体を、K 系と相対的に x 軸方向に速度 v で運動する慣性系 K' から見た場合を考える。K 系から見た物体の点が、

$$x = x_0 + u_x t, \quad y = y_0 + u_y t,$$

であるとする。これを K' 系の座標にローレンツ変換すると、

$$\begin{aligned} x' &= \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-u_x v/c^2} x_0 + \frac{u_x - v}{1-u_x v/c^2} t', \\ y' &= y_0 + \frac{u_y v/c^2}{1-u_x v/c^2} x_0 + \frac{\sqrt{1-\beta^2} u_y}{1-u_x v/c^2} t', \end{aligned} \quad (2.9)$$

が得られる。得られた数式の右辺に含まれる t' の係数は、 K' 系から見た物体の相対速度である。つまり、その係数は速度の変換則を与える。速度変換則については次章で説明する。運動する物体の形状を調べるには、物体のあらゆる場所の位置を同時に収集しなければならない。しかも、「同時に」は慣性系ごとに異なるので、慣性系ごとに位置を収集する時刻を設定する必要がある。それで、 K 系では $t = 0$ で、 K' 系では $t' = 0$ で位置を収集して形状を調べることにする。したがって、 K 系での位置 $[x_0, y_0]$ が K' では、

$$x'_0 = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-u_x v/c^2} x_0, \quad y'_0 = y_0 + \frac{u_y v/c^2}{1-u_x v/c^2} x_0, \quad (2.10)$$

のように変換される。この変換が異なる慣性系の間での形状の変化を表す。

準備が整ったので、具体的に形状の変化を調べよう。対象とする図形は、 xy 平面上の円を考えよう。対象とする物体が K_0 に静止していると仮定し、その断面が、

$$x_0^2 + y_0^2 = 1,$$

のような半径 1 の円であるとする。その物体を、 K_0 系と相対的に y 軸方向に速度 $-\bar{u}_y$ で等速度運動する慣性系 K_1 から見た形状を考えよう。形状の変化は、(2.10) を用いれば計算できるが、適用には注意が必要である。それは、慣性系が y 軸方向に運動しているため、 x と y を入れ替えて公式を適用しなければならないのだ。そのことに注意して断面の形状を評価すると、

$$x_1^2 + \frac{y_1^2}{1-\bar{\beta}_y^2} = 1, \quad (2.11)$$

が容易に導出できる。ここで簡単のため、 $\bar{\beta}_y \equiv \bar{v}_y/c$ なる記号を用いた。得られた数式によると、 K_1 系から見た物体の形状は楕円であることがわかる。その長半径は x 軸方向を向いて長さが 1 であり、短半径は y 軸方向を向いて長さが $(1-\bar{\beta}_y^2)^{1/2}$ である。つまり、運動方向である y 軸に沿ってローレンツ収縮されている。

続いて、 K_1 と相対的に x 軸方向に $-u_x$ の速度で運動する関係系 K へから見た形状を考えよう。 K_1 系で観測される形状 (2.11) について変換 (2.10) を適用すると、

$$\left(\frac{1}{1-\beta_x} + \frac{\beta_x^2 \bar{\beta}_y^2}{(1-\beta_x^2)(1-\bar{\beta}_y^2)} \right) x^2 + \frac{y^2}{(1-\beta^2)(1-\bar{\beta}_y^2)} - \frac{2\beta_x \bar{\beta}_y xy}{(1-\bar{\beta}_y^2)\sqrt{1-\beta_x^2}} = 1,$$

が得られる。ここでも簡単のため、 $\beta_x \equiv u_x/c$ なる記号を用いた。さらに、観測している物体の速度はK系から見ると、

$$\mathbf{u} = [u_x, \sqrt{1 - \beta_x} \bar{u}_y],$$

となる。この数式に記述したように、相対速度は $[u_x, \bar{u}_y]$ とならないのだ。その事実は数式(2.10)に現れているし、次章でその正当性を厳密に示す。ここでは、その速度変換則をそのまま受け入れることにしよう。そこで、簡単のため、

$$u_y \equiv \sqrt{1 - \beta_x} \bar{u}_y, \quad \beta_y = \frac{u_y}{c},$$

なる記号を定義すれば、K系から見た物体の相対速度は $[u_x, u_y]$ と書ける。さらに、

$$\beta^2 \equiv \frac{|\mathbf{u}|^2}{c^2} = \frac{u_x^2 + u_y^2}{c^2} = \beta_x^2 + \beta_y^2,$$

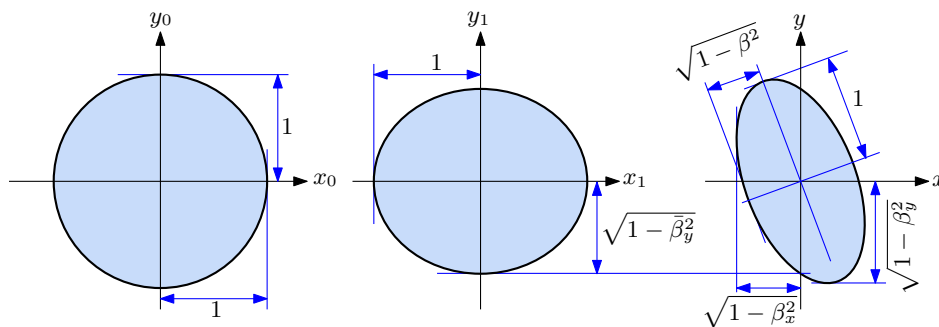
なる記号を定義すれば、K系から見たローレンツ収縮率の自乗は、

$$1 - \beta^2 = 1 - \beta_x^2 - \beta_y^2 = 1 - \beta_x^2 - \bar{\beta}_y^2 - \beta_x \bar{\beta}_y^2 = (1 - \beta_x^2)(1 - \bar{\beta}_y^2),$$

のように面白い関係で表される。ローレンツ収縮率は、速度合成に使用された各速度成分のローレンツ収縮率の積で表されることがこの数式からわかるのだ。定義された記号を用いて変換された形状の数式を書き換えると、

$$\frac{1}{1 - \beta^2} [(1 - \beta_y^2) x^2 + (1 - \beta_x^2) y^2 - 2\beta_x \beta_y xy] = 1, \quad (2.12)$$

が得られる。この数式は傾いた楕円を表す。数式を評価すると、図2.6(c)のように、速度ベクトル $[u_x, u_y]$ 方向に $\sqrt{1 - \beta^2}$ の収縮率でローレンツ収縮した楕円となる。面白いこと



(a) Observed from K_0 frame. (b) Observed from K_1 frame. (c) Observed from K frame.

図 2.6: 観測する慣性系による形状の変化

に、座標軸に沿ってつくった外接矩形の x 軸方向の半径が $\sqrt{1 - \beta_x^2}$ であり、 y 軸方向の半径が $\sqrt{1 - \beta_y^2}$ となる。さらに、楕円と y 軸の交点の y 座標が $(1 - \bar{\beta}_y^2)^{1/2}$ であることも興味

深い。これは、 K_1 系からみたローレンツ収縮による短軸方向の長さ (図 2.6 (b)) と一致するのだ。

図 2.6 に示した形状の変化はローレンツ変換から容易に予想がつくだろう。続いて、隙間なく配置された物体が、異なる慣性系から見るとどのように配置されるのかを調べよう。配置を調べるにも数式 (2.10) を用いる。 K_0 系から見たとき、物体の中心が $x_0 = 2m$, $y_0 = 2n$ に存在するとしよう。なお、 m と n は整数である。数式 (2.10) を用いて K_1 系へ、それから、 K 系へと変換すると、

$$x = 2m\sqrt{1 - \beta_x^2}, \quad y = 2n\sqrt{\frac{1 - \beta^2}{1 - \beta_x^2}} - 2m\frac{\beta_x\beta_y}{\sqrt{1 - \beta_x^2}},$$

が得られる。この数式によると、物体の配置は慣性系が変わると、図 2.7 のように変化することが導かれる。図 2.7 (a) が物体と相対的に静止する K_0 系から見た物体の配置である。物体は正方形の格子を構成している。それに対し、 K 系から見ると、図 2.7 (b) のように物

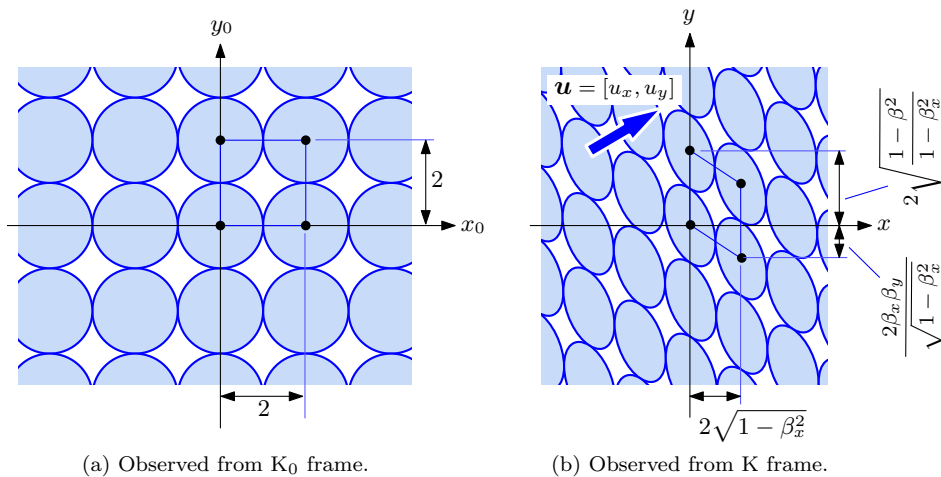


図 2.7: 観測する慣性系による物体配置の変化

体の配置が変形される。格子はもはや正方形でなく平行四辺形となるのだ。

2.6 幾何学的解釈

特殊相対性が成立する時空 (すなわち、慣性系) はミンコフスキー (Minkowski) 時空と呼ばれ、時間座標 t と空間座標 $[x, y, z]$ に関して面白い幾何学的な性質が成立する。時空とは科学小説 (science fiction; SF) で見るとような言葉ではないか。決して SF が発端ではなく、時空は物理学の用語であり、時間と空間を個別ではなく一つの座標として取り扱うための座標系である。

2.6.1 ミンコフスキー時空

ニュートン力学では、いかなる観測者から見ても共通の物理量だったので、空間座標とは区別していた。それに対し、相対性理論では時間も空間座標と同様、値も尺度も異なる量に変換されるため、時間を座標軸の一つとして取り扱うことが自然である。そこで、あえて時間に光速 c を乗じ、長さのディメンジョンをもつようにしてローレンツ変換の微分を書くと、

$$c dt' = \frac{c dt - \beta dx}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad dx' = \frac{dx - \beta \cdot c dt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad dy' = dy, \quad dz' = dz,$$

が得られる。これらの微小量を用いて、

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (2.13)$$

なる微小量 ds を定義しよう。この新たな微小量は時空の線素と呼ばれる。線素とは座標系の任意の場所における微小ベクトルの長さを規定する量である。右辺の第2項以降は3次元の三平方の定理を表している。第1項がなぜか負になっている。実は、これが重要であり、その理由は後にわかる。この線素に対してローレンツ変換を適用すると、

$$-c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = -c^2 dt'^2 + dx'^2 + dy'^2 + dz'^2,$$

が成り立つことから、 $ds^2 = ds'^2$ である。すなわち、 ds はローレンツ変換に対して不変である。このように、定義式 (2.13) で定義された線素がスカラとなる時空はミンコフスキー時空と呼ばれる。

ミンコフスキー時空の線素に関して、光は、必ず、 $ds = 0$ となる経路を運動する。なぜならば、光速不変の原理のため、いかなる観測者が見ても、

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = c^2,$$

が成立し、両辺に dt^2 を乗じると、

$$-(c dt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0,$$

なる関係式が得られるからである。この数式は3次元空間の円錐表面からの類推によって、4次元時空における超円錐の表面を表すことがわかる。この超円錐を光円錐と呼ぶ。模式的に表すと図2.8のようになる。この図では時間の座標軸を上向きにとっている。つまり、下が過去で上が未来である。空間の座標は時間とは垂直な方向にとる。円錐の頂点が、観測者の現在位置である。光は光円錐の表面に沿って伝搬する。

光円錐の内部は時間的 (time-like) 領域と呼ばれる。質量をもつ一般の物体は時間的領域を移動することしかできない。一方、円錐の外は空間的 (space-like) 領域と呼ばれる。空

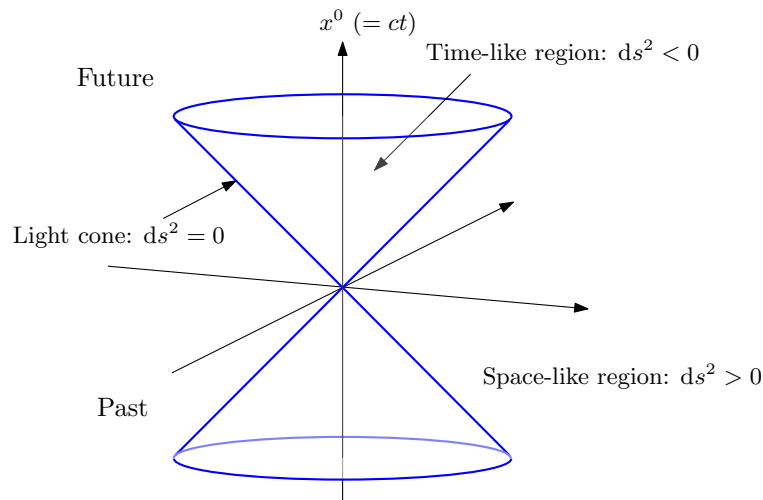


図 2.8: 光円錐と時空における領域

間的領域に情報を伝達するには光速より速い伝達手段が必要である。つまり、空間的領域への情報伝達は不可能である。言い換えると、空間的領域は因果律が成り立たない無関係な事象しか存在しない領域である。光円錐の頂点で発生した事象に対して、たとえそれが、電磁作用であっても、巨大エネルギーを発する核爆発であっても、空間的領域には影響を及ぼさないのである。しかし、この解釈には注意が必要である。なぜなら、時間は必ず一方向に流れるのであるから、空間的領域に存在する観測者もいずれ、時間的領域に入ることになる。すると、光円錐の頂点で発生した事象の影響を受けるかもしれないのだ。

光円錐の表面は光速で運動する粒子などの軌跡が存在する領域であるので、光的領域と呼ばれる。後に示すように、質量がある物体を光速まで加速することができないので、一般の物体は光円錐の表面を移動することはできない。

2.6.2 時空の虚数角度回転

既に示したように、ローレンツ変換では空間座標のうち、系の運動と同一方向の成分が運動の影響を受ける。そのため、相対論的效果を示すため、影響を受ける空間座標と時間の組み合わせで図を描く。その図は**時空図**と呼ばれる。時空図は前項で説明した光円錐の断面を描き、座標軸に目盛を入れた図だと思えばよい。時空図は特殊相対性理論を視覚的に理解するための便利な道具として多くのテキストで取り扱われている²。

図 2.9 を用いて時空図の書き方を説明しよう。最初に自分が存在する慣性系 K の座標軸を描く。水平方向に x 軸を、垂直方向に ct 軸を描くのである。これも光円錐と同様、時間に光速を乗じると長さのディメンジョンをもつから、 t 軸の代わりに ct 軸を用いるのだ。

²筆者は時空図をわかりやすい道具とは思っていなかったりする。

言うまでもなく、K系の座標は直交座標となる。続いて、K系に対して x 軸方向に速度 v で等速度運動する K' 系を考えよう。 K' 系の座標軸を描くには、ローレンツ変換:

$$x' = \frac{x - \beta ct}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad ct' = \frac{ct - \beta x}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

に注目するとよい。前章で既に記述しているが、 $\tanh \vartheta = \beta$ とすると、ローレンツ変換は、

$$x' = x \cosh \vartheta - ct \sinh \vartheta, \quad ct' = -x \sinh \vartheta + ct \cosh \vartheta,$$

のように書き換えられる。この数式は、座標回転に類似している。正確に言うと、虚数角度の座標回転である。実数角度の座標回転が原点を中心とする円に沿って点を移動する変換であるのに対し、虚数角度の座標変換は双曲線に沿って点を移動する。図 2.9 に示すように、 x 軸上の点 P ($x = A$) は双曲線 $x^2 - (ct)^2 = A^2$ に沿って移動し、 x' 軸との交点 P' が $x' = A$ となる点である。なお、 x' 軸は $\tan \theta = \beta$ を満たす角度 θ だけ x 軸から反時計回り

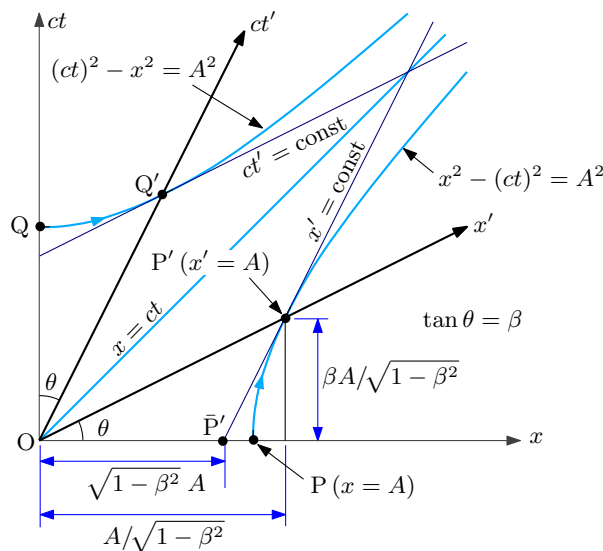


図 2.9: 時空図における座標軸の描き方

に回転した方向に向いている。一方、 ct' 軸は、 ct 軸から時計回りに角度 θ だけ回転した方向に向いている。さらに、点 P' を通り、 ct' に平行な直線は $x' = A$ に対応する線である。時間に関する ct' 軸の成分についても同様である。つまり、時空図では異なる観測者の座標は斜交座標となる。基準である K 系に対する K' 系の速度 v が大きくなると、座標軸の傾斜 θ が大きくなる。その相対速度が c に近づくと、 x' 軸と ct' 軸の双方は、直線 $x = ct$ に収束する。

図 2.9 に示すように、双曲線に沿って移動した座標は、K 系と K' 系とでは尺度が異なる。尺度が異なるので、時空図が K 系の尺度で描かれているなら、 K' の座標を読み取るには x' 軸に沿ってものさしを当てて長さを測るわけにはいかない。しかし、座標を読み取るヒントを図 2.9 に記しておいた。図によると、 x' が一定となる直線を伸ばして x 軸との交点を

\bar{P}' とする。図に記したように、原点から点 \bar{P}' までの距離は、 x' 座標の $\sqrt{1-\beta^2}$ 倍になっている。それを利用すると、原点から点 \bar{P}' までの距離を計測し、その長さに $1/\sqrt{1-\beta^2}$ を乗じれば x' 座標が得られるのである。もう一つの座標 ct' についても同様である。

具体的な座標と、光の世界線を時空図に描いた例は図 2.10 のようになる。ここでは、K系を基準にとった時空図を (a) に、 K' 系を基準にとった時空図を (b) に描いた。上に説明した手順で時空図を描くと、基準系でない慣性系は斜交座標系となる。斜交座標の目盛は、水平方向と垂直方向の双方とも $\sqrt{1-\beta^2}$ の間隔で設定される。例として、図 2.10 (a) に、K系の座標 [4, 3] に点 P をプロットした。この時空図が $\beta = 1/3$ を想定して描かれているので、ローレンツ変換によると、 K' 系の座標で [3.18, 1.77] となるはずである。時空図の格子点を読むと、予想通りになっていることが確認できるだろう。さらに、時空図の点 A と B から発射される光の世界線を描いておいた。世界線は傾きが ± 1 の直線として描かれる。

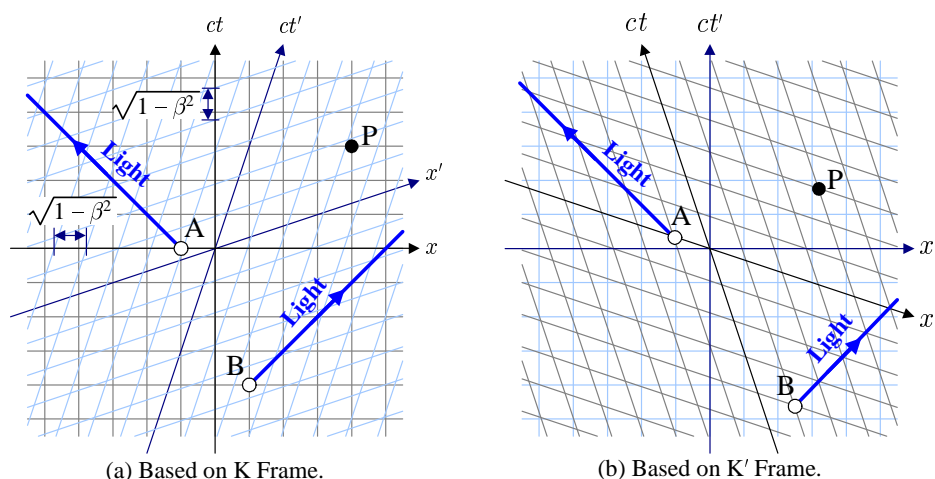


図 2.10: 時空図と光の軌跡

立場を変えて K' 系を基準に時空図を描くと図 2.10 (b) のようになる。この場合は、 K' 系が直交座標系で、K系が斜交座標系となる。K系が K' 系に対して x' 軸方向に速度 $-v$ で等速度運動していると考えれば時空図の描き方も、読み取り方も図 2.10 (a) と同様である。

ローレンツ収縮 時空図を用いてローレンツ収縮を幾何学的に解析することができるので、その手法を説明しよう。 K' 系に固定された二つの点 A と B の距離を計測する例を考えよう。図 2.11 (a) に点 A と B の世界線を描いている。長さを計測するには、2 点の位置を同時に計測しなければならない。そのため、K系で測定する A と B の距離は、時空図の x 軸と平行に A と B の世界線を切断した切片の間の距離 L に等しいはずだ。一方、 K' 系での距離は、 x' 軸と平行に世界線を切断した切片の間の距離であるので、図に示す L' がその距離である。しかし、定規で L と L' の長さを計測して比較すればよいわけではない。K系と K' 系の長さの尺度が異なるからだ。 K' 系の x' 座標は次のようにして計算できる。

- 手順1 対象とする位置から ct' 軸と平行に線を伸ばす。
 手順2 伸ばした線分が x 軸と交わる位置 (座標) を調べる。
 手順3 線分と x 軸の交点の座標を $1/\sqrt{1-\beta^2}$ 倍する。

手順2で得られる交点は、点 A と B で L の差があることが図から容易にわかる。すると、手順3によって、 K' 系から計測した長さは $L' = L/\sqrt{1-\beta^2}$ となるのだ。つまり、 K' から見た長さより K 系から見た長さが短い。すなわち、運動する物体の長さが収縮すると結論できる。なお、図中のブラケット ([]) 内の寸法は K' 系の尺度による寸法である。他の寸法は K 系の尺度を用いている。

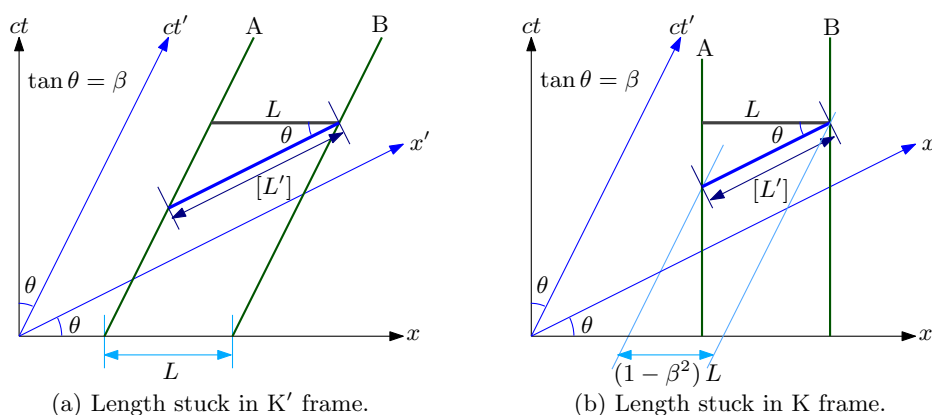
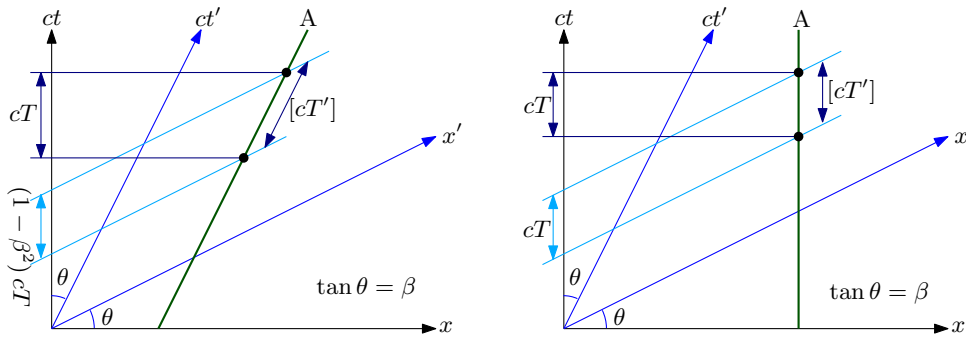


図 2.11: 時空図による長さの短縮の模式図

逆の状況として、 K 系に固定した二つの点 A と B の間の距離はどうだろうか？ この場合、図 2.11 (b) に示すように二つの点の世界線は垂直方向を向く。 K 系から計測される長さは図に示すように L とする。 K' 系から見た長さは図に示す L' である。この長さを評価するには、上で述べた3段階の手順を踏めばよい。二つの座標から x 軸に下した座標は、図に示すように $(1-\beta^2)L$ の距離を隔てている。したがって、 K' 系から見た長さは $L' = \sqrt{1-\beta^2}L$ となる。この状況では、 K' から見た長さの方が短いのだ。ここでも、ブラケット内の数値は K' 系の尺度での計測値である。動いている系の長さが縮んでみるという点では、図 2.11 の (a) と (b) は現象が共通している。これが長さにおけるローレンツ収縮である。

時間に関するローレンツ収縮も、同様に時空図で説明することができる。 K' 系に固定された時計の読みを評価する状況を図 2.12 (a) に示す。時計の世界線は線分 A として描いている。世界線上の二つの点について、 K 系の ct 軸状に投影した距離 cT が、 K 系の時計で計測した時間 T に対応する。 K' 系の時計で計測した時間 T' は、 K' 系に投影した座標の距離 cT' に対応する。この距離は、長さの場合と同様に、世界線上の二つの点から x' 軸に平行な線分と ct 軸の交点を求め、それらの距離を $1/\sqrt{1-\beta^2}$ 倍した値に等しい。この図によると、 $T' = (1-\beta^2)T$ が得られ、運動する時計が遅れるという現象が導かれる。



(a) Time read by the clock stuck in K' frame. (b) Time read by the clock stuck in K frame.

図 2.12: 時空図による時間の収縮の模式図

K 系に固定された時計を観測する場合は、図 2.12 (b) の時空図として描かれる。この場合、 $T' = T/\sqrt{1-\beta^2}$ が得られる。この場合も、運動する時計が遅れて観測されることは図 2.12 (a) と同様である。なお、運動する時計を観測するとは、観測者と異なる速度で運動する時計を観測することを意味する。

2.6.3 タキオンと因果律

第 2.4 節で述べたように、運動している系では同時性の概念が異なり、二つの事象の発生時刻の前後関係が入れ替わることがある。事象の発生には原因があり、原因が伝達した結果として事象が発生するのだ。その原因と事象発生との関係は因果律と呼ばれる。原因の伝達速度が光速を超えないとすれば、因果関係の可能性のある二つの事象の発生時刻の前後関係が入れ替わることはない。

光速を超える伝達手段があれば因果関係が破綻する可能性がある。その可能性を時空図で確認しよう。図 2.13 に K 系と、その系と相対的に速度 $v = c/2$ で運動する K' 系の座標系を描いている。その時空図には点 A から K 系に対して速度 $4c$ 、すなわち、光速の 4 倍の速度で発射される物体の世界線を描いた。その世界線をよく見ると、 K' 系の座標では、時間 t' が小さい方向にゆっくりと移動している。つまり、未来から過去に物体が移動しているのだ。これが因果性の破綻である。光速より早い伝送手段があれば、因果性のある二つの事象の発生時刻を入れ替えることができる。その端的な表現として、未来から過去へ情報伝達できるのだ。

光速より早い速度で運動する物体はタキオン (tachyon) と呼ばれる。タキオンがあれば、未来から過去へ情報を伝達することが可能になる。過去へ情報を伝達するには、図 2.13 に示す原理を利用すればよい。情報を伝送する者は高速運動しなくてはならない。高速運動する者は情報を載せたタキオンを送信する。運動速度とタキオンの速度の組み合わせが選ばれていれば、情報は時をさかのぼり過去に到達するのだ。

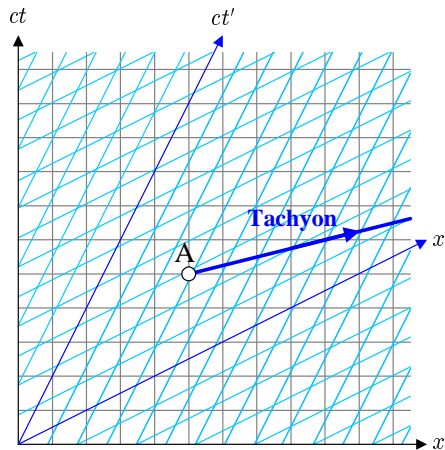


図 2.13: タキオンの世界線 ($v = 4c$)

すると、未来に発生する事故が事前にわかるので、その防止策をとることもできるだろう。防止策をとると、事故が発生しないので、未来から到達した情報と矛盾することになる。これが因果律の破綻である。そのようなパラドックスに陥るため、やはり、光より早い物体は情報伝達には使えないのだろう³。

タキオンから見た時空 思い切ってタキオンから見た時空を考えてみよう。ある基準の慣性系 K に対し、 x 軸方向に運動するタキオンと並走する慣性系を K' とするのである。タキオンであってもローレンツ変換が成立すると考えるのが自然である。ここで、タキオンならば $\beta > 1$ であるはずなので、ローレンツ変換は、

$$ct' = \frac{-i(ct - \beta x)}{\sqrt{\beta^2 - 1}}, \quad x' = \frac{-i(x - \beta ct)}{\sqrt{\beta^2 - 1}}, \quad y' = y, \quad z' = z,$$

となる。変換結果に含まれる i は虚数単位である。つまり、タキオンの時空の座標 x' も ct' も虚数となるのだ。虚数座標か何の意味するのか？

虚数座標の意味を考えるため、強引であるがミンコフスキー時空の特徴に注目しよう。ミンコフスキー時空の特徴とは、線素 $ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ が座標系に関わらず一定であるということである。これは時空における微小距離を与える三平方の定理に類似した量である。ところが、 $c^2 dt^2$ だけ負の符号を伴っている。このことから、他の座標と比べ時間 t が特別な意味をもっていることに由来すると推測したくもなる。確かに、位置を変えることによって x, y, z を自由に変化することができるが、時間 t は負の方向に変化させることができず、その変化さえ制御することができないのだ。時間座標について、 $w \equiv ict$ なる虚数座標を定義しよう。すると、ミンコフスキー時空の線素は、

$$ds^2 = dw^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

³あえて、「タキオンが存在しない」とまでは言わなかった。

となる。この線素は、4次元直交座標の線素である。そのうち、 x, y, z は実数座標であるが、 w は虚数座標である。タキオンの時空へローレンツ変換した際、 x' と ct' が虚数のなるので、 $w' \equiv ict'$ は実数となる。そのため、強引な気がするが、タキオンの時空では x と w の役割が入れ替わっていると解釈することができる。空間座標が自由に变化できることに對し、時間座標が一方向にしか進めないことを考えると、タキオンの時空では時間を自由に移動でき、空間的な進行方向に自由が利かないと解釈できそうだ。

上に述べた大胆な解釈を時空図に描いてみよう。対象とするタキオンは $v = 3c$ で運動しているとする。タキオンの時空は K' 系である。速度が光速を超えるため、 x' 軸は x から 45 度を超える角度で回転し、図 2.14 に示す角度に位置する。一方、 ct' も 45 度を超える角度で回転し、その結果、 x' と ct' の位置関係が逆になっている。図に示した時空の

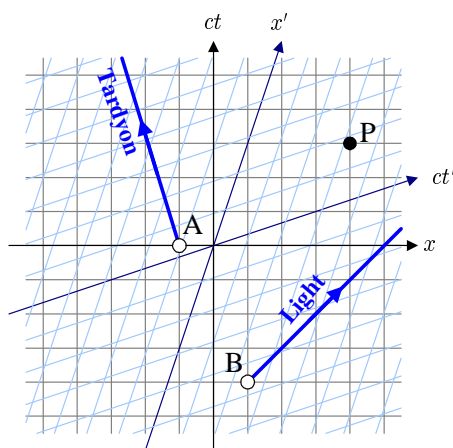


図 2.14: タキオンの時空図

点 A は光速より遅い普通の物体 (tardyon) の発射点である。タキオンからその物体の軌跡を観測すると、時間をさかのぼっている。しかも、図示した座標軸を見ると、光速を超えない範囲でどんなに速度を変えても、タキオンから見た x' 座標は、必ず、増加するのだ。あたかも時間と空間の立場が入れ替わったかのようなのではないか。確かに、ミンコフスキー時空からの考察と合致する解釈が得られた。

特殊相対性理論はタキオンの存在を否定こそはしないものの、タキオンが存在すると、時間と空間の立場が入れ替わり、因果律が破綻する可能性が発生する。ただし、因果律の破綻は我々がタキオンを情報伝達に利用した場合に発生するので、仮にタキオンが存在したとしても、情報伝達には利用できないだろう。

第3章 運動学

光速度不変の原理によって、異なる速度で運動する慣性系の間の変換はガリレイ変換とは異なり、時間さえも観測者ごとにことなる座標となる。このように時間の概念が変わったことにより、速度や加速度などの運動に関する物理量もニュートン力学とは違うものになる。本節では、光速度不変の原理に基づき速度と加速度の変換を導き、運動量や運動エネルギーについて考察する。

3.1 速度変換

速度変換とは、別の慣性系から観測したときの速度を算出するための変換公式である。ある慣性系 K から観測していた物体を別の慣性系 K' から見ると、 K 系から見た速度とは異なって観測される。速度が異なって観測されることはガリレイ変換でも成立する。ガリレイ変換の場合、 K' 系から観測される速度は、 K 系から見た物体の速度と K' 系の速度の加減算で計算できる。しかし、ローレンツ変換では単純な加減算で速度を変換できないことが簡単に予想できる。それは光速不変の原理を思い起こせば明らかである。光速不変の原理を速度変換則に置き換えると、光速にどのような速度を加減算しても得られる速度は常に光速に等しいことになる。このような結果を得るには、単純な加減算でなく、多少、複雑な変換則であることが予想される。本節では、異なる慣性系から見た速度を得るための変換則を導出しよう。

簡単なことと思うかもしれないが、速度とは何かを考えてみよう。速度とは、単位時間当たりの物体の変位量である。単位時間あたりと書いているが、物体の速度が変化しても成立するように、微小時間 dt の間の変位 $[dx, dy, dz]$ を計測し、

$$\mathbf{u} = \left[\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right],$$

によって速度を計算するのである。注意しなければならないのは、観測者が存在する慣性系が異なると、位置の尺度も時間の尺度も異なることである。

ある物体 P を K 系から見たときの座標を $[ct, x, y, z]$ 、 K 系に対して x 軸方向に速度 v で等速度運動する K' から見たときの座標を $[ct', x', y', z']$ とする。 K 系から見たとき、この座

標が微小変化をして $[c(t + dt), x + dx, y + dy, z + dz]$ となったとする。一方, K' 系から見たとき, この座標は $[c(t' + dt'), x' + dx', y' + dy', z' + dz']$ と書くことにする。この微小変位に対してもローレンツ変換:

$$dt' = \frac{dt - (v/c^2) dx}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad dx' = \frac{dx - v dt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad dy' = dy, \quad dz' = dz, \quad (3.1)$$

が成り立つ。この関係は, $[c(t + dt), x + dx, y + dy, z + dz]$ のローレンツ変換が $[c(t' + dt'), x' + dx', y' + dy', z' + dz']$ になることから容易に導かれる。または, ローレンツ変換を微分しても同一の結果が得られる。

ここで, 物体 P の速度について考えてみよう。K 系から見たときの速度を $[u_x, u_y, u_z] = [dx, dy, dz]/dt$ とする。K' 系に関しては, これまでと同様に, プライムをつけて表記する。微小変位のローレンツ変換より, 速度変換は,

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - vu_x/c^2}, \quad u'_y = \frac{u_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - vu_x/c^2}, \quad u'_z = \frac{u_z \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - vu_x/c^2}, \quad (3.2)$$

となる。この相対速度は, 第 2.5.3 項での予想と同一の結果である。速度変換の例を図示すると, 図 3.1 のようになる。この図では, K' 系が K 系に対し, 右方向に $v = 0.500c$ で等速度運動していることを仮定した。特に, 物体 B がガリレイ変換では K' 系から見た速度が光速を超えるのだが, ローレンツ変換では $0.909c$ となっている。さらに, 物体 C は二つ

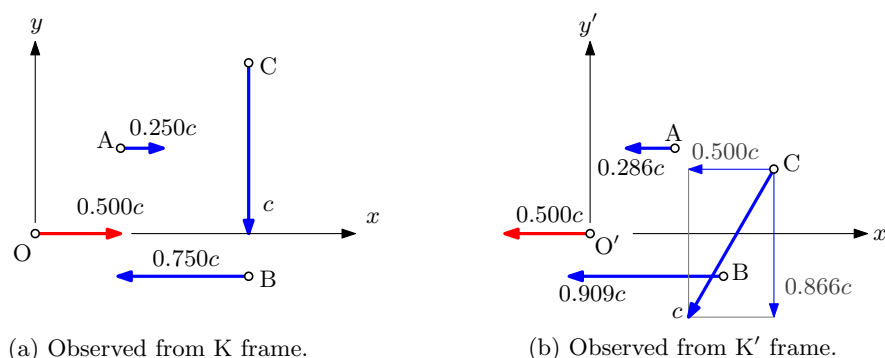


図 3.1: 相対速度の変換

の慣性系の間で速度成分が異なっているが, 速度ベクトルの大きさ (速さ) はどちらも c である。この変換結果は光速不変の原理と合致する。また, 図 3.1 における物体 A, B, C の位置は, 第 2.5.3 項で取り扱った斜めローレンツ変換に基づいて計算した結果である。面白いことに, 図 3.1 (a) では物体 B と C の x 座標が一致しているのに, 図 3.1 (b) では一致していない。この現象は, 前章で説明したように, 異なる慣性系では同一性が一致しないことが原因である。この例では, K 系と K' 系の原点が重なる時刻を $t = t' = 0$ となるように時計合わせしている。K 系ではその時刻と同時に, 物体 B と C の x 座標が等しくなる。しかし, K' 系では同時性が異なるため, $t' = 0$ のとき物体 B と C の x 座標が異なるのだ。

続いて、変換された速度の大きさに注目しよう。その目的は、光速不変の原理と、変換された速度が絶対に光速を超えないことを検証するためである。変換された速度の大きさを比べるために各座標成分の自乗和を計算すると、

$$\frac{u_x'^2 + u_y'^2 + u_z'^2}{c^2} = 1 - \frac{(1 - \beta^2) [1 - (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)/c^2]}{(1 - vu_x/c^2)^2}, \quad (3.3)$$

が得られる。例えば、K系から見たときの速さが c であれば、 $u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = c^2$ であるから、右辺の第2項がゼロとなる。したがって、K'系から見た速度も c に等しい。したがって、速度変換は光速不変の原理と矛盾しない。

座標系の速さ v と、物体の速さ $(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)^{1/2}$ がともに光速より小さい場合、変換される速さは、必ず、光速より小さくなる。変換式 (3.3) が正であり、右辺の第2項も正であるので、(3.3) はゼロ以上で1未満の値となるはずだ。つまり、光速度より小さな速度を他の慣性系から見ても光速より速くなることはあり得ない。

速度変換を応用すると、どんなに加速しても光速を超えられないと推測できる。その理由を説明しよう。K系に対して速度 $c/2$ で運動する観測者が、さらに、自分から見た相対速度が $c/2$ になるまで加速したとする。わかりにくい表現なので、ある場面を想像しよう。運動中の自分を、ある物体が追い越した。その物体の相対速度を計測すると $c/2$ だった。次に、その物体と同一速度になるまで加速する。追いつくまでではない。同一速度になるまで、すなわち、相対速度がゼロになるまでだ。速度の速度変換則によると、自分の速度が $c/2$ のとき相対速度 $c/2$ で自分を追い抜く物体の速度は $4c/5$ である。つまり、最終的に、自分はK系から見ると速度 $4c/5$ まで加速するのだ。その速度からさらに、自分から見た相対速度が $c/2$ になるまで加速すると、K系から見た観測者の速度は $13c/14$ となる。その結果を図示すると図 3.2 が得られる。信じがたいが、隣り合う速度はすべて、相対速度が $c/2$ である。また、図のもっとも下に描いた光速は、図に示したどの速度の観測者から見ても c なのである。この考察のように、加速の操作をどんなに繰り返しても、速度変換則による

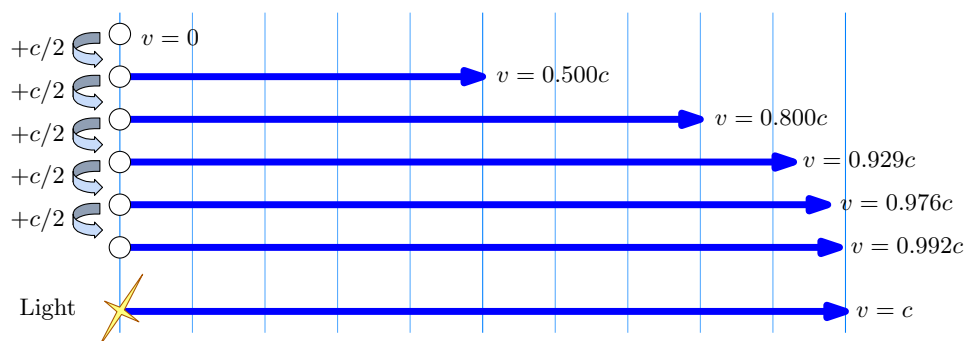


図 3.2: K系から見た加速の結果

と c を超えることはできないと言えそうだ。つまり、加速をして光速を超えることは不可

能のようだ。次節で加速度変換を用いて、光速を超えることが厳密に不可能であることを検証する。

座標回転との関係 速度変換則の x 座標成分に、数学公式との類似性に気がついたらどうか？ 正接関数 (tangent), 正確には双曲正接関数 (hyperbolic tangent) との類似性がある。双曲正接関数の加法定理は、

$$\tanh(A - B) = \frac{\tanh A - \tanh B}{1 - \tanh A \tanh B},$$

である。つまり, $\tanh A \equiv u_x/c$, $\tanh B = v/c$ とおけば x 軸方向の速度変換則が双曲正接関数の加法定理と一致するのだ。さらに, $\tan iA = -i \tanh A$ であることを利用すれば, 双曲正接関数の加法定理は、

$$\tan i(A + B) = \frac{i(\tan iA - \tan iB)}{1 + \tan iA \tan iB},$$

に書き換えられる。これはまぎれもなく正接関数の加法定理であるが、正接関数の変数が純虚数である。この数式が意味しているものは、ローレンツ変換が虚数角度での時空の座標回転であるということである。ローレンツ変換が座標回転であることは、前章でも説明した。速度変換則は、ローレンツ変換を複数回実行することによっても得られるはずであり、ローレンツ変換が座標回転ならば、回転を複数回実行した結果が速度変換則を導くのである。

3.2 加速度変換

相対性理論では光速は究極の速度であり、決して超えることのできない速度らしいことが前節までにわかってきた。見方を変えると、ある物体が加速度運動をしていたとすると、その物体との相対速度が大きな慣性系から見ると、加速度は小さく観測される。速度が光速に近いほど、観測される加速度はゼロに近づいていくはずだ。

前節と同様に、加速度とは何かを考え直しておこう。加速度とは単位時間あたりに生じる速度変化の割合である。原理的には、非常に短い時間間隔 dt を隔てて 2 回だけ、物体の速度を計測する。その速度の差が du であったとすると、 $\mathbf{a} \equiv du/dt$ によって加速度が計算できるのだ。なお、前節で確認したように、観測者が存在する慣性系が異なれば速度が変わるし、時間の尺度も変わる。そこに注意が必要である。

加速度の変換式は、(3.2) を微分することによって導出できる。慣性系 K から見た加速度を $[a_x, a_y, a_z]$, K 系に対して x 軸方向に速度 v で等速運動する K' 系から見た加速度を

$[a'_x, a'_y, a'_z]$ とする。すると、加速度の変換は、

$$\begin{aligned} a'_x &= \frac{(1 - \beta^2)^{3/2}}{(1 - vu_x/c^2)^3} a_x, \\ a'_y &= \frac{1 - \beta^2}{(1 - vu_x/c^2)^3} \left[\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right) a_y + \frac{va_x}{c^2} u_y \right], \\ a'_z &= \frac{1 - \beta^2}{(1 - vu_x/c^2)^3} \left[\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right) a_z + \frac{va_x}{c^2} u_z \right], \end{aligned} \quad (3.4)$$

によって与えられる。この式の導出にあたり、前節のように

$$dt' = \frac{1 - vu_x/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} dt,$$

の関係を用いた。その関係式によって、時間の尺度の違いを補正しているわけである。得られた数式(3.4)は、K系とK'系から観測される加速度を変換する公式である。速度変換に比べ、加速度変換(3.4)は複雑な形をしている。微分の階数が増えたのだから、複雑な形になるのは当然である。その変換式には、座標系の相対速度 v だけでなく、物体の速度 $[u_x, u_y, u_z]$ の依存性も含まれている。速度の依存が含まれているので、加速度の変換則は複雑に見え、その物的意味がつかみにくいかもしれない。

物理的意味がつかみやすい例として、K'系に対して瞬間的に静止している物体について考えてみよう。K'系に対して静止しているということは、 $u'_x = u'_y = u'_z = 0$ である。また、それは $u_x = v, u_y = u_z = 0$ である。その物体について、加速度の変換式を適用すると、

$$a_x = (1 - \beta^2)^{3/2} a'_x, \quad a_y = (1 - \beta^2) a'_y, \quad a_z = (1 - \beta^2) a'_z,$$

が得られる。例えば、K'系に存在する観測者自身が加速し、それをK系から観測したとき、この数式によって加速度が変換される。ここで、観測者自身の加速度とは何かを考えておこう。自分自身の加速度とは、どうやって計測するのか？ 基準となる系との相対速度を計測し、その速度の時間変動の割合を計測する方法ではどうか？ いや、その方法では自分の加速度はわからないのである。なぜなら、どんなに加速しても他の系との相対速度は光速 c を超えないからだ。つまり、ある特定の系を基準とすると、時々刻々と計測の尺度が変化し、真の加速度が特定できないだろう。

何を自身の加速度と考えるか？ 加速すれば慣性力を感じるではないか。慣性力を計測すれば観測者自身の加速度が特定できるはずだ。もしくは、このように考えてもよいだろう。相対性理論では異なる速度の観測者と長さや時間の尺度が異なるとはいえ、ほとんど等しい速度の観測者どうしなら同じ尺度と考えてもよいだろう。つまり、加速度を定義する際、微小時間だけ過去の自分の速度の系を基準の系に選ばばよいのである。加速する観測者は、短い時間間隔で基準とする慣性系を切り替えていき、その都度、加速度を計算すれ

ばよい。微小時間で加速度と、速度変化ならニュートン力学が成立し、 $F = -ma$ によって観測者自身に作用する慣性力が決まる。つまり、短い時間間隔で基準の慣性系を切り替えるモデルは、自身に作用する慣性力から加速度を決定することと等価である。

現時点で数式にしたがって計算するだけなら、ここまで考察しなくてもよいかもしれないが、この先の理論展開のために、数式が何を意味するかを考えておくのはよいことである。得られた加速度の変換公式によると、運動している物体の加速度を慣性系から観測すると、運動している物体自身が感じるよりも小さな値が観測される。速度が大きいほど加速度の収縮は深くかかり、速度が光速に達すると加速度は必ずゼロになる。よって、光速を超えることは不可能である。

3.3 等加速度運動

前節までに速度、および、加速度の変換則が導出されたので、等加速度運動について考察してみよう。ただし、既に示したように、相対性理論では、同じ物体を観測したとしても、観測者によって観測される加速度が異なる。よって、ここで議論する等加速度運動は、ニュートン力学の等加速度運動とは定義を変えなければならない。

既に見たように、観測する慣性系によって長さや時間の尺度が異なる以上、加速度も同じように異なる値に変換されることを学んだ。つまり、等加速度といった場合、ある特定の観測者から見たときに等加速度であるに過ぎず、別の観測者から見た場合、等加速度ではない。では、特定の観測者は誰にするか、という疑問が起きる。相対性理論では、相対速度によって長さや時間の尺度が変わるのであるから、観測者を加速する本人としてしまえばよい。加速する本人がどうやって加速度がわかるのか、という疑問も問題はない。前節で述べたように、自身に作用する慣性力を計測すればよいのだ。つまり、加速度運動する観測者自身が、一定の慣性力を受けるような運動を等加速運動と定義する。

簡単のため、加速度運動する物体 P の運動方向は x 軸方向に限定し、加速度の方向も x 軸方向であるとする。物体 P は x 軸方向に一定加速度 a で加速している。正確に言うなら、物体 P の質量が m であるなら、一定の慣性力 $-ma$ を感じるように加速を継続している。ある時点で物体 P の速度が、K 系から見て u である場合、K 系から見た加速度は、前節の結果より、

$$\frac{du}{dt} = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2} a,$$

となる。この式は変数分離型の微分方程式であるので容易に解くことができ、速度 u の時間 t に関する依存性:

$$u = \frac{a(t - t_0)}{\sqrt{1 + a^2(t - t_0)^2/c^2}}, \quad (3.5)$$

が得られる。ただし、 t_0 は速度 u がゼロとなる時刻を表す。例えば、 $t = 0$ のときの速度が u_0 であることを条件とすれば、

$$t_0 = -\frac{u_0}{\sqrt{1 - u_0^2/c^2} a},$$

のように t_0 が選ばれる。また、得られた数式 (3.5) が、

$$\frac{u}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = a(t - t_0), \quad (3.6)$$

のように書き換えられることに注意すべきである。後に学ぶ 4 元速度に関係するが、この式によると、等加速度運動とは 4 元速度の時間微分が一定になるような運動である。

さらに、(3.5) を時間 t について積分すれば物体 P の変位:

$$x = \frac{c^2}{a} \left(\sqrt{1 + \frac{a^2(t - t_0)^2}{c^2}} - 1 \right) + x_0, \quad (3.7)$$

が得られる。ただし、 x_0 は $t = 0$ における物体 P の変位である。この式は、

$$x = \frac{c^2}{a} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - 1 \right) + x_0,$$

のように書き換えることができる。この式から、加速度 a による等加速度運動では、速度ゼロから u までの加速の間に物体 P は、

$$x|_{u=u} - x|_{u=0} = \frac{c^2}{a} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - 1 \right),$$

の距離を移動することがわかる。また、速度ゼロの状態から現在の速度に加速するまでに物体に作用させた仕事が物体の運動エネルギーであるので、物体 P の質量が m ならば、速度 u で運動する物体 P は、

$$E_k = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - mc^2,$$

の運動エネルギーをもつことになる。ここでは運動方向を x 軸方向、しかも、等加速度運動に限定しているが、この運動エネルギーは最も有名な相対論的効果 $E = mc^2$ に関する数式である。後の節で、任意の加速度・軌跡をもつ運動に関してもこの式が成立することは証明されている。また、変位 x の式は、

$$\frac{a^2}{c^4} \left(x + \frac{c^2}{a} \right)^2 - \frac{a^2 t^2}{c^2} = 1, \quad (3.8)$$

のように変形できる。ただし、簡単のため、 $t_0 = 0$, $x_0 = 0$ とした。この式は、図 3.3 に示すような双曲線になる。この双曲線は、速度 u が十分に小さい範囲では、ニュートン力学における等加速度運動する物体の変位 $x = at^2/2$ に近似的に一致する。

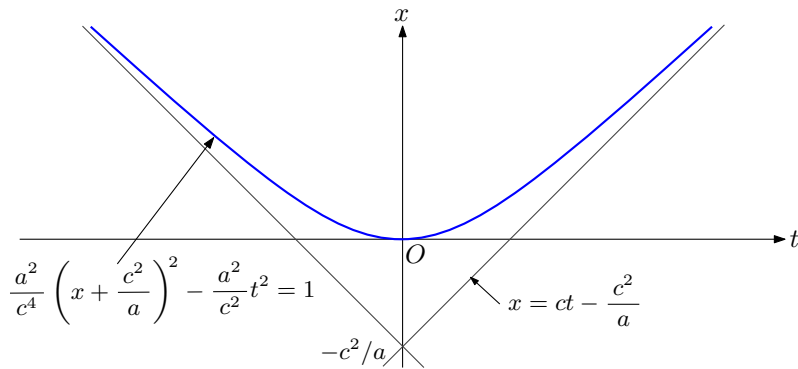


図 3.3: 等加速度運動する物体の変位

ところで、この図に示した双曲線に対する漸近線 $x = ct - c^2/a$ は物体 P の後方 c^2/a の距離から追いかける光の変位に他ならない。つまり、物体を光速まで加速することは不可能ではあるが、加速度 a で等加速度運動する物体を距離 c^2/a 以上隔てた後方から光が追いかけたとしても、その光は物体 P に追いつくことができない。

等加速度運動について考察したが、一つ注意をしておく。ここで計算した内容は、あくまでも、慣性系から等加速度運動をした場合に限る。等加速度運動をしている観測者が慣性系に静止する物体を観測した場合には、この節の計算結果を適用することはできない。なぜなら、慣性系とは異なり、加速度運動する観測者には、その加速度に応じた慣性力が作用しているため、慣性系に対して相対的ではないからである。加速度運動する観測者から見た状態を厳密に記述するには一般相対性理論が必要になる。

3.4 運動量

前節で説明したように、ある慣性系から見て相対的に運動する物体の加速度は、その速度に依存して小さく観測される。そのため、運動量はニュートン力学での表記とは異なることが予想される。ここでは、ニュートン力学における運動量の定義にローレンツ変換を適用して相対論的な運動量を算出する。

ニュートン力学における運動量とは、物体を静止状態から速度 \mathbf{u} に加速するまでに要した力を時間について積分した量（いわゆる力積）である。すなわち、物体を加速するための力を \mathbf{K} とすると、運動量 \mathbf{p} は、

$$\mathbf{p} = \int_{v=0}^{\mathbf{u}} \mathbf{K} dt, \quad (3.9)$$

で定義される。この量を計算するために力を相対論的に考える必要がある。相対性理論を考慮した力については、第 4 章で説明する電磁気学の考察が必要となる。

慣性系 K 系に対して x 軸方向に速度 v で等速運動している慣性系 K' 系から見たとき、ある時点で静止している物体が存在したとする。この物体に、 K' 系から見て力 \mathbf{K}' が作用しているとする。第4章で導出する変換式 (4.42) によると、力は、

$$K_x = K'_x, \quad K_y = \sqrt{1 - \beta^2} K'_y, \quad K_z = \sqrt{1 - \beta^2} K'_z,$$

のように変換される。この式は物体の運動方向が x 軸方向に限定した場合を表しているが、慣性系の座標軸のとり方は自由なのである。物体の運動方向が x 軸方向でなくても同様に変換されるはずである。その場合、力 \mathbf{K} を物体の速度 \mathbf{v} に平行な成分 \mathbf{K}_{\parallel} と垂直な成分 \mathbf{K}_{\perp} に分離すれば、力の変換式は、

$$\mathbf{K}_{\parallel} = \mathbf{K}'_{\parallel}, \quad \mathbf{K}_{\perp} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \mathbf{K}'_{\perp}, \quad (3.10)$$

のように書くことができる。この変換則は電磁気力を対象とする¹変換式であるが、電磁気力以外の力もこの変換則にしたがうと考えるのが自然である。なぜなら、ある慣性系から見たとき、2つの力がつり合っているならば、別の慣性系から見てもそれらの力はつりあっているはずだからだ。当然、一方が電磁気力で、もう一方が他の力であっても、慣性系によらず成立するという事は、すべての力が電磁気力と同じ変換にしたがうということである。

まず、考察する物体の質量を m_0 とする。この物体が速度 \mathbf{v} で運動しているとき、瞬間的にこの物体と併走する慣性系 K' が存在すると仮定する。 K' 系から見るとその物体は静止しているので、ニュートン力学的な近似が成り立ち、

$$\mathbf{K}' = m_0 \frac{d\mathbf{v}'}{dt'}$$

となる。さらに、前項で算出した加速度の変換則より、

$$\frac{d\mathbf{v}'_{\parallel}}{dt'} = \frac{1}{(1 - \beta^2)^{3/2}} \frac{d\mathbf{v}_{\parallel}}{dt}, \quad \frac{d\mathbf{v}'_{\perp}}{dt'} = \frac{1}{1 - \beta^2} \frac{d\mathbf{v}_{\perp}}{dt}, \quad (3.11)$$

が成り立つことにも注意しておく。これらの式はそれぞれ、速度 \mathbf{v} と平行な成分と垂直な成分に分けたときの加速度の変換式である。しかし、この加速度の変換式は力の変換 (3.10) とは異なる形をしている。ニュートン力学における力と加速度の関係 $\mathbf{K} = m d\mathbf{v}/dt$ からの類推によって、これらの加速度変換と力の変換を結び付けるには、

$$m_{\parallel} = \frac{m'_{\parallel}}{(1 - \beta^2)^{3/2}}, \quad m_{\perp} = \frac{m'_{\perp}}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

¹一般力学における力は、重力を除き、すべて電磁気力である。それらの力には、弾性力、張力、摩擦力などがあるが、その力はすべて物質を構成する分子の分子間力を起因とする。分子間力は分子間で作用する電磁力である。

のように、質量が速度ベクトルに対して平行な成分と垂直な成分で、別々に変換される必要がある。古い文献では前者を縦質量、後者を横質量と呼んでいた。アインシュタインの第1論文でも縦質量と横質量という記述²が現れている。

さすがに、縦質量、横質量のように質量が方向成分をもつのは奇妙である。質量がベクトルであるかのような表現は避けたいところだ。ニュートン力学を踏襲し、運動量の定義式(3.9)を計算してみると、

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \int \mathbf{K} dt = \int (\mathbf{K}_{\parallel} + \mathbf{K}_{\perp}) dt = \int \left(\mathbf{K}'_{\parallel} + \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \mathbf{K}'_{\perp} \right) dt \\ &= \int \left[m_0 \frac{d\mathbf{v}'_{\parallel}}{dt'} + m_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{d\mathbf{v}'_{\perp}}{dt'} \right] dt \\ &= \int \left[\frac{m_0}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} \frac{d\mathbf{v}_{\parallel}}{dt} + \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{d\mathbf{v}_{\perp}}{dt} \right] dt, \end{aligned} \quad (3.12)$$

となる。ここで、速度方向の単位ベクトル \mathbf{e}_v とすると、速度ベクトルが $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_v$ であることに注意して、加速度ベクトルを速度ベクトルと平行な成分と、垂直な成分に分割してみる。平行な成分は、

$$\frac{d\mathbf{v}_{\parallel}}{dt} = \frac{1}{v^2} \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} \right) \mathbf{v} = \mathbf{e}_v \frac{dv}{dt},$$

となるので、速度ベクトルと平行な成分は速さ（速度ベクトルの大きさ）を変化させる成分であることがわかる。一方、垂直な成分は、

$$\frac{d\mathbf{v}_{\perp}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)_{\parallel} = v \frac{d\mathbf{e}_v}{dt},$$

となることから、速さ一定のもとで速度の方向を変える成分であることがわかる。これらの成分を用いて(3.12)を書き換えると、

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= m_0 \int_{v=0}^u \left(\frac{\mathbf{e}_v}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} \frac{dv}{dt} + \frac{v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{d\mathbf{e}_v}{dt} \right) dt \\ &= m_0 \left[\int \frac{\mathbf{e}_v}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} \frac{dv}{dt} dt + \left(\frac{u\mathbf{e}_u}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - \int \frac{\mathbf{e}_v}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} \frac{dv}{dt} dt \right) \right] \\ &= \frac{m_0 \mathbf{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \end{aligned}$$

が得られる。第1行目の右辺第2項の積分には、部分積分を利用した。第2行目の第2項について、 $u = \mathbf{e}_u = \mathbf{u}$ であるので、第3行目のように計算されるのだ。この結果を改めて書くと、

$$\mathbf{p} = \frac{m_0 \mathbf{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad (3.13)$$

²アインシュタイン, “相対性理論,” 内山龍雄 訳・解説, 岩波文庫, 青 934-1, p. 58, 1988.

である。力と加速度の関係とは異なり、運動量 \mathbf{p} は速度ベクトル \mathbf{u} と同一方向に向かうベクトルとなっている。質量 m の物体の運動量についてのニュートン力学での記述 $\mathbf{p} = m\mathbf{u}$ を相対性理論でも期待するならば、(3.13) によって、あたかも、運動する物体の質量が、

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad (3.14)$$

のように増大するかのように見える。しかし、(3.13) は運動量を記述しただけにすぎず、現時点で運動する物体の質量が増大すると結論づけるのは乱暴である。相対論的な質量増大については、本章でさらに運動エネルギーを定式化し、エネルギーと運動量の保存則について考察する際に、改めて議論しよう。

3.5 相対論的 運動エネルギー

相対論的な運動エネルギーを導出してみよう。ニュートン力学における運動エネルギーとは、静止状態から力を加えてある速度 \mathbf{u} まで加速したとき、その加速に要した仕事量である。すなわち、物体を加速するための力を \mathbf{K} とすると、運動エネルギー E_k は

$$E_k = \int_{v=0}^u \mathbf{K} \cdot d\mathbf{r}, \quad (3.15)$$

と定義される。ここで、 \mathbf{r} は物体の位置ベクトルとする。運動量と同様に、運動エネルギーもニュートン力学での定義を踏襲し、相対論的な運動エネルギーを導出しよう。

前項と同様に、質量を m_0 とし、この物体が速度 \mathbf{v} で運動しているとき、瞬間的にこの物体と併走する慣性系 K' が存在すると仮定する。 K' 系から見ると物体は静止しているので、ニュートン力学的な近似が成り立ち、

$$\mathbf{K}' = m_0 \frac{d\mathbf{v}'}{dt'}$$

となる。前項の力の変換則を用いて運動エネルギーの定義式 (3.15) を計算していくと、

$$\begin{aligned} E_k &= \int \mathbf{K} \cdot d\mathbf{r} = \int \mathbf{K} \cdot \mathbf{v} dt \\ &= \int (\mathbf{K}_{\parallel} + \mathbf{K}_{\perp}) \cdot \mathbf{v} dt = \int K_{\parallel} v dt = \int K'_{\parallel} v dt = m_0 \int \frac{dv'}{dt'} dt \\ &= m_0 \int \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} \frac{dv}{dt} v dt = m_0 \int_0^u \frac{v}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} dv \\ &= m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - 1 \right), \end{aligned}$$

が得られる。第1行目はニュートン力学とまったく同じだ。第2行目への数式変形で、力のベクトルを速度に平行な成分と垂直な成分に分解した。しかも、速度との内積をとって

いるため、速度と垂直な成分はエネルギーに寄与しない。力の変換則によると、速度と平行な成分は異なる慣性系から見ても不変である。第3行目への数式変形には加速度の変換則を利用した。その結果、右辺が得られるのだ。この結果を改めて書くと、

$$E_k = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - 1 \right), \quad (3.16)$$

となる。導出された運動エネルギーは u/c について1次近似をとると、 $E_k \simeq m_0 u^2/2$ となり、ニュートン力学における運動エネルギーと一致する。つまり、相対性理論が真実を表しているのならば、ニュートン力学は1次近似だったことになる。光速 c が日常に体験する速度よりも非常に速いため、1次近似にすぎないニュートン力学は、十分に物理現象を記述できていたのである。また、このエネルギーを時間について微分した導関数 $P \equiv dE/dt$ は物体に作用する力が単位時間あたりになす仕事、すなわち、仕事率を表す。その仕事率は、

$$P = \frac{m_0 (\mathbf{u} \cdot \mathbf{a})}{(1 - u^2/c^2)^{3/2}}, \quad (3.17)$$

となる。ここで、 $\mathbf{a} \equiv d\mathbf{u}/dt$ とする。

導かれた運動エネルギー (3.16) は、前節で言及した質量増大を支持しているのだが、その議論は本章の最後まで待つことにしよう。ところで、運動エネルギー (3.16) は、速度がゼロのとき、エネルギーがゼロとなるように積分定数を選んでいる。それに対して、積分定数を選びなおせば、運動エネルギーを、

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad (3.18)$$

のように書くこともできるだろう。このエネルギーの記述は相対性理論において便利である。言うまでもなく、この量の1次近似をとると $E \simeq m_0 c^2 + m_0 v^2/2$ となるので、 $m_0 c^2$ は静止する物体がもっている静止エネルギーであると解釈することもできるだろう。さらに、(3.18) のように定義されたエネルギーは、前節で計算した運動量ベクトル \mathbf{p} の大きさ p を用いて、

$$\frac{E^2}{c^2} = p^2 + m_0^2 c^2, \quad (3.19)$$

のように書けることは容易にわかる。特に、速度が光速 c に近づくと運動量が $p \rightarrow \infty$ のように発散するので、 $E/p \rightarrow c$ となる。この運動エネルギーと運動量の比は、ニュートン力学における運動エネルギーと運動量の比とは異なる。さらに、電磁気学において、電磁場のエネルギーと運動量が $E = cp$ なる関係³ を満たすことが知られている。電磁場のエネルギーが有限であっても、この関係が満たされるので、(3.19) は電磁波を媒介する光子の質量がゼロであることを示唆している。

³量子力学では、角周波数 ω の光波に対応する光子は $E = \hbar\omega$ のエネルギー ($\hbar = 1.0546 \times 10^{-34}$ J·s/rad はプランク定数) をもち、運動量は $p = \hbar\omega/c$ で表される。

3.6 質量とエネルギー

相対論的な運動量とエネルギーは、前節で導いたように $E^2/c^2 = p^2 + m_0^2 c^2$ なる関係が成立する。この関係を $p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - (E/c)^2 = m_0^2 c^2$ のように書き、右辺が座標変換に対して定数であることに注意すると、ミンコフスキー時空の線素 $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - (cdt)^2$ がローレンツ変換に対して不変であることからの類推で、運動量とエネルギーが、空間座標と時間に類似した関係をもつと考えても不自然ではない。その関係をもう少し調べてみると、エネルギーが質量に変換できるという最も有名な相対論的效果を再確認できる。

ある慣性系 K から見たとき、質量 m_0 の物体が速度 \mathbf{u} で運動しているとする。すでに導出した結果を用いると、その物体の運動量 \mathbf{p} とエネルギー E は、

$$\mathbf{p} = \frac{m_0 \mathbf{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}},$$

となる。ただし、 $u = |\mathbf{u}|$ とする。次に、この物体を K 系に対して x 軸方向に速度 v で等速運動する K' 系から見た運動量を考えてみよう。K 系から見た物体の速度 \mathbf{u} を $\mathbf{u} \equiv [u_x, u_y, u_z]$ のように成分ごとに書いた場合、K' 系から見た速度は、速度の合成則より

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - u_x v/c^2}, \quad u'_y = \frac{u_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - u_x v/c^2}, \quad u'_z = \frac{u_z \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - u_x v/c^2},$$

となる。このようにして算出された \mathbf{u}' を運動量とエネルギーの式に代入すると、

$$p'_x = \frac{m_0(u_x - v)}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)(1 - u^2/c^2)}}, \quad p'_y = \frac{m_0 u_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad p'_z = \frac{m_0 u_z}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

$$E' = \frac{m_0(c^2 - u_x v)}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)(1 - u^2/c^2)}},$$

が得られる。この結果をさらに書き直すと、K 系から K' 系への座標変換に対して運動量とエネルギーは、

$$p'_x = \frac{p_x - vE/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad p'_y = p_y, \quad p'_z = p_z, \quad E' = \frac{E - vp_x}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (3.20)$$

のように変換されることが導かれる。この変換式は座標のローレンツ変換に類似している。運動量 \mathbf{p} とエネルギーを $1/c^2$ 倍した E/c^2 は、まさに、空間座標と時間座標の変換とまったく同じ形で記述されるのである。

エネルギーを質量に変換するという有名な相対論的效果の一例を示してみよう。K 系の y 軸方向に沿って運動する質量 $m/2$ の物体 A^+ と A^- が衝突する場合を考えよう。物体 A^+ は y 軸方向に $+u$ の速度で運動し、物体 A^- は y 軸方向に $-u$ の速度で運動している。これらの物体は衝突後、一体化して物体 A になる。ただし、衝突前の運動エネルギーは熱として放出されず、物体 A に吸収されたとする。

この様子を K 系から眺めると、図 3.4 (a) のように、物体 A^+ と A^- は y 軸方向のみに速度成分をもっているので、運動量の x 軸成分と z 軸成分はゼロである。簡単のため、 $\gamma_u \equiv (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$ という記号を用いると、物体 A^+ の運動量 y 軸成分は $mu\gamma_u/2$ であり、物体 A^- の運動量 y 軸成分は $-mu\gamma_u/2$ である。つまり、これらの運動量の和はゼロである。運動量保存の法則より、衝突後の運動量の総和もゼロであるので、衝突して一体になった物体 A は K 系のある一点に静止する。

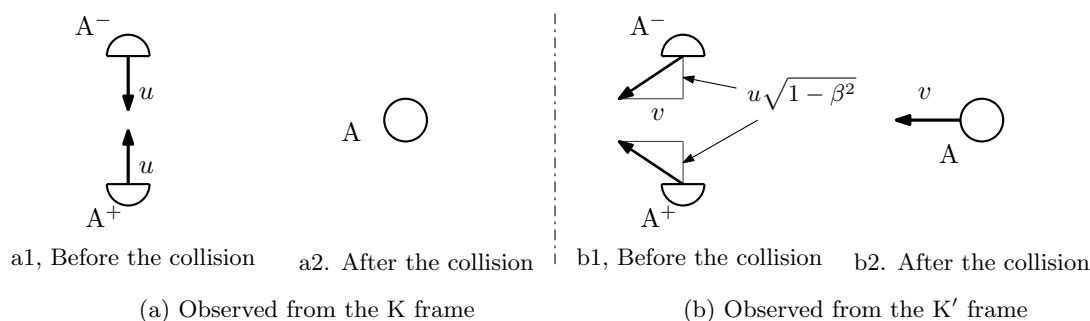


図 3.4: 衝突による運動量保存

上記の衝突を K 系に対して x 軸方向に速度 v で等速運動する K' 系から見た場合を考えてみよう。その衝突の様子は図 3.4 (b) に示す。物体 A^+ と A^- の運動量は、(3.20) を用いて座標変換すればよい。まず、運動量の y 軸成分は変化を受けないので、運動量 y 軸成分の総和はゼロである。これに対して、変換式 (3.20) よると、衝突前の物体 A^+ と A^- は x 軸方向に、ともに、 $-\gamma v E/c^2$ の運動量をもつ。この E は $E = mc^2/2$ のように定義されるエネルギーである。つまり、これらの物体の運動量の総和は x 軸方向に $-mv\gamma_u\gamma$ という量になる。衝突後に一体化した物体 A は K 系から見ると静止しているのだから、 K' 系から見ると x 軸方向に速度 $-v$ で等速運動しているはずである。この物体 A の質量を M とすれば、 K' 系における運動量保存の法則は、

$$-\frac{Mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = -\frac{mv}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)(1 - u^2/v^2)}},$$

と書くことができる。この方程式を解いて物体 A の質量 M を求めると、

$$M = m + \frac{1}{c^2} \left(\frac{mc^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - mc^2 \right),$$

が得られる。もともと、質量 $m/2$ の物体が 2 個一体化したのであるから、ニュートン力学では物体 A の質量は m となるはずであるが、この結果には余分な項が含まれている。その余分な項とは、(3.16) を見ると、衝突前の物体の運動エネルギーに対応していることがわかる。つまり、衝突前の物体の運動エネルギーの和を E_k とおけば、衝突後の物体の質量は、

$$M = m + \frac{E_k}{c^2}, \quad (3.21)$$

と書くことができるのである。つまり、衝突によって運動エネルギーが質量に変換されてしまうのである。言い換えると、(3.21) に示すエネルギーから質量への変換を認めなければ、運動量保存則が成立しないのだ。

このようなエネルギーから質量への変換は、特殊相対性理論における最も偉大な発見である。衝突後、運動エネルギーからの変換分だけ質量が増えているため、質量保存の法則が破られているように見えるかもしれない。しかし、

$$mc^2 + E_k = Mc^2,$$

という関係が成り立つため、エネルギー保存の法則は成り立っている。また、運動エネルギー E_k が質量 E_k/c^2 と等価であると考えれば質量も保存していることとなり、エネルギー保存の法則と質量保存の法則が同一法則であるという解釈もできる。

3.7 質量増大の法則

本章での考察において、運動量と運動エネルギーを定式化したもとで考察した結果、運動エネルギーが質量に変換されることがわかった。一般化して書くと、エネルギー E と質量 m は、

$$E = mc^2, \tag{3.22}$$

のように関係づけられる。言い換えると、エネルギー E は質量 E/c^2 に変換できるのだ。これは、前節において衝突の問題で確認したとおりだ。エネルギーが質量に変換されることを考えると、エネルギーが増加すると、それに相当するだけ質量が増大すると考えることができる。衝突の問題では、衝突することによって増加したエネルギー E_k が、 E_k/c^2 の質量増加をもたらしたと考えられるのだ。これを運動エネルギーについて考えると、静止状態での質量 m_0 は運動すると、

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \tag{3.23}$$

のように増大すると考えてもよいだろう。これは、自身の運動エネルギーが質量に変換されたと解釈すればよい。なお、このような質量増大を考えると、運動エネルギーの表記(3.18)は、単に、 $E_k = mc^2$ のように書き換えられることになる。このようなエネルギーと質量の関係は、特殊相対性理論における最大の成果である。

ここまで考察してきた結果から、物理現象としてエネルギーと質量が等価であると結論すべきであることがわかる。上記の衝突問題から、運動量保存則の要請のため、運動する物体における質量増大を認めることができる。現代では、電子と陽電子の対生成、対消滅といった現象によってエネルギーから質量へ、または、その逆の変換が起きることも既に確認されている。

多粒子系のエネルギーと運動量 多粒子系においてエネルギーと運動量を取り扱おうと、質量増大を法則を受け入れることが便利だと気づくだろう。多数の粒子で構成される系を考えよう。系に含まれる粒子のうち、第 j 番目の粒子の静止質量を m_j とする。その粒子が K 系から見ると速度 $\mathbf{u}_j \equiv [x_j, y_j, z_j]$ で運動しているとする。当然、 m_j と \mathbf{u}_j は、異なる添え字 j に対して同一とは限らない。後の計算の便宜をはかり、光速で正規化した速度を $\mathbf{u}_j/c \equiv \boldsymbol{\beta}_j = [\beta_j^{(x)}, \beta_j^{(y)}, \beta_j^{(z)}]$ のように定義しておこう。系に含まれるすべての粒子の運動量の総和がゼロであるとする。数式で表現すると、

$$\mathbf{P} = \sum_j \frac{m_j \mathbf{u}_j}{\sqrt{1 - \beta_j^2}} = 0, \quad (3.24)$$

が成立するものとする。ここで、 $\beta_j \equiv |\boldsymbol{\beta}_j|$ とした。一方、運動エネルギーの総和は、

$$E = \sum_j \frac{m_j c^2}{\sqrt{1 - \beta_j^2}}, \quad (3.25)$$

となるはずだ。この系を、 x 軸方向に速度 v で等速度運動する K' 系から観測した場合を考えよう。 K' 系から見た系の運動量とエネルギーは、運動量・エネルギーの変換則によって、

$$P'_x = - \sum_j \frac{m_j v}{\sqrt{(1 - \beta_j^2)(1 - \beta^2)}}, \quad P'_y = 0, \quad P'_z = 0,$$

$$E' = \sum_j \frac{m_j c^2}{\sqrt{(1 - \beta_j^2)(1 - \beta^2)}},$$

のように変換される。この変換結果は、

$$M = \sum_j \frac{m_j}{\sqrt{1 - \beta_j^2}}, \quad (3.26)$$

なる記号を定義すれば、

$$P'_x = - \frac{Mv}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad E' = \frac{Mc^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (3.27)$$

のように書くことができる。なお、上には書かなかったが $P'_y = P'_z = 0$ である。このように数式を書くと、(3.26) で定義される M は系全体の質量と解釈できる。しかも、 M はすべての粒子の相対論的質量の和である。この考察によって、相対論的質量が単なる計算上の値ではなく、物体の本当の質量と考えても差し支えないといえる。なぜなら、ここで取り扱った系が容器に閉じ込められた気体であると考えればよい。数式 (3.27) で記述される運動量とエネルギーは、静止質量 M が速度 v で運動するときの値と同一である。とはいえ、 M は気体分子の相対論的質量の和である。このように考えると、相対論的質量が実際の質量であると考えられるのだ。つまり、運動する物体の質量は増大すると解釈できる。

第4章 電磁気学

特殊相対性理論は古典物理学として電磁気学を完全に記述するためにはなくてはならない理論である。電磁気学におけるマクスウェルの方程式によって電場と磁場が統合され、光速で伝搬する電磁波の存在が予言された。しかし、マクスウェルの方程式には観測者の運動速度が現れないため、マクスウェルの方程式が成り立つのは絶対静止系のみであるか、または、どの観測者から見ても光速が一定であるかのどちらかになる。そのうち、どの観測者から見ても光速が一定である立場は特殊相対性理論の原点となる。本章では、マクスウェルの方程式がローレンツ変換に対して不変であることを示し、特殊相対性理論における電磁気学を展開していく。電磁気学に特殊相対性理論を組み込むことにより、電場に対する磁場の正体さえも明らかになってくる。

4.1 電磁場のローレンツ変換

アインシュタインの相対性原理によると、宇宙には絶対静止系は存在せず、それぞれの慣性系に存在する観測者は自分が静止しているのか運動しているのかを区別することはできない。つまり、他の慣性系との相対速度に関わらず、慣性系では物理法則が全く同じ方程式で記述されなければならない。この相対性原理からの要請は電磁気学におけるマクスウェルの方程式についても成立しなければならない。

4.1.1 電場と磁場

すでに説明したように、互いにゼロではない相対速度をもつ慣性系の間では、ローレンツ変換によって互いの座標が変換される。電磁場に対する相対性原理からの要請とは、その座標変換をしたとしても、マクスウェルの方程式が形を変えずに成立することである。ある慣性系 K から観測した電場 \mathbf{E} 、電束密度 \mathbf{D} 、磁場 \mathbf{H} 、磁束密度 \mathbf{B} に関するマクスウェルの方程式は、

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{j}, \quad (4.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (4.2)$$

となる。ここで、 ρ は電荷密度、 \mathbf{j} は電流密度である。マクスウェルの方程式のうち、(4.1)の左側はガウスの法則、右側はアンペールの法則である。もう一方、(4.2)の左側は磁束密度保存の法則、右側はファラデーの法則である。アインシュタインの相対性原理より、異なる慣性系 K' から観測した場合についても、マクスウェルの方程式は全く同じ表現形式で成立しなければならない。そのような条件を求めるため、これまでと同じように、 K' 系は K 系に対して x 軸方向に速度 v で等速度運動していると仮定し、 K' 系から見た微分演算子を求めておくと、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= \gamma \left(\frac{\partial}{\partial t'} - v \frac{\partial}{\partial x'} \right), & \frac{\partial}{\partial x} &= \gamma \left(\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'} \right), \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y'}, & \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z'}, \end{aligned}$$

となる。この式において、簡単のため $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ とおいた。これらの演算子の関係に注意して、まず、(4.1)について、ガウスの法則を変換すると、

$$-\gamma \frac{v}{c^2} \frac{\partial D_x}{\partial t'} + \left(\gamma \frac{\partial D_x}{\partial x'} + \frac{\partial D_y}{\partial y'} + \frac{\partial D_z}{\partial z'} \right) = \rho, \quad (4.3)$$

を得る。次に、アンペールの法則を成分別に書き直すと、

$$\frac{\partial H_z}{\partial y'} - \frac{\partial H_y}{\partial z'} - \gamma \frac{\partial D_x}{\partial t'} + \gamma v \frac{\partial D_x}{\partial x'} = j_x, \quad (4.4a)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z'} - \gamma \frac{\partial H_z}{\partial x'} + \gamma \frac{v}{c^2} \frac{\partial H_z}{\partial t'} - \gamma \frac{\partial D_y}{\partial t'} + \gamma v \frac{\partial D_y}{\partial x'} = j_y, \quad (4.4b)$$

$$\gamma \frac{\partial H_y}{\partial x'} - \gamma \frac{v}{c^2} \frac{\partial H_y}{\partial t'} - \frac{\partial H_x}{\partial y'} - \gamma \frac{\partial E_z}{\partial t'} + \gamma v \frac{\partial D_z}{\partial x'} = j_z, \quad (4.4c)$$

が得られる。さらに、(4.4a)を v/c^2 倍して (4.3) から減じると t' についての偏微分の項を消去することができる。その結果は、

$$\frac{\partial D_x}{\partial x'} + \gamma \frac{\partial}{\partial y'} \left(D_y - \frac{v}{c^2} H_z \right) + \gamma \frac{\partial}{\partial z'} \left(D_z + \frac{v}{c^2} H_y \right) = \gamma \left(\rho - \frac{v}{c^2} j_x \right), \quad (4.5)$$

のようになり、ガウスの法則と同形の方程式を得る。つまり、これが K' 系から見たガウスの法則と考えられる。同様に、(4.3)を v 倍して (4.4a) から減じれば x' についての偏微分の項を消去できる。その結果に併せて、(4.4b)と (4.4c)を整理した式を並べて書くと、

$$\gamma \frac{\partial}{\partial y'} (H_z - v D_y) - \gamma \frac{\partial}{\partial z'} (H_y + v D_z) - \frac{\partial D_x}{\partial t'} = \gamma (j_x - v \rho), \quad (4.6a)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z'} - \gamma \frac{\partial}{\partial x'} (H_z + v D_y) - \gamma \frac{\partial}{\partial t'} \left(D_y - \frac{v}{c^2} H_z \right) = j_y, \quad (4.6b)$$

$$\gamma \frac{\partial}{\partial x'} (H_y - v D_y) - \frac{\partial H_x}{\partial y'} - \gamma \frac{\partial}{\partial t'} \left(D_z + \frac{v}{c^2} H_y \right) = j_z, \quad (4.6c)$$

が得られるが、これらの式はアンペールの法則と同形であることがわかる。つまり、K' から観測される電荷密度 ρ' 、電流密度 \mathbf{j}' 、電束密度 \mathbf{D}' 、さらに、磁場 \mathbf{H}' 、に関して、

$$\rho' = \frac{\rho - v j_x / c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad j'_x = \frac{j_x - v \rho}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad j'_y = j_y, \quad j'_z = j_z, \quad (4.7)$$

$$D'_x = D_x, \quad D'_y = \frac{D_y - v H_z / c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad D'_z = \frac{D_z + v H_y / c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (4.8)$$

$$H'_x = H_x, \quad H'_y = \frac{H_y + v D_z}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad H'_z = \frac{H_z - v D_y}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (4.9)$$

が成立すればガウスの法則とアンペールの法則はローレンツ変換に対して不変であることが導かれる。相対性理論を取り扱ううえで、光速不変の原理から導かれるローレンツ変換は成立が必須である。したがって、電荷密度、電流密度、電束密度、磁場の変換はこれらの数式にしたがわなければならないのだ。

電束密度不変の法則とファラデーの法則 (4.2) についても同様の座標変換をすれば、電束密度不変の法則と同形の方程式:

$$\frac{\partial B_x}{\partial x'} + \gamma \frac{\partial}{\partial y'} \left(B_y + \frac{v}{c^2} E_z \right) + \gamma \frac{\partial}{\partial z'} \left(B_z - \frac{v}{c^2} E_y \right) = 0, \quad (4.10)$$

および、ファラデーの法則と同形の方程式:

$$\gamma \frac{\partial}{\partial y'} (E_z + v B_y) - \gamma \frac{\partial}{\partial z'} (E_y - v B_z) + \frac{\partial B_x}{\partial t'} = 0, \quad (4.11a)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z'} - \gamma \frac{\partial}{\partial x'} (E_z - v B_y) + \gamma \frac{\partial}{\partial t'} \left(B_y + \frac{v}{c^2} E_z \right) = 0, \quad (4.11b)$$

$$\gamma \frac{\partial}{\partial x'} (E_y + v B_y) - \frac{\partial E_x}{\partial y'} + \gamma \frac{\partial}{\partial t'} \left(B_z - \frac{v}{c^2} E_y \right) = 0, \quad (4.11c)$$

が得られる。つまり、これらの式が K' 系から見たときの磁束密度不変の法則、および、ファラデーの法則である。よって、これらの法則が慣性系によらず同じ形で記述できるためには、K' 系から観測した電場 \mathbf{E}' と磁束密度 \mathbf{B}' が、

$$E'_x = E_x, \quad E'_y = \frac{E_y - v B_z}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad E'_z = \frac{E_z + v B_y}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (4.12)$$

$$B'_x = B_x, \quad B'_y = \frac{B_y + v D_z / c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad B'_z = \frac{B_z - v D_y / c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (4.13)$$

のように変換されなければならない。言い換えると、これらの数式で変換されるのであれば、マクスウェルの方程式はローレンツ変換に対して不変となるのである。

上のような手順によって得られた (4.7), (4.8), (4.9), および, (4.12), (4.13) が K' 系からみた電磁気的な観測量である。K 系に対する K' 系の相対速度を \mathbf{v} と書くと、これらの電

磁気的な観測量は次のような形で表現することができる。

$$\rho' = \frac{\rho - \mathbf{v} \cdot \mathbf{j}/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \mathbf{j}'_{\parallel} = \frac{\mathbf{j}_{\parallel} - \rho \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \mathbf{j}'_{\perp} = \mathbf{j}_{\perp}, \quad (4.14)$$

$$\mathbf{D}'_{\parallel} = \mathbf{D}_{\parallel}, \quad \mathbf{D}'_{\perp} = \frac{\mathbf{D}_{\perp} + \mathbf{v} \times \mathbf{H}/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (4.15)$$

$$\mathbf{H}'_{\parallel} = \mathbf{H}_{\parallel}, \quad \mathbf{H}'_{\perp} = \frac{\mathbf{H}_{\perp} - \mathbf{v} \times \mathbf{D}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (4.16)$$

$$\mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel}, \quad \mathbf{E}'_{\perp} = \frac{\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (4.17)$$

$$\mathbf{B}'_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel}, \quad \mathbf{B}'_{\perp} = \frac{\mathbf{B}_{\perp} - \mathbf{v} \times \mathbf{E}/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (4.18)$$

これらの式において、添え字 \parallel を付したベクトルは \mathbf{v} と平行な成分 (ここでは x 成分) を表し、添え字 \perp を付したベクトルは \mathbf{v} に垂直な成分 (ここでは y, z 成分) を表す。これらが相対原理の要請から導き出される電磁場の変換式である。真空の誘電率と透磁率を、それぞれ、 ϵ_0, μ_0 とすると、真空では $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$, $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0$ が成り立つ。また、マクスウェルの方程式から得られる波動方程式によって $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$ であることがわかっているので、真空の場合においては、変換式 (4.15) と (4.16) は、変換式 (4.17) と (4.18) と同一であることが容易にわかる。しかし、物質内においては誘電率と透磁率の積が $1/c^2$ とはならないため、同様の関係は成り立たない。実は、相対性理論において、 $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu$ は厳密には成り立たないということになるが、これについては第 4.6 節で考察する。

ここで導出した電磁場の変換式から、空間を伝搬する電磁波の位相はローレンツ変換に対して不変であることがただちにわかる。例えば、 z 軸方向に伝搬する電磁波を仮定し、電界が、

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_x E \exp i(kz - \omega t + \phi),$$

のように、 x 軸方向に偏波しているとする。すると、マクスウェルの方程式によって磁速密度ベクトル \mathbf{B} は、

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{e}_y E}{c} \exp i(kz - \omega t + \phi),$$

となるので、電界と磁界は同一位相であることがわかる。その上で (4.17) を見ると、 \mathbf{E}' と \mathbf{E} は同一位相であることがわかる。よって、K 系と K' 系で観測した電磁波の位相は互いに等しい。電磁波の位相が異なる慣性系で不変であることは、後に、ドップラ効果の議論をする際に利用する。

4.1.2 電荷と電流

前項によると電場や磁場だけでなく、電荷密度と電流密度も異なる慣性系の間で変換されることが明らかになった。その結果をさらに考察すると、特定の体積に含まれる電荷は観測者によらず一定であるとの結論が導かれる。本項では電荷が定数であることを導出する。

電流は電荷の流れを表す量である。電流密度ベクトル \mathbf{j} と電荷密度 ρ を用いると、電流と電荷の関係は連続の方程式:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0,$$

で表現できる。連続の方程式は特に新しい要請ではなく、マクスウェルの方程式に含まれるアンペールの法則 (4.1) の発散をとれば容易に導出できる。つまり、マクスウェルの方程式は、電流を電荷の流れだと主張しているのだ。マクスウェルの方程式から導出されるということは、当然、連続の方程式もローレンツ変換に対して不変となる。確認のため、電荷密度と電流密度の変換式 (4.7) を K' 系の座標で微分すると、ただちに、

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t'} + \frac{\partial j'_x}{\partial x'} + \frac{\partial j'_y}{\partial y'} + \frac{\partial j'_z}{\partial z'} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z},$$

が得られる。確かに、 K' 系においても、

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t'} + \nabla' \cdot \mathbf{j}' = 0,$$

なる連続の方程式が成立することが確認された。ここで、 ∇' は K' 系におけるナブラ演算子とする。

K 系に対して x 軸方向に速度 v で等速運動する K' 系から見たとき、電荷密度 ρ_0 が K' 系に対して静止しているとする。また、 K' 系から見たときに電流は存在しないものとする。この電荷密度を K 系から観測すると変換式 (4.7) より

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad j_x = \frac{\rho_0 v}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad j_y = 0, \quad j_z = 0,$$

となる。ここで現れた電流密度は、自由電子による伝導電流ではなく、帯電した物質が運動することによる運搬電流とよばれる電流である。また、この式は電荷密度の運動方向を x 方向に規定しているが、一般の速度ベクトル \mathbf{u} について成立するように拡張することは容易である。つまり、静止電荷密度 ρ_0 が K 系に対して速度 \mathbf{u} で運動している場合、これを K 系から観測した電荷密度 ρ と、その電荷密度による運搬電流密度 \mathbf{j} は、

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \quad \mathbf{j} = \rho \mathbf{u},$$

となることがわかる。運動する電荷密度は静止していたときの電荷密度とは異なる量になっていることがわかる。しかし、その都度観測される電荷密度 ρ を使えば、運搬電流密度は相対性理論以前の関係式と一致している。

電荷密度 ρ_0 が、それと併走する慣性系から見たとき、ある微小体積片 dV_0 に含まれているとする。この微小体積片は K 系から見ると、その運動方向にローレンツ収縮を受けて $dV = \sqrt{1 - u^2/c^2} dV_0$ となっているはずである。よって、微小体積片に含まれる電荷は

$$\rho dV = \rho_0 dV_0,$$

となり、ローレンツ変換に対して不変である。さらに、微小体積片 dV に含まれる電荷という意味で $de (\equiv \rho dV)$ という記号を用いると、微小体積片に含まれる電荷の変換則は

$$de = de_0,$$

と書くこともできる。これは、電子や陽子のような荷電粒子がその運動速度によって電荷を変化させないことを意味している。もし、電荷の量が運動速度によって変化するならば、原子内部が電気的中性を保てなくなる。例えば、ある時点で電気的中性を保っている原子において、最外殻電子が励起されて外側の電子軌道に移動した場合、電子の周回速度が変化するので、電子の電荷が変化し、その結果、原子内部の中性が破られることになる。実際には、電子の励起による電気的中性の破れ、または、原子自体の高速運動による電気的中性の破れが観測された例がないで、上で述べたように電荷がローレンツ変換に対して不変であるということとは理にかなっている。

4.2 磁場と相対性理論

第 4.1 節で導出した電磁場の変換で、特に電場 \mathbf{E} の変換にローレンツ力に類似した要素が現れていたことに気付いた読者がいるのではないだろうか。その数式に現れていたように、ローレンツ力は相対論的な力である。ローレンツ力は、磁石の N 極と S 極が引き合う力の正体であるので、磁場の存在は相対論的效果である。

K 系に対して速度 \mathbf{v} で等速度運動する慣性系 K' を考えよう。 K' 系の原点に電荷密度 ρ' が静止しているとする。電荷密度は K' の微小体積 dV' に収められているとする。 K' 系の任意の位置 \mathbf{r}' では、その微小体積内の電荷によって、

$$d\mathbf{E}' = \frac{\rho' dV'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}'}{r'^3},$$

なる電場が観測されるはずである。電荷が K' 系で静止しているのだから、 K' 系では磁場は観測されず $d\mathbf{B}' = 0$ である。ところが、ローレンツ変換によって K 系では磁場:

$$d\mathbf{B} = \frac{d\mathbf{B}' + \mathbf{v} \times d\mathbf{E}'/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\rho' dV'}{4\pi c^2 \epsilon_0 \sqrt{1 - \beta^2}} \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{r}'}{r'^3},$$

となる。電荷密度と微小体積の積 ρdV はローレンツ変換に対して不変であることがわかっている。観測される磁場は、

$$d\mathbf{B} = \frac{\rho dV}{4\pi c^2 \epsilon_0 \sqrt{1 - \beta^2}} \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r'^3} = \frac{\rho S dl}{4\pi c^2 \epsilon_0 \sqrt{1 - \beta^2}} \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r'^3},$$

のように書き換えられる。ここで、 $dV \equiv S dl$ とおいた。新たに用いた記号について、 S は速度 v に垂直な断面積であり、 dl は微小体積の速度 v 方向の長さである。それらの記号を用いると、断面積 S を通過する電流は $\mathbf{J} = \rho S \mathbf{v}$ と書くことができる。電流 \mathbf{J} を用いて、変換された磁束密度を計算すると、

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi \sqrt{1 - \beta^2}} \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{r}}{r'^3} dl,$$

となる。ここで、 $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$ の関係を利用した。この数式は何かに似ていないだろうか？速度が小さい条件 $v \rightarrow 0$ で近似すると、

$$d\mathbf{B} \simeq \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{r}}{r^3} dl,$$

が得られる。すなわち、ビオ・サバルの法則である。本節の考察によって、磁場が電場から相対論的に創り出されることがわかるだろう。次節では、我々が磁場を観測する原理について解明していきたい。

4.3 磁場の発生原理

既に見たように、座標系が変わると電場や磁場は個別にはではなく、互いに関係しあって変換される。例えば、慣性系 K から見たときに磁場が存在しなくても、その系に対して相対速度をもつ K' 系から見れば磁場が存在する。この節では、磁場が発生する仕組みを考察してみよう。

磁石が引き合ったり、反発し合ったりする力の正体はローレンツ力である。電場 \mathbf{E} と磁束密度 \mathbf{B} を仮定すると、電荷 e に作用する力は、

$$\mathbf{K} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}),$$

なるローレンツ力で表される。その力に見られるように、磁束密度は運動する荷電粒子に作用する力の強さを規定するための比例係数と解釈することもできる。見方を変えると、磁場の存在は、運動している荷電粒子がなければわからないのである。静止していれば、荷電粒子は磁場の影響を受けないのだ。磁場の影響を受けるには、荷電粒子が観測者に対してゼロではない相対速度をもっていることを意味するので、運動する荷電粒子に作用する力、すなわち、磁場には相対性理論が関係しそうである。本節では、ローレンツ収縮に

よって運動する荷電粒子が感じる電場が観測者と異なることを示す。荷電粒子は自身が感じる電場にしがって力を受けるが、観測者にとっては、その力が電場とは一致しないため、磁力という別の力が存在しているように見える、ということが本節で実証したい内容である。

本節では、無限直線電流のそばを通過する荷電粒子が受ける力を、磁場の概念を使用せずに考察し、その力が非相対論近似においてローレンツ力と一致することを示す。観測者はK系に静止しており、無限直線電流が流れる直線導体はK系の z 軸上に存在するとする。この直線電流に対して、平行に運動する荷電粒子、距離方向に運動する荷電粒子、接線方向に運動する荷電粒子の三つパターンに対して荷電粒子が受ける力を考察する。

4.3.1 考察の準備

準備段階として、運動する荷電粒子がつくる電場について考察しよう。まず、簡単な場合として、K系に対して x 軸方向に等速運動する荷電粒子がつくる場を考えてみる。この荷電粒子と併走する慣性系を K' とし、荷電粒子は常にこの座標系の原点に存在するという状況を設定する。その場合、 K' 系の任意の観測点 \mathbf{r}' から観測した電場は、

$$\mathbf{E}' = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}'}{r'^3},$$

のように表される。この式の分子だけをK系の座標を用いて書き換えると、

$$\mathbf{E}' = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r'^3} \left[\frac{x-vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, y, z \right],$$

となる。電場 \mathbf{E}' をK系から見た電場 \mathbf{E} に変換してみよう。電場にローレンツ変換を適用するのである。K'系から見て磁場が存在しないので電場は、

$$E_x = E'_x, \quad E_y = \frac{E'_y}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad E_z = \frac{E'_z}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

のように変換される。この変換式を用いると、電場 \mathbf{E} は、

$$\mathbf{E} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r'^3 \sqrt{1-\beta^2}} \left[x-vt, y, z \right],$$

となることがわかる。ところで、荷電粒子は K' 系の原点に静止しているのだから、K系から見ると時刻 t とき、荷電粒子は $\mathbf{s} = [vt, 0, 0]$ に存在することになる。ここで、特別な場合として、荷電粒子がK系の原点に位置する瞬間の電場を求めてみよう。その電場は、上の式に $t=0$ を代入すればよいので、

$$\mathbf{E} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{(1-\beta^2)\mathbf{r}}{[x^2 + (1-\beta^2)(y^2 + z^2)]^{3/2}}, \quad (4.19)$$

となる。ここで改めて r' を K 系の座標を用いて展開しておいた。ここでは、相対論的な座標変換から x 軸方向に等速運動する荷電粒子がつくる電場を計算したが、実は、電磁力学における遅延ポテンシャルを点電荷に応用したリエナール・ヴィーヘルトのポテンシャルを用いても同じ結果が得られる。つまり、(4.19) には電磁作用が無遠慮まで一瞬に届くのではなく、光速で伝搬することに起因する遅延が考慮されている。しかしながら、電場のベクトルが荷電粒子の過去の位置ではなく、図 4.1 に示すように、現在位置に向かってるのは電磁作用に引きずりのような作用¹があることを意味する。

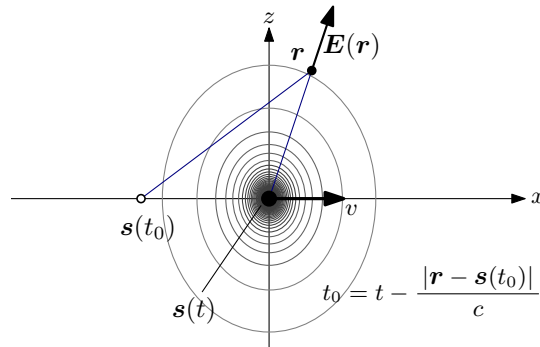


図 4.1: 等速運動する荷電粒子による電場

次に、荷電粒子が xz 平面上を等速度運動している場合に、(4.19) を拡張してみよう。荷電粒子の速度ベクトルを、

$$\mathbf{u} = \left[-v, 0, u\sqrt{1-\beta^2} \right],$$

としよう。この速度は、K 系に対して x 軸方向に速度 $-v$ で運動する慣性系 K' 系の z' 軸方向に速度 u で等速度運動する荷電粒子を想定している。この荷電粒子が K 系の原点に存在する瞬間における電場を求めてみる。ここでも、やはり電磁作用の引きずり作用があるため、電場は荷電粒子の現在位置 (すなわち、原点) を向いている。しかし、問題は (4.19) の分母である。分母がこのような形をしているのは、等位ポテンシャル面が荷電粒子の速度方向にローレンツ収縮しているからである。つまり、(4.19) を適用するには、荷電粒子の速度と一致する座標軸 x^* を想定した座標系 K* を考えればよい。そのような都合のよい座標系から見れば、電場は、

$$\mathbf{E}^* = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{(1-\tilde{\beta}^2)\mathbf{r}^*}{\left[x^{*2} + (1-\tilde{\beta}^2)(y^{*2} + z^{*2})\right]^{3/2}}, \quad (4.20)$$

となるであろう。ここで、 $\tilde{\beta}$ は荷電粒子の速さを表し、 $\tilde{\beta}^2 = \beta^2 + \beta_u^2 - \beta^2\beta_u^2$ が成り立つ。

¹電場ベクトルが荷電粒子の現在位置を正確に向いているのは荷電粒子が等速度運動をしている場合だけである。つまり、この引きずり作用は荷電粒子の軌跡の 1 次微分に対応する効果しか含まれていない。荷電粒子が加速度をもつ場合、この引きずり作用に誤差が現れ、その誤差ゆえに電磁は放射が現れると解釈できる。

この式の分母を, K 系の座標で表すには,

$$x^* = \frac{\beta x - \beta_u \sqrt{1 - \beta^2} z}{\tilde{\beta}}, \quad y^* = y, \quad z^* = \frac{\beta_u \sqrt{1 - \beta^2} x + \beta z}{\tilde{\beta}},$$

のような座標回転をすればよい。この座標変換を適用すると, 電場 \mathbf{E} は,

$$\mathbf{E} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{(1 - \tilde{\beta}^2) \mathbf{r}}{\left\{ [1 - \beta_u^2(1 - \beta^2)] x^2 + (1 - \beta^2)[(1 - \beta_u^2) y^2 + z^2] + 2\beta\beta_u \sqrt{1 - \beta^2} xz \right\}^{3/2}}, \quad (4.21)$$

のように書くことができる。分母が多少, 複雑になっているが後の項で議論を展開する際に有用な数式を得ることができた。この数式を用いて, 次項以降で運動方向が直線電流と平行である荷電粒子と, 垂直である荷電粒子が, それぞれ, 電場から受ける力を調べる。

4.3.2 直線電流と平行に運動する荷電粒子

直線電流と平行に運動する荷電粒子が, 直線導体からの電場によって作用される力について調べよう。静止系 K からみると, 電流が流れる直線導体は電気的中性を保っていて, 電場が生じないはずである。荷電粒子から見ると, 相対論的效果で直線導体の電気的中性が破れ, 電場が発生すると推測する。荷電粒子が直線電流に平行に運動する場合, 前節の式において $\beta = 0$ とすればよい。運動方向の速度は, 直線電流中の電荷との相対速度 u によって表現できる。その場合, 前節で求めた電場 (4.21) は,

$$\mathbf{E} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{(1 - \beta_u^2) \mathbf{r}}{[(1 - \beta_u^2) x^2 + (y^2 + z^2)]^{3/2}},$$

のように記述できる。ここで, 線方向に含まれる電荷の長さ方向の密度を ρ とすると, 微小長さ dz_0 による電場は, 上式の e を ρdz_0 に置き換えればよいので,

$$d\mathbf{E} = \frac{\rho dz_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{(1 - \beta_u^2) \mathbf{r}}{[(1 - \beta_u^2) x^2 + z_0^2]^{3/2}},$$

となる。ただし, ここで, 対象とする微小長さ dz_0 の位置を z_0 , 観測点の位置を $\mathbf{r} = [x, 0, 0]$ とした。この微小電場 $d\mathbf{E}$ を z_0 について積分すれば, 直線導体中の電荷による電場:

$$\mathbf{E} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho dz_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{(1 - \beta_u^2) \mathbf{r}}{[(1 - \beta_u^2) x^2 + z_0^2]^{3/2}},$$

が計算できる。この積分は, 静止した直線電荷がつくる電場と同じ式なので, 容易に計算することができる,

$$E_x = \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0 x}, \quad E_y = 0, \quad E_z = 0, \quad (4.22)$$

が得られる。ここで、 E_x, E_y, E_z は電場 \mathbf{E} の各座標成分である。

現実の直線導体には原子核や電子が存在し、そのうち、自由電子が電流を担っている。ある基準となる慣性系 K_0 から見たとき、直線導体は電氣的に中性であるとする。つまり、原子核の電荷密度を ρ としたとき、自由電子の電荷密度は $-\rho$ となる²。また、自由電子は、原子核に対して z_0 軸方向に速度 u で等速度運動しているとする。

上で述べた直線導体に対して、観測者が存在する慣性系 K は z_0 軸方向に速度 v で等速運動しているとする。K 系から見たときの原子核と電子の相対速度を、それぞれ、 u_+, u_- とすると、相対論における速度の加法則より、

$$u_+ = -v, \quad u_- = \frac{u - v}{1 - \beta\beta_u},$$

となる。ここで、 $\beta = v/c, \beta_u = u/c$ とおいた。このように、原子核と自由電子の相対速度が K_0 系から見た場合と異なるため、それらの電荷密度も変化していると考えられる。原子核と自由電子のそれぞれについて、相対的に静止している状態から見た静止電荷密度を ρ_{0+} と ρ_{0-} であるとする。すると、それらの電荷密度は、

$$\rho_{0+} = \rho, \quad \rho_{0-} = -\sqrt{1 - \beta_u^2} \rho,$$

のようになるだろう。この静止電荷密度と K 系から見た相対速度を用いて、K 系から見たときの電荷密度 ρ_+ と ρ_- は、

$$\rho_+ = \frac{\rho}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \rho_- = -\frac{(1 - \beta\beta_u)\rho}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

となる。この電荷密度を、それぞれ、(4.22) に代入し、原子核による電場 \mathbf{E}_+ 、および、自由電子による電場 \mathbf{E}_- を計算すると、

$$\mathbf{E}_+ = \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0 x} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \mathbf{e}_x, \quad \mathbf{E}_- = -\frac{\rho}{2\pi\epsilon_0 x} \frac{1 - \beta\beta_u}{\sqrt{1 - \beta^2}} \mathbf{e}_x,$$

が得られる。実際に観測される電場 \mathbf{E} は、これらの和であるはずなので、

$$\mathbf{E} = \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0 x} \frac{\beta\beta_u}{\sqrt{1 - \beta^2}} \mathbf{e}_x,$$

である。もし、この観測点に電荷 q が存在しているなら、その電荷は、

$$\mathbf{K} = \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0 x} \frac{q\beta\beta_u}{\sqrt{1 - \beta^2}} \mathbf{e}_x,$$

²厳密に言うと、自由電子の電荷密度を $-\rho$ 、原子核を周回する電子の電荷密度を $-\rho^{(0)}$ とする。そのとき、原子核の電荷密度は $\rho + \rho^{(0)}$ となる。そのうち、周回電子は原子核中の、電荷密度 $\rho^{(0)}$ に対応する陽子と常に電氣的中性を保っている。周回電子は常に原子核の近傍にいたので、これらの中性関係はいかなる慣性系から見ても成り立つ。よって、電荷密度 $\rho^{(0)}$ に対応する成分は相殺され、原子核の電荷密度を ρ 、自由電子の電荷密度を $-\rho$ と考えてもよい。

の力を受けるはずである。慣性系 K_0 から見ると原子核と自由電子の間で電氣的に中性であるが、運動する荷電粒子から見ると予想通り、相対論的効果のため直線導体の電氣的中性が破れるのだ。その結果として、荷電粒子は電流の経路から電場による力の作用を受けるのだ。

4.3.3 直線電流と垂直に運動する荷電粒子

荷電粒子が直線電流と垂直に運動する場合であっても、ローレンツ力が作用するケースがある。具体的には、荷電粒子の速度が直線電流に対して動径成分をもつ場合、言い換えると、荷電粒子が直線電流に接近または遠去する場合に荷電粒子にローレンツ力が作用する。そのローレンツ力の発生メカニズムも、静止系 K_0 で成立していた電氣的中性の破れによるものかを検証してみる。

直線導体に対する静止系 K_0 と相対的に、距離方向に速度 v で運動する慣性系 K から見た電場について考察しよう。ここで、観測者は K 系の座標 $[x, y, 0]$ に存在するとしよう。この系から見ると、直線導体中の原子核は速度 $\mathbf{u}_+ = [-v, 0, 0]$ であるが、原子核に対して導体の長さ方向に速度 u で運動する自由電子は、 K 系から見ると $\mathbf{u}_- = [-v, 0, u\sqrt{1-\beta^2}]$ の速度で運動している。

準備として、原子核と自由電子を特に指定せず、直線導体中の荷電粒子が K 系に対して、速度 $\mathbf{u} = [-v, 0, u\sqrt{1-\beta^2}]$ で運動しているとして計算してみよう。その結果をそのまま使えば自由電子による電場 \mathbf{E}_- が得られ、 $u = 0$ とすれば原子核による電場 \mathbf{E}_+ が得られるはずである。電場を観測する時点で座標 $[0, 0, z_e]$ に存在する直線導体の微小長さ dz_e に含まれる微小電荷 ρdz_e による電場 $d\mathbf{E}$ は、

$$d\mathbf{E} = \frac{\rho dz_e}{4\pi\epsilon_0} \frac{(1 - \tilde{\beta}^2) \mathbf{r}}{\left\{ [1 - \beta_u^2(1 - \beta^2)] x^2 + (1 - \beta^2)[(1 - \beta_u^2)y^2 + z_e^2] - 2\beta\beta_u\sqrt{1 - \beta^2} x z_e \right\}^{3/2}}, \quad (4.23)$$

のようになる。ただし、上でも述べたように観測点の位置を $[x, y, 0]$ とした。この微小電場を直線導体上の座標 z_e について積分すれば、直線導体中の電荷による電場が計算できるので、

$$\mathbf{E} = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1 - \tilde{\beta}^2) \mathbf{r} dz_e}{\left\{ [1 - \beta_u^2(1 - \beta^2)] R^2 + (1 - \beta^2)[(1 - \beta_u^2)y^2 + z_e^2] - 2\beta\beta_u\sqrt{1 - \beta^2} R z_e \right\}^{3/2}},$$

が形式的に成り立つ。ただし、 \mathbf{r} は対象とする微小電荷に対する観測点の相対位置であり、 $\mathbf{r} = [x, y, -z_e]$ となっている。この積分は複雑そうに見えるが、

$$\xi = \sqrt{1 - \beta_u^2} x, \quad \eta = \sqrt{(1 - \beta^2)(1 - \beta_u^2)} y, \quad \zeta = \sqrt{1 - \beta^2} z_e - \beta\beta_u x,$$

なる置き換えをすると,

$$E_x = \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \tilde{\beta}^2}{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{3/2}} \frac{\xi d\zeta}{1 - \beta^2},$$

$$E_y = \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \tilde{\beta}^2}{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{3/2}} \frac{\eta d\zeta}{(1 - \beta^2)\sqrt{1 - \beta_u^2}},$$

$$E_z = \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \tilde{\beta}^2}{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{3/2}} \left(\zeta + \frac{\beta\beta_u\xi}{\sqrt{1 - \beta_u^2}} \right) \frac{d\zeta}{1 - \beta^2},$$

のような形に書き換えることができる。ここで, E_x, E_z は電場 \mathbf{E} の x 成分, および, z 成分である。この積分は, 静止した直線電荷密度による電場を求める積分と同じ形をしているので, 即座に計算することができ,

$$E_x = \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0} \frac{\sqrt{(1 - \beta^2)(1 - \beta_u^2)} \xi}{\xi^2 + \eta^2},$$

$$E_y = \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0} \frac{\sqrt{1 - \beta_u^2} \xi}{\xi^2 + \eta^2},$$

$$E_z = \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0} \frac{\sqrt{(1 - \beta^2)(1 - \beta_u^2)} \beta\beta_u \xi}{\xi^2 + \eta^2},$$

が得られる。さらに, 置き換えた変数 ξ をもとに戻すと,

$$E_x = \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0} \frac{\sqrt{1 - \beta^2} x}{x^2 + (1 - \beta^2)y^2}, \quad (4.24a)$$

$$E_y = \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0} \frac{\sqrt{1 - \beta^2} y}{x^2 + (1 - \beta^2)y^2}, \quad (4.24b)$$

$$E_z = \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0} \frac{\sqrt{1 - \beta^2} \beta\beta_u x}{x^2 + (1 - \beta^2)y^2}, \quad (4.24c)$$

が得られる。この結果を z 軸上に伸びる直線導体について応用し, 前節と同様に, 導体中の原子核と自由電子による電場 \mathbf{E}_+ と \mathbf{E}_- を計算しよう。

原子核の電荷密度は, 導体に対して静止する K_0 系から見たとき, ρ に等しい。観測者が存在する K 系は直線導体に対して垂直方向に運動しているため, 長さ方向にはローレンツ収縮を受けていない。よって, 原子核の電荷密度は K 系から見ても $\rho_+ = \rho$ である。これにより, 原子核による電場は,

$$\mathbf{E}_+ = \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0} \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{x^2 + (1 - \beta^2)y^2} \left[x, y, 0 \right],$$

のように記述できる。

導体に対して静止する K 系から見ると導体は電氣的に中性であるので、K 系から見た自由電子の電荷密度は、原子核の電荷密度を符号反転した $-\rho$ に等しい。さらに、K から見た自由電子は $\mathbf{u} = [-v, 0, u\sqrt{1-\beta^2}]$ のように速度ベクトルに z 成分が伴うのが原子核との相違点である。この条件を公式 (4.24a) から (4.24c) に代入すると、直線電流の自由電子に由来する電場:

$$\mathbf{E}_- = -\frac{\rho}{2\pi\epsilon_0} \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{x^2 + (1-\beta^2)y^2} \left[x, y, \beta\beta_u x \right],$$

が得られる。電場の x 成分と y 成分は原子核に由来する電場と大きさが同じで符号が逆転した値となっている。それに対し、自由電子が z 方向に相対速度をもつため、電場にも z 成分が現れた。実際に観測される電場 \mathbf{E} は、 \mathbf{E}_+ と \mathbf{E}_- の重ね合わせであるので、

$$\mathbf{E} = -\frac{\rho}{2\pi\epsilon_0} \frac{\sqrt{1-\beta^2} \beta\beta_u x}{x^2 + (1-\beta^2)y^2} \mathbf{e}_z,$$

となる。上で述べたように、 x 成分と y 成分は相殺したが、 z 自由電子に由来する電場にゼロでない z 成分が含まれるため、合成された \mathbf{E} は z 方向を向くベクトルとなる。もっとも、その性質は遅延ポテンシャルから導き出されているので、電磁作用が有限速度で伝搬することに起因する。

電場に z 成分が現れる理由 ここまでの議論では、遅延ポテンシャルに基づいて数学的に計算して現象を導いてきた。それに対し、幾何学的なアプローチから、電場に z 成分が現れるメカニズムを図 4.2 を用いて考察しよう。直線導体に沿って原子核が配列しているとす。図では便宜的に原子核が距離 2 (半径 1 の円が互いに接する状態) で等間隔に整列しているとする。直線導体は K_0 系から見て電氣的に中性なので、 K_0 から見た自由電子も同様に距離 2 で等間隔に配置している。これを x 方向に速度 v で運動する K 系から見た状態を考察してみよう。

K 系から見ると原子核は x 方向に $\sqrt{1-\beta^2}$ 倍にローレンツ収縮しているが、 z 方向には収縮しないので、やはり、 z 方向には距離 2 で等間隔に整列している。これに対し、自由電子の配列は、多少、慎重に考察してみよう。なぜなら、K 系から見た自由電子の速度は $\mathbf{u} = [-v, 0, \sqrt{1-\beta^2}u]$ のように傾いたベクトルだからだ。あえて、速度ベクトルの傾きを計算しておく、

$$\tan \theta = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2} \beta_u},$$

となる。当然、ローレンツ収縮はその傾いた速度ベクトルの方向で発生することになる。

斜め方向のローレンツ収縮の評価について、第 2.5.3 項で既に定式化した公式を利用しよう。この問題においては、 K_0 から見た半径 1 の円 $x_0^2 + y_0^2 = 1$ を、ローレンツ変換によって変形させる。第 2.5.3 項の手順を適用するには、半径 1 の円が K_0 に対して速度 $\mathbf{u}_0 = [0, 0, u]$

で運動している条件で計算する。その計算結果として、

$$\frac{1 + \beta^2 \beta_u^2}{1 - \beta^2} x^2 + y^2 - \frac{2\beta\beta_u}{\sqrt{1 - \beta^2}} xy = 1, \quad (4.25)$$

が得られる。これが図 4.2 (b) に示す傾いた楕円である。描かれた楕円の長軸の長さは 1 より大きいが、傾いて配列されるため、距離にして 2 の間隔で配置されている。そのため電荷の線密度は K 系と K' 系で等しくなっている。その事実は図から読み取れるだけでなく、ローレンツ収縮を受けた楕円の数式 (4.25) から示すこともできる。つまり、K 系から見ても自由電子の電力密度は原子核と等しく、その結果、直線導体は電気的中性を保持している。本稿の最初で期待した電気的中性の破れは、このケースでは発生しないということだ。

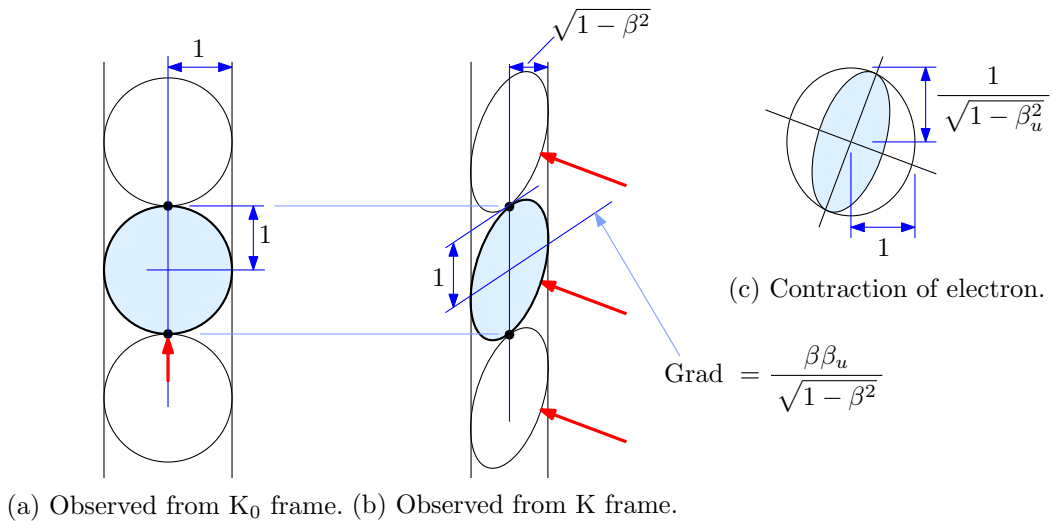


図 4.2: 斜めに運動する電荷密度のローレンツ収縮

電場に z 成分が発生するカギは、実は、斜めにローレンツ収縮されたことにある。自由電子のローレンツ収縮は、図 4.2 (c) に示す過程で発生したと考えるのがわかりやすい。K₀ 系から見ると半径 1 の円であっても、それは既にローレンツ変換を受けた結果である。なぜなら、自由電子は K₀ に対しても相対速度をもっているからだ。自由電子と並走する系から見ると、自由電子の形状 (有効領域) は、ローレンツ収縮分を戻し z 方向に $(1 - \beta_u^2)^{-1/2}$ 倍に引き伸ばした楕円である。その楕円を K 系から見た相対速度の方向に収縮させると、図 4.2 (b) に描く楕円になる。なお、そのときのローレンツ収縮率は、

$$\sqrt{1 - [\beta^2 + (1 - \beta^2) \beta_u^2]} = \sqrt{(1 - \beta^2)(1 - \beta_u^2)},$$

である。斜めにローレンツ収縮された楕円どうしが接する点では、楕円の接線は、 $\beta\beta_u(1 - \beta^2)^{-1/2}$ の傾きをもっている。これは電磁的なポテンシャルの形状に影響を与える。なぜなら、間隔をあけて配置された電荷に由来するポテンシャルは、電荷の間にポテンシャル

の谷間が存在する。この例のように電子どうしが斜めに接するのであればポテンシャルの谷は斜めに走っているだろう。それに伴い電場は直線電流と直交するのではなく、ポテンシャルの谷に沿った斜め方向を向くのだ。

4.3.4 非相対性理論との比較

直線導体の近傍を運動する荷電粒子 P について、磁場の概念を用いず、相対性理論におけるローレンツ収縮 (および、遅延ポテンシャル) によって、その荷電粒子が受ける力を求めた。それでは、その結果を、相対性理論より前の電磁気学における磁場の概念から求めた力と比較してみよう。

表 4.1 に比較のための情報を記載してある。まず、第 1 列は荷電粒子 P の速度である。第 2 列は直線導体を流れる電流である。第 3 列は直線導体から見たときの荷電粒子 P の最短距離となる相対位置を表している。第 4 列はアンペールの法則によって決定される磁束密度、そして、第 5 列がローレンツ力である。この第 5 列目が、これまでに相対論的效果として導出した荷電粒子に作用する力と一致することを確認すればよい。

表 4.1: 相対論効果による磁場発生の検証結果

| 速度 v | 電流 J | 相対位置 r | 磁束密度 B | $qv \times B$ |
|--------|--------------|-------------|---|---------------------------------------|
| ve_z | $-\rho ue_z$ | re_x | $-\frac{\mu_0\rho u}{2\pi r}e_y$ | $\frac{\mu_0q\rho uv}{2\pi r}e_x$ |
| ve_x | $-\rho ue_z$ | xe_x+ye_y | $\frac{\mu_0\rho u}{2\pi r^2}(ye_x-xe_y)$ | $-\frac{\mu_0q\rho uvx}{2\pi r^2}e_z$ |

磁束密度は $B = (J/2\pi r) \times (r/r)$ で計算される。

表の各行は荷電粒子の運動方向に対応している。第 1 行目が直線電流と平行の運動、第 2 行目が垂直でしかも動径方向、第 3 行目が垂直でしかも接線方向の運動に対応している。表の第 5 列目に示したベクトルは、磁場の概念を用いずに相対論的效果として計算した力と、非相対論的近似の範囲で一致している。非相対論的近似の範囲とは、 $\sqrt{1-\beta^2} \simeq 1$ を想定した近似を意味する。

この考察結果によって、磁場は、荷電粒子の運動によるローレンツ収縮によって電気的な中性に狂いが生じた結果、受ける電気的な力である。言い換えると、ある観測者から見たときに電気的に中性であっても、相対速度をもつ荷電粒子から見ると電気的中性ではないので、電気力を受けるのである。その観測者にとっては、電気的中性であるにも関わらず、荷電粒子が力を受けるため、磁場という概念を用いてその力を説明してきたわけである。

磁場が実在する場ではなく、概念的な場に過ぎないということは、物理学の記述において磁場は不必要なのだろうか？ いや、決してそうではない。確かに、ローレンツ収縮を細かく適用していけば磁場の概念は不要かもしれない。しかし、ここで見た直線導体の近傍を等速運動する荷電粒子程度の基本的な問題ですら、数ページを必要とする計算をすることになったのだ。磁場の概念さえあれば、荷電粒子から見た座標系など考えることもなく、数行の計算で答えが得られるであろう。つまり、物理学の手段として磁場の概念はあるべきである。

4.4 光行差とドップラ効果

第4.1節で述べたように電磁波の位相はローレンツ変換に対して不変になる。電磁波の位相には波数ベクトルと角周波数が含まれるので、位相の性質から波数ベクトルと角周波数のローレンツ変換を導くことができる。それらは、それぞれ、光行差とローレンツ変換と呼ばれる。光行差は、異なる慣性系からみると光の到来方向が異なって見える現象であり、ドップラ効果は周波数が異なって見える現象である。

4.4.1 位相の不変性からの導出

波数ベクトル \mathbf{k} と角周波数 ω が与えられたとき、電磁波の位相は、 $\phi = \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}$ となる。カルテシアン座標系について成分表示すると、

$$\omega = \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad k_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad k_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad k_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z},$$

のように角周波数と波数ベクトルを定義できる。K'系からみた観測量についても同様に定義できるはずなので、角運動量と波数ベクトルの x 成分は、

$$\begin{aligned} \omega' &= \frac{\partial \phi'}{\partial t'} = \frac{\partial x}{\partial t'} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial t'} \frac{\partial \phi}{\partial t}, \\ k'_x &= \frac{\partial \phi'}{\partial x'} = \frac{\partial x}{\partial x'} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial x'} \frac{\partial \phi}{\partial t}, \end{aligned}$$

のように変換される。他の波数ベクトルの各成分も同様である。ここで、位相 ϕ がローレンツ変換に対して不変であるので、 $\phi' = \phi$ とした。具体的に角周波数と波数ベクトルのローレンツ変換を計算すると、

$$\omega' = \frac{\omega - vk_x}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad k'_x = \frac{k_x - v\omega/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad k'_y = k_y, \quad k'_z = k_z,$$

が得られる。分子の形が多少違うものの、角周波数と波数ベクトルが、時間座標と空間座標とほぼ同じ形に変換されることが導かれた。

角周波数と波数ベクトルの変換から、光行差とドップラ効果という現象が導かれる。そのために、まず、 $k_x = -k \cos \theta$ とおいてみよう。これは、 x 軸と角度 θ をなす方向から到来する光を表している。もう一つ、 $k = \omega/c$ という関係を使う。この関係が成り立つのは、光の伝搬方向にとった座標を s としたとき、光の位相が $\varphi = \omega t - ks$ となるが、この位相が $\varphi = -k(s - ct)$ と書ける³からである。これらの関係を用いると、角周波数と波数ベクトルに関するローレンツ変換は、

$$\omega' = \frac{1 + \beta \cos \theta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \omega, \quad \omega' \cos \theta' = \frac{\cos \theta + \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \omega,$$

のように書き換えられる。これらの式をさらに変形すると、

$$\cos \theta' = \frac{\cos \theta + \beta}{1 + \beta \cos \theta}, \quad (4.26)$$

$$\omega' = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos \theta} \omega, \quad (4.27)$$

なる結果が得られる。これらの結果は、それぞれ、光行差とドップラ効果を表している。これらの式において、 θ が K 系から見た光の到来方向で、 θ' が K' から見た光の到来方向である。さらに、 ω が K 系から見た光の角周波数、 ω' が K' 系から見た光の角周波数である。

光行差は、運動する観測者から見たときに、その速度に依存して光の到来方向が異なって見える現象である。光行差の現象は、図 4.3 に示すように、観測者が見た光の相対速度と関係している。光の速度はどのような慣性系から見ても一定値 c でしかありえないが、到来方向が θ のとき (図 4.3 (a)), 光の速度の x 方向成分は $c_x = -c \cdot \cos \theta$ である。これを K' 系から観測した場合 (図 4.3 (b)) の速度 c'_x は、速度の変換則によって、

$$c'_x = -\frac{\cos \theta + \beta}{1 + \beta \cos \theta} c,$$

となることが計算される。当然、K' 系から見ても光速は c であるので、この系から見た光の到来方向は (4.26) のように変換される。このように速度変換を用いても、(4.26) を導くことができる。光行差によって、K' 系から見た景色の位置関係は、K 系から見た景色とは異なっている。速度 v が正であれば、必ず、 $\cos \theta' > \cos \theta$ となるので、K' 系から見た光の到来方向は K 系から見た方向に比べて前方に寄っている。極端な場合として、 $v = c$ の場合、 θ に依らず、必ず、 $\cos \theta' = 1$ となる。例として、 $v = 0.8c$ のときの光行差による景色の変換を図 4.3(c) に示す。観測者は図の原点に存在し、基準となる慣性系 K に対して x 軸方向に

³座標 s の方向に速度 c で伝搬する波の波動関数は、一般的に、 $f(s - ct)$ のような関数で表される。そのため、位相が $\varphi = -k(s - ct)$ のように表されるはずである。

速度 $v = 0.8c$ で運動している。図示する球面は観測者が見た天球であり、天球上に描いた緯線のような複数の円は K 系から見たときの光の到来方向を示す。この図によると、K 系から見たときに側面 ($\theta = 90^\circ$) から到来する光が、運動する観測者から見ると、前方 37 度の方向から到来していることになる。つまり、ある基準の慣性系に対して相対速度をもつ観測者が見る景色は、基準の慣性系から見た景色に比べ前方に寄っている。この前方寄りの度合いは速度が大きくなるほど激しくなり、速度が極めて光速に近づくと、景色は前方の 1 点に集結する。

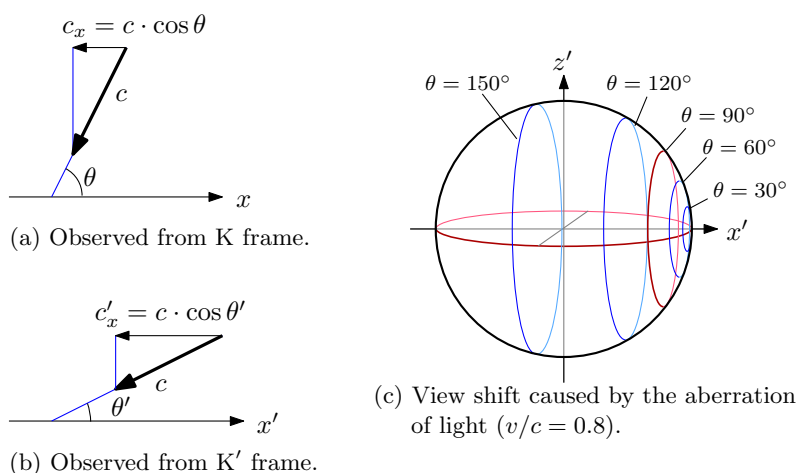


図 4.3: 相対論的な光行差による光の到来方向の変化

ドップラ効果は、観測者と波源の相対速度によって現れる周波数変化の現象である。日常では、救急車が通り過ぎた後、サイレンの音が低くなるような例で音波のドップラ効果を認識できる。これと同様に、光についてもドップラ効果が発生し、その周波数変化は (4.27) で与えられる。この式は、 $v \rightarrow 0$ の近似において、ニュートン力学における光のドップラ効果と一致する。特別な場合として、前方から到来する光を想定し、 $\theta' = 0$ を (4.27) に代入すると、

$$\omega' \Big|_{\theta'=0} = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \omega, \quad (4.28)$$

となる。電磁波のドップラ効果は、スピードガンでも応用されているように、自動車の運行速度程度の速さを十分に検出できる。ただし、その速度は光速に比べて非常に小さいのでニュートン力学における近似 $\omega' = (1 + v/c)\omega$ と一致する。このときの、 ω から ω' への増分 $(v/c)\omega$ をドップラ周波数と呼ぶことがあるが、対象となる速度が光速と比較できるようになると、ドップラ周波数は、もはや、速度 v には比例しなくなる。

もう一つの特別な場合として側面から到来する光を考えよう。その場合、 $\theta' = \pi/2$ を (4.27) に代入すればよいので、

$$\omega' \Big|_{\theta'=\pi/2} = \sqrt{1 - \beta^2} \omega, \quad (4.29)$$

が得られる。ニュートン力学では側面から到来する光にはドップラ効果が現れないのだが、相対性理論では、側面から到来する光の周波数が $\sqrt{1-\beta^2}$ 倍される (周波数は小さくなる) のである。これは、横ドップラ効果と呼ばれる相対論的な現象である。横ドップラ効果は、運動する波源の時間がゆっくり進むことに起因して現れる現象である。

4.4.2 光行差の物理的解釈

電磁波の位相がスカラーであることから電磁波のドップラ効果や光行差が導かれた。光行差は観測者に接近する光が現実よりも前方から到来するように見える現象であり、日常生活から想像しにくい現象だ。光行差は、光が有限の速さで伝搬するため、現在の位置でなく過去の位置から到来する光を見ていることに起因する。

光行差の物理的解釈を得るため、ある慣性系 K^* に静止した光源から発射される光を観測する場合を考えよう。光源は K^* 系において、区間座標 $[x_0, y_0, 0]$ に静止している。別の慣性系として K 系を考えよう。 K^* 系は K 系に対して、 x 軸方向に速度 u で運動している。 K 系が K^* 系に対して速度 $-u$ で運動していると考えてよい。これらの慣性系は、 K 系の時計で $t = 0$ のとき、互いの座標の原点が重なり、その時点で K^* 系の時計の読みが $t^* = 0$ となるように時計合わせされるものとする。

互いの時計がゼロを刻むその瞬間に、それぞれの慣性系の原点に存在する観測者が光の到来方向を評価することを考えよう。 K^* 系から見ると、光源は必ず、 $[x_0, y_0, 0]$ に存在しているのだから、到来方向 θ^* は、

$$\cos \theta^* = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}, \quad (4.30)$$

を満たす。ここで、到来方向は x から測った角度だ。 K 系から見た光源の座標はローレンツ変換で計算できる。形式的に、 K^* 系から K 系への座標変換を書くと、

$$x = \frac{x^* + ut^*}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad t = \frac{t^* + x^*u/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}},$$

が得られる。 K^* 系から見た光源の位置 $x^* = x_0$ が定数であることに注意して、上記ローレンツ変換の第 2 式は、

$$t^* = \sqrt{1 - \beta_u^2} t - \frac{\beta_u x}{c},$$

のように書き換えられる。ここで、 $\beta_u \equiv u/c$ とおいた。この t^* を代入すると、 K 系から見た光源の位置、

$$x = \sqrt{1 - \beta_u^2} x_0 + ut,$$

が得られる。得られた数式は、 K^* 系が K 系に対して速度 u で運動しているので、光源も u で運動しているように見えることを意味する。当然の結果だ。一方、 $t = 0$ のとき、 $x = \sqrt{1 - \beta_u^2} x_0$ となるのは空間がローレンツ収縮を受けていることを示唆する。

前段落のように定式化した光源の位置に基づき、 $t = 0$ においてK系から見た光の到来方向について図4.4を用いて考察しよう。K系から見ると、 $t = 0$ に観測する光は $x = \sqrt{1 - \beta_u} x_0$ (点P) から発射された光ではない。光も有限の速度 c で伝搬するので、過去の位置 (点 \hat{P}) から発射された光を観測するはずだ。その過去の位置から観測者がいる原点

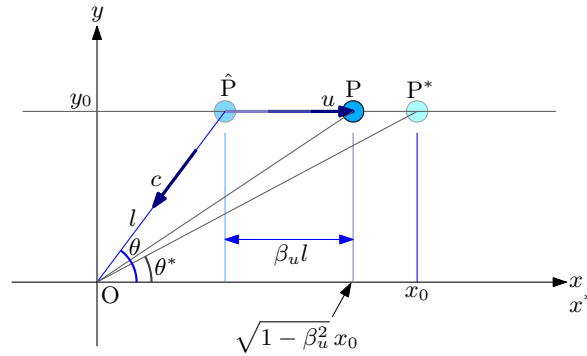


図 4.4: 光の伝搬遅延による光行差の説明

までの距離を $\widehat{OP} = l$ とすると、光は $t = -l/c$ に発射されたことになる。光が観測者に届くまでの時間 l/c に、光源は x 軸方向に $u(l/c) = \beta_u l$ だけ移動するはずだ。つまり、光が発射された時点で光源は、

$$x = \sqrt{1 - \beta_u^2} x_0 - \beta_u l, \quad (4.31)$$

に存在していたということだ。一方、光源と x 軸の距離は時間に依存せず常に y_0 である。このとき、 \widehat{OP} に関する三平方の定理は、

$$l^2 = \left(\sqrt{1 - \beta_u^2} x_0 - \beta_u l \right)^2 + y_0^2,$$

のように記述される。この方程式を距離 l について解いて得られる解:

$$l = \frac{-\beta_u x_0 + \sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{\sqrt{1 - \beta_u^2}},$$

を、(4.31) に代入すると、原点で観測される光が発射された位置:

$$x = \frac{x_0 - \beta_u \sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{\sqrt{1 - \beta_u^2}},$$

が得られる。これで $t = 0$ に観測者が見ている光の発射場所が特定できた。その光の到来方向を θ とすると、

$$\cos \theta = \frac{x}{l} = \frac{x_0 - \beta_u \sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{-\beta_u x_0 + \sqrt{x_0^2 + y_0^2}},$$

であるが、 K^* 系から見た到来方向の条件 (4.30) に注意すると、

$$\cos \theta = \frac{\cos \theta^* - \beta_u}{1 - \beta_u \cos \theta^*}, \quad (4.32)$$

が導出される。この数式は位相のスカラ性から導かれる光行差 (4.26) と一致する。この計算結果と比較から、光が有限の速度で伝搬すること、すなわち、観測者が過去の光を見ていることが光行差の要因だと解釈できる。

上での議論は、光源が存在する慣性系と観測者の慣性系の間での光行差を取り扱った。さらに別の慣性系 K' を考えよう。 K' 系は K 系に対して、 x 軸方向に速度 v で移動する。さらに、時刻 $t = 0$ で K' 系の原点が K 系の原点と重なり、その時点で $t' = 0$ となるように時計合わせされていることを仮定する。上と同様に無次元化した速度 $\beta \equiv v/c$ を用いると、 K' 系では、

$$\cos \theta' = \frac{\cos \theta^* - \beta'}{1 - \beta' \cos \theta^*}, \quad (4.33)$$

のように光行差が生じるはずだ。ここで、 $\beta' \equiv v'/c$ は K' 系に対する K^* 系の速度である。すなわち、

$$\beta' = \frac{\beta_u - \beta}{1 - \beta\beta_u},$$

が成立する。前段落で導出した (4.32) を θ^* について解くと、

$$\cos \theta^* = \frac{\cos \theta + \beta_u}{1 + \beta_u \cos \theta},$$

が得られる。この数式を (4.33) に代入すると、

$$\begin{aligned} \cos \theta' &= \frac{\cos \theta + \beta_u - \beta' (1 + \beta_u \cos \theta)}{1 + \beta_u \cos \theta - \beta' (\cos \theta + \beta_u)} \\ &= \frac{(1 - \beta\beta_u)(\cos \theta + \beta_u) - (\beta_u - \beta)(1 + \beta_u \cos \theta)}{(1 - \beta\beta_u)(1 + \beta_u \cos \theta) - (\beta_u - \beta)(\cos \theta + \beta_u)} \\ &= \frac{\cos \theta + \beta}{1 + \beta \cos \theta}, \end{aligned}$$

のように、 K' 系から見た光の到来方向が計算できる。この数式変形は、第 1 行目で $\cos \theta^*$ を消去し、第 2 行目で θ' を消去している。計算の結果、 β_u の依存性が消え、(4.32) と同じ形式の数式が得られた。条件設定として、光源は K 系や K' 系に存在していない。つまり、 θ と θ' はどちらも光行差を受けた到来方向であり、それらの関係が、光源の速度 u 、あるいは、 β_u に依存しないことが驚くべき結果だ。

4.4.3 ドップラ効果と光量子仮説

特定の体積に含まれる光のエネルギーをローレンツ変換し、その結果をドップラ効果と比較すると、光量子仮説に矛盾しない興味深い関係が得られる。正確に言うと、特定の体積に含まれる光のエネルギーを異なる 2 つの慣性系で観測した場合、エネルギーは各慣性

系で測定した周波数に比例するのだ。対象とする体積を光子が1個しか入れない体積とすれば、それは光子1個のエネルギーである。光量子仮説によると角周波数 ω に対応する光子のエネルギーは、 $E_{\text{em}} = \hbar\omega$ のように周波数に比例する。それでは、光量子仮説との関連を連想させる興味深い関係式を導出しよう。

伝搬する体積の変換 対象とする体積片は、K系からみて x 軸と角度 θ をなす方向から光速で到来する半径1の球とする。体積片の中心が原点を通過する時刻を $t = 0$ とすると、その球の表面は、

$$(x + ct \cos \theta)^2 + (y + ct \sin \theta)^2 + z^2 = 1,$$

なる数式で表される。なお、簡単のため、体積片の運動方向を xy 平面内に限定した。座標軸の方向を任意に選べることを考えると、この限定は一般性を欠くものではない。ローレンツ変換:

$$x = \frac{x' + \beta ct'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad ct = \frac{ct' + \beta x'}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

によってK'系からみた場合に変換すると、球面は、

$$\left[\frac{(1 + \beta \cos \theta)x' - (\cos \theta + \beta)ct'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right]^2 + \left[y' + \frac{(ct' + \beta x') \sin \theta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right]^2 + z'^2 = 1,$$

のようになる。計算を簡略化するため、光の伝搬方向 θ を光行差の式によってK'系から見た角度 θ' に書き換えると、上の数式は

$$\left[\frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos \theta'} \bar{x}' \right]^2 + \left[\bar{y}' + \frac{\beta \sin \theta'}{1 - \beta \cos \theta'} \bar{x}' \right]^2 + \bar{z}'^2 = 1,$$

のように変換される。ただし、 $\bar{x}' \equiv x' + ct' \cos \theta'$ 、 $\bar{y}' \equiv y' + ct' \sin \theta'$ 、 $\bar{z}' \equiv z'$ とおいた。つまり、 $[\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}']$ は、K'系からみた光の中心を原点とした座標である。この数式を計算して整理すると、

$$\frac{1 + \beta \cos \theta'}{1 - \beta \cos \theta'} \bar{x}'^2 + \bar{y}'^2 + \frac{2\beta \sin \theta'}{1 - \beta \cos \theta'} \bar{x}' \bar{y}' + \bar{z}'^2 = 1, \quad (4.34)$$

となる。この数式は図4.5に示すような傾いた回転楕円体の表面を表す。この図は、回転楕円体を $\bar{z}' = 0$ の平面で切断したときの断面を表している。後に数式で示すが、回転楕円体は \bar{z}' 軸について時計回りに角度 $\theta'/2$ だけ傾いている。図4.5の太い矢印は光の伝搬方向を示す。また、(4.34)について $\bar{x}' = 0$ とすればわかるように、観測者の速度や光の伝搬方向に関係なく、回転楕円体が $\bar{y}' = 1$ で \bar{y} 軸と交わることも特徴である。

数式(4.34)が示す楕円の大きさと傾きを得るため、楕円の長軸と短軸を、それぞれ、 ξ' 軸、 η' 軸のように設定する。もう一つ必要な座標軸を ζ' 軸とし、これは \bar{z}' 軸と同一であるとする。それら座標軸方向の回転楕円体の半径を $A_{\xi'}$ 、 $A_{\eta'}$ 、 $A_{\zeta'}$ としよう。この座標系の $\xi'\eta'$ 平

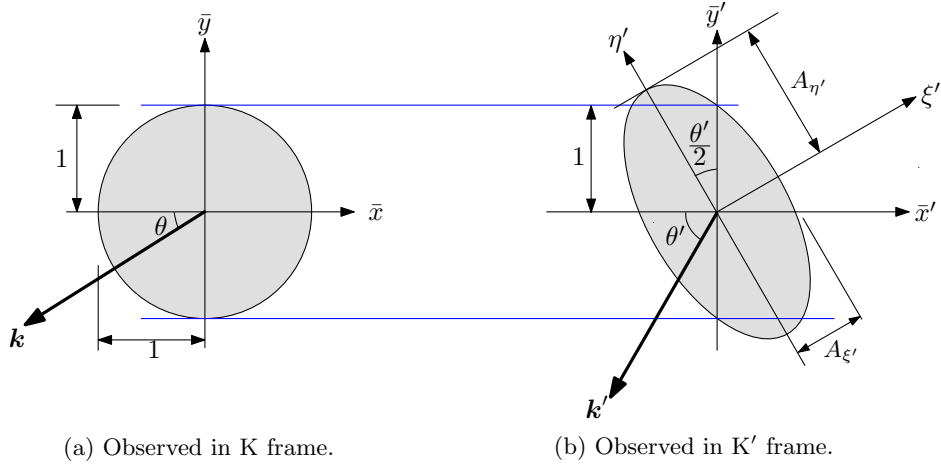


図 4.5: 光とともに伝搬する体積の変換

面が, $\bar{x}'\bar{y}'$ 平面を反時計回りに角度 φ だけ回転した平面だとすれば, 回転楕円体の表面は,

$$\left(\frac{\cos^2 \varphi}{A_\xi^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{A_\eta^2}\right) \bar{x}'^2 + \left(\frac{\sin^2 \varphi}{A_\xi^2} + \frac{\cos^2 \varphi}{A_\eta^2}\right) \bar{y}'^2 + 2\left(\frac{1}{A_\xi^2} - \frac{1}{A_\eta^2}\right) \bar{x}'\bar{y}' \sin \varphi \cos \varphi + \frac{\bar{z}'^2}{A_\zeta^2} = 1,$$

となる。この数式と, ローレンツ変換から求めた回転楕円体 (4.34) の係数を比較すると, 回転楕円体の大きさと傾きは,

$$A_{\xi'} = \sqrt{\frac{1 - \beta \cos \theta'}{1 - \beta}}, \quad A_{\eta'} = \sqrt{\frac{1 - \beta \cos \theta'}{1 + \beta}}, \quad A_{\zeta'} = 1, \quad \varphi = \frac{\theta'}{2},$$

となることがわかる。回転楕円体を $\zeta' = 0$ の平面で切断した断面となる楕円の長軸と短軸の比は, $A_{\xi'}/A_{\eta'} = \sqrt{(1 + \beta)/(1 - \beta)}$ となり, 光の伝搬方向 θ' には無関係である。また, 回転楕円体は, K' 系からみた光の伝搬方向の 2 分の 1 の角度だけ傾いている。先ほど求めた楕円球のパラメータから, K 系からみた球の体積を V としたとき, K' 系からみた楕円球の体積 V' は,

$$V' = \frac{1 - \beta \cos \theta'}{\sqrt{1 - \beta^2}} V = \frac{\sqrt{1 + \beta^2}}{1 + \beta \cos \theta} V,$$

となり, ドップラ効果を受けた周波数に反比例する。この計算の最後で, 再び光行差の公式を適用し, K 系からみた到来方向 θ を用いた表現に戻している。ここで導出した結果を用いて, 観測者の周囲から到来する光の塊の形状を図 4.6 に示す。静止系 (K 系) からみた場合に光の塊が球としたときの形状変化を図示している。中央に描かれた三角形が観測者である。 K' 系の速度が $\beta = 0.6$ であることから, K' 系からみた光の塊は, 短軸に対する長軸の比が 2 である楕円球である。しかも, 楕円球の中心を通る $\eta\zeta$ 平面で切断した断面が必ず同じ大きさの円になる。楕円球は光の到来方向に応じて, 図 4.6 に示すように向きを変えながら, 大きさも変化している。

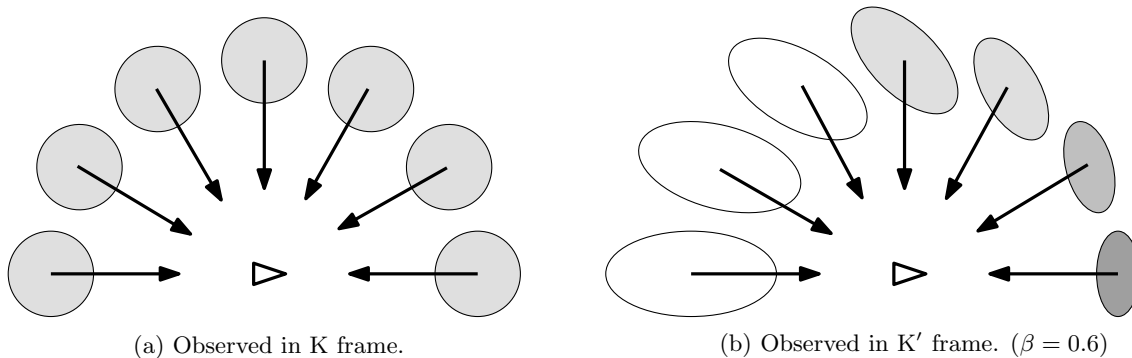


図 4.6: 周囲から到来する光の形状

電場の振幅の変換 マクスウェルの方程式によると、電場、磁束密度、電磁波の伝搬方向は右ねじの法則にしたがって直交している。しかも、磁束密度の大きさ B は、電場の大きさ E と $B = E/c$ の関係で結ばれている。ここでは、電磁波が、 K 系からみて xy 平面上を x 軸と角度 $\pi + \theta$ をなす方向に伝搬している (θ の方向から到来している) とする。この条件では、電場の振動方向は一意的に定まらず、電磁波の伝搬方向を軸として回転した任意の方向に設定できる。その電場が任意の方向を向いていることを偏波と呼ぶ。一般の偏波は次の2つの偏波を一次結合すれば得られる。

E 波 電場が z 軸方向を向き、磁束密度が xy 平面上を這っている。

B 波 磁束密度が z 軸方向を向き、電場が xy 平面上を這っている。

これら二つの設定を描くと図 4.7 のようになる。この図において、 z 軸は紙面の裏から表に抜ける方向である。また、中央に黒点がある白丸は、同様に紙面の裏から表に抜けるベクトルを示している。図中のベクトル k が光の伝搬方向である。

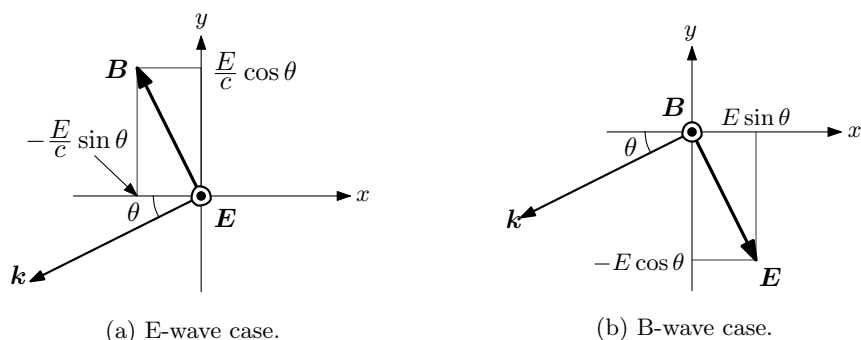


図 4.7: 伝搬方向が与えられたときの電場の偏波方向成分

E 波の場合、電磁場のベクトルは図 4.7 (a) のような方向を向いている。この図に基づい

て電場 \mathbf{E} と磁束密度 \mathbf{B} を成分表示すると,

$$\mathbf{E} = \left[0, 0, E \right],$$

$$\mathbf{B} = \left[-\frac{E}{c} \sin \theta, \frac{E}{c} \cos \theta, 0 \right],$$

である。この場の成分に対し、電磁場のローレンツ変換を適用して K' 系からみた電場を計算すると,

$$\mathbf{E}' = \left[0, 0, \frac{1 + \beta \cos \theta}{\sqrt{1 - \beta^2}} E \right],$$

が得られる。これより、 K' 系からみた電場の大きさ E' は,

$$E' = \frac{1 + \beta \cos \theta}{\sqrt{1 - \beta^2}} E,$$

となり、ドップラ効果を受けた周波数に比例する。

B波の場合、電磁場のベクトルは図 4.7 (b) のような方向を向いている。この図に基づいて電場 \mathbf{E} と磁束密度 \mathbf{B} を成分表示すると,

$$\mathbf{E} = \left[E \sin \theta, -E \cos \theta, 0 \right],$$

$$\mathbf{B} = \left[0, 0, \frac{E}{c} \right],$$

である。この場の成分に対し、電磁場のローレンツ変換を適用して K' 系からみた電場を計算すると,

$$\mathbf{E}' = \left[E \sin \theta, -\frac{\cos \theta + \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} E, 0 \right],$$

が得られるので、 K' 系からみた電場の振幅 E' は

$$E' = \frac{1 + \beta \cos \theta}{\sqrt{1 - \beta^2}} E$$

となり、E波と同様にドップラ効果を受けた周波数に比例する。

E波においても、B波においても、 K' 系からみた電場の大きさはともに同じ大きさになっている。つまり、どのような比率で一次結合しても E' と E の関係は同じ関係式で表される。したがって、偏波方向とは無関係に,

$$E' = \frac{1 + \beta \cos \theta}{\sqrt{1 - \beta^2}} E,$$

が成立し、電場の振幅はドップラ効果を受けた周波数に比例するのである。

特定の体積中の電磁エネルギー 体積と電場の振幅を異なる慣性系の間で変換することができたので、特定の体積中に含まれる光のエネルギーを評価しよう。電場 \mathbf{E} と磁束密度 \mathbf{B} が与えられたとき、真空中でのエネルギー密度 ε_{em} は、

$$\varepsilon_{\text{em}} = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 |\mathbf{E}|^2 + \frac{|\mathbf{B}|^2}{\mu_0} \right) = \varepsilon_0 |\mathbf{E}|^2,$$

となる。右辺への数式変形において、 $\varepsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$ と、伝搬する場の振幅の関係 $|\mathbf{B}| = |\mathbf{E}|/c$ を用いた。エネルギー密度に体積を乗じれば体積中に含まれるエネルギーが計算できる。すなわち、電磁エネルギーは $E_{\text{em}} = \varepsilon_{\text{em}} V$ で計算できる。K'系からみた電磁エネルギーを計算するにあたり、体積がドップラ効果を受けた周波数に反比例し、電場の振幅がドップラ効果を受けた周波数に比例することを利用する。すると、K'系からみた電磁エネルギーは、

$$E'_{\text{em}} = \varepsilon_0 E'^2 V'^2 = \frac{1 + \beta \cos \theta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \cdot \varepsilon_0 V E^2 = \frac{1 + \beta \cos \theta}{\sqrt{1 - \beta^2}} E_{\text{em}},$$

となる。改めて結果を書くと、

$$E'_{\text{em}} = \frac{1 + \beta \cos \theta}{\sqrt{1 - \beta^2}} E_{\text{em}},$$

のように変換されることがわかる。したがって、特定の体積中に含まれる電磁エネルギーはドップラ効果を受けた周波数に比例する。つまり、この結果を

$$\frac{E'_{\text{em}}}{\omega'} = \frac{E_{\text{em}}}{\omega},$$

のように書いてもよい。相対性の原理より、観測された光の周波数がドップラ効果を受けた周波数かを知るすべはないので、特定の体積に含まれる電磁エネルギーは周波数に比例するといったほうがよいであろう。注目する体積が、光子1個分の体積だったとすると、光子1個のエネルギーは周波数に比例する。この推察は $E_{\text{em}} = \hbar\omega$ なる光量子仮説と矛盾しない。

4.5 力の変換

電磁場の変換則を用いて、荷電粒子に作用する力を考察してみよう。質量が m で、かつ、電荷 e をもつ荷電粒子が、ある時点で K'系に対して瞬間的に静止していたとする。そのとき、荷電粒子に働く力はニュートン力学が近似的に成立するので、

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt'^2} = e \mathbf{E}', \quad (4.35)$$

が成り立つ。ここで、 \mathbf{r}' は K'系における位置ベクトルである。また、電荷 e にあえてプライム (') をつけていないのは、前節で導出したように、電荷がローレンツ変換に対して不変であることによる。

それでは, (4.35) にローレンツ変換を適用し, 相対論的な力を定義してみよう。具体的には左辺に加速度の変換式 (3.11) を適用し, 右辺に電場の変換式 (4.17) を適用する。すると,

$$\frac{m}{(1-\beta^2)^{3/2}} \frac{d^2x}{dt^2} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})_x, \quad (4.36a)$$

$$\frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{d^2y}{dt^2} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})_y, \quad (4.36b)$$

$$\frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{d^2z}{dt^2} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})_z, \quad (4.36c)$$

が得られる。右辺のベクトルに付加した添え字 x, y, z は, それぞれ, ベクトルの x, y, z 成分であることを意味する。これは, ある時点で K' 系に対して相対的に静止する荷電粒子を K 系から観測したときの運動方程式である。別の見方をすれば, この方程式は K 系に対して x 軸方向に速度 v で運動する荷電粒子の運動方程式である。その荷電粒子の速度は x 軸方向に限定されているが, その速度を任意のベクトル \mathbf{u} に拡張することは容易である。すなわち, K 系に対して任意の速度 \mathbf{u} で運動する荷電粒子の運動方程式は,

$$\frac{m}{(1-\beta^2)^{3/2}} \frac{d^2\mathbf{r}_{\parallel}}{dt^2} = e(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})_{\parallel}, \quad (4.37)$$

$$\frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{d^2\mathbf{r}_{\perp}}{dt^2} = e(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})_{\perp}, \quad (4.38)$$

となることが推測できる。ここで, ベクトルに付した添え字 \parallel は速度ベクトル \mathbf{u} に平行な成分, 添え字 \perp は \mathbf{u} に垂直な成分を表す。この運動方程式の右辺はともにローレンツ力となっている。ローレンツ力は, 1895年にローレンツが彼の電子論において紹介した力であり, それはマクスウェルの方程式の原文におけるファラデーの法則⁴から導かれる。アインシュタインが特殊相対性理論を発表した1905年においても, ローレンツ変換は検証されていなかった。しかし, 相対性理論ではマクスウェルの方程式をローレンツ変換した結果, ローレンツ力は必然的に現れるので, 相対性理論はローレンツの電子論を後援する存在となったことだろう。相対性理論によらない電磁力学におけるローレンツ力の解釈は, 運動する荷電粒子が磁場によってその進路を曲げられるということである。しかし, 相対性理論を導入すれば, 磁場が荷電粒子の進路を曲げるしくみが見えてくる。ある慣性系 K に対して相対速度をもつ荷電粒子から見た電場は, K 系から見た電場とは異なっている。そのため, 荷電粒子は電場による力を受けているに過ぎないのだが, K 系から見ると, 荷電粒子があたかも電場以外の何かによって力を受けているように見える。その電場以外の何かを, 磁場と定義するのである。

⁴本書に記載しているマクスウェルの方程式は, 1884年にヘビサイド (heaviside) が書き直した方程式である。マクスウェルの原文におけるファラデーの法則は, $\mathbf{E} = \mu\mathbf{v} \times \mathbf{H} - \nabla\phi - \partial\mathbf{A}/\partial t$ のように記述されていた。

どの立場でローレンツ力を解釈するにせよ、K系に対して任意の速度 \mathbf{u} で運動する荷電粒子に作用する力は、

$$\mathbf{K} = e(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}), \quad (4.39)$$

であると考えるのが理にかなっている。この力を速度 \mathbf{u} に平行な成分 \mathbf{K}_{\parallel} と垂直な成分 \mathbf{K}_{\perp} に分離すると、

$$\mathbf{K}_{\parallel} = \frac{m \mathbf{a}_{\parallel}}{(1 - \beta^2)^{3/2}}, \quad \mathbf{K}_{\perp} = \frac{m \mathbf{a}_{\perp}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (4.40)$$

のように書くことができる。ここで、 $\mathbf{a} \equiv d^2\mathbf{r}/dt^2$ は加速度ベクトルである。この方程式はニュートン力学における $\mathbf{K} = m\mathbf{a}$ に対応する方程式である。

さて、(4.40) で与えられる力 \mathbf{K} に対する変換を求めてみよう。そのためには、(4.40) が任意ベクトル \mathbf{u} の方向に依存した形で書かれているのが不便なので、

$$\mathbf{K} = \frac{m \mathbf{a}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} + \frac{m \mathbf{u}}{(1 - u^2/c^2)^{3/2}} \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}}{c^2}, \quad (4.41)$$

のように書き直しておく。この式は、単純に $\mathbf{K} = \mathbf{K}_{\parallel} + \mathbf{K}_{\perp}$ を計算すれば導出できる。相対性の原理より、当然、異なる慣性系 K' でも同じ規則性:

$$\mathbf{K}' = \frac{m \mathbf{a}'}{\sqrt{1 - u'^2/c^2}} + \frac{m \mathbf{u}'}{(1 - u'^2/c^2)^{3/2}} \frac{\mathbf{a}' \cdot \mathbf{u}'}{c^2},$$

が成立すべきである。この式の x, y, z すべての成分について、すでに求めた速度と加速度のローレンツ変換を代入していけば力の変換が導出できるはずである。すべての成分に共通して現れる速度と加速度の内積 $\mathbf{a}' \cdot \mathbf{u}'$ は、

$$\mathbf{a}' \cdot \mathbf{u}' = \frac{(1 - \beta^2)^{3/2}}{(1 - vu_x/c^2)^4} \left[\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right) (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}) - \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) va_x \right],$$

のように変換される。さらに速度と加速度の変換を代入していくと、

$$\begin{aligned} K'_x &= \frac{1}{1 - vu_x/c^2} \left[\frac{m a_x}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} + \frac{m u_x}{(1 - u^2/c^2)^{3/2}} \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}}{c^2} - \frac{m v}{(1 - u^2/c^2)^{3/2}} \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}}{c^2} \right], \\ K'_y &= \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - vu_x/c^2} \left[\frac{m a_y}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} + \frac{m u_y}{(1 - u^2/c^2)^{3/2}} \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}}{c^2} \right], \\ K'_z &= \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - vu_x/c^2} \left[\frac{m a_z}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} + \frac{m u_z}{(1 - u^2/c^2)^{3/2}} \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}}{c^2} \right], \end{aligned}$$

が得られる。この結果を整理して書くと、力の変換則は

$$K'_x = \frac{K_x - v P/c^2}{1 - vu_x/c^2}, \quad K'_y = \frac{K_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - vu_x/c^2}, \quad K'_z = \frac{K_z \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - vu_x/c^2}, \quad (4.42)$$

という形で表すことができる。力の x 成分に関する変換則に現れる P は、

$$P = \frac{m \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}}{(1 - u^2/c^2)^{3/2}},$$

であり、物理的には (3.17) で既に紹介されている単位時間当たりのエネルギー増加率、すなわち、仕事率を意味する量である。

ところで、力の変換を求めるにあたり、ローレンツ力が運動する荷電粒子に作用する力であると仮定した。そのローレンツ力は本当に、導出した力の変換式にしたがうのだろうか？ したがわないのであれば、ローレンツ力が荷電粒子に作用する力である仮定は正しくないことになるし、力の変換式さえも誤りである可能性が出てくる。その仮定を確かめる意味で、ローレンツ力を変換してみると、

$$\begin{aligned} e(\mathbf{E}' + \mathbf{u}' \times \mathbf{B}')_x &= \frac{e[\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}]_x - v(e\mathbf{E} \cdot \mathbf{u})/c^2}{1 - vu_x/c^2}, \\ e(\mathbf{E}' + \mathbf{u}' \times \mathbf{B}')_y &= \frac{e[\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}]_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - vu_x/c^2}, \\ e(\mathbf{E}' + \mathbf{u}' \times \mathbf{B}')_z &= \frac{e[\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}]_z \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - vu_x/c^2}, \end{aligned}$$

が得られる。ローレンツ力の x 成分に関して、 $e\mathbf{E} \cdot \mathbf{u}$ は電荷 e をもつ荷電粒子に作用する仕事率であるので、ローレンツ力も力の変換則にしたがうことがわかる。よって、この節で導出した力の変換則には矛盾がないことが示された。

4.6 運動する物質内の電磁場

これまで真空中に点在する荷電粒子による電磁場を議論してきた。これに対して、物質内部の電磁場を取り扱うには、誘電率 ϵ 、透磁率 μ といった物質固有のパラメータが必要となる。これらのパラメータは電場 \mathbf{E} と磁束密度 \mathbf{B} を

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu, \quad (4.43)$$

のような関係によって電束密度 \mathbf{D} と磁場 \mathbf{H} に変換することができる。一方、伝導率 σ を用いると、オームの法則:

$$\mathbf{j}_c = \sigma \mathbf{E}, \quad (4.44)$$

によって物質内部の伝導電流密度 \mathbf{j}_c を表現できる。伝導電流密度とは自由電子による電流の密度である。これに対して、電荷密度 ρ をもつ物質自体が速度 \mathbf{v} で運動することによる電流密度 $\rho \mathbf{v}$ を運搬電流密度という。マクスウェルの方程式に現れる電流密度は、

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_c + \rho \mathbf{v},$$

のように伝導電流密度と運搬電流密度の和である。

しかしながら、第 4.1 節で電磁場の変換を導出した際に、真空以外では $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$, $\mathbf{H} = \epsilon\mathbf{B}/\mu$ が成り立たないことを述べた。これから導出するが、実は、物質内部における電場と電束密度、または、磁束密度と磁場の関係には速度に関する項が含まれる。観測者の運動速度によって変換則が異なるのは相対性の原理に反するようにも聞こえるが、そうではない。確かに、真空では自分が静止しているかを判定するすべがないのであらゆる慣性系は同じ物理法則が成り立つと考えるのが自然である。しかし、空気や水のような物質中では、物質に対してゼロでない相対速度で運動すると、その相対速度に依存した抵抗力が働くため、媒質内に性質する観測者と運動する観測者は相対的でなく、相対性原理の適用外である。

相対性原理が成立しないが、K 系に対して速度 \mathbf{u} で運動する物質内の電場と電束密度、磁場と磁束密度の関係を導出しよう。第 4.1 節で導出した結果によると、この物質と併走する慣性系 K^* から見た電磁場は、

$$\mathbf{E}_{\parallel}^* = \mathbf{E}_{\parallel}, \quad \mathbf{E}_{\perp}^* = \frac{\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad (4.45a)$$

$$\mathbf{B}_{\parallel}^* = \mathbf{B}_{\parallel}, \quad \mathbf{B}_{\perp}^* = \frac{\mathbf{B}_{\perp} - \mathbf{u} \times \mathbf{E}/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad (4.45b)$$

$$\mathbf{D}_{\parallel}^* = \mathbf{D}_{\parallel}, \quad \mathbf{D}_{\perp}^* = \frac{\mathbf{D}_{\perp} + \mathbf{u} \times \mathbf{H}/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad (4.45c)$$

$$\mathbf{H}_{\parallel}^* = \mathbf{H}_{\parallel}, \quad \mathbf{H}_{\perp}^* = \frac{\mathbf{H}_{\perp} - \mathbf{u} \times \mathbf{D}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (4.45d)$$

のように変換される。ここで、速度 \mathbf{u} の方向は任意であり、添え字 \parallel を付したベクトルはその速度と平行な成分、 \perp を付したベクトルは速度と垂直な成分を表す。慣性系 K^* から見ると物質は静止しているので、非相対論的な関係 $\mathbf{D}^* = \epsilon\mathbf{E}^*$, $\mathbf{H}^* = \mathbf{B}^*/\mu$ が成立すると考える。この関係は、

$$\mathbf{D} + \frac{\mathbf{u}}{c^2} \times \mathbf{H} = \epsilon(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}), \quad (4.46a)$$

$$\mathbf{H} - \mathbf{u} \times \mathbf{D} = \frac{1}{\mu} \left(\mathbf{B} - \frac{\mathbf{u}}{c^2} \times \mathbf{E} \right), \quad (4.46b)$$

のように書くことができる。この連立方程式を解けば K 系から見たときの電界と電束密度、磁束密度と磁界の変換を得ることができる。この方程式を解くには、次のような操作をすればよい。まず、(4.46a) の両辺に左から \mathbf{u} を外積すると、

$$\mathbf{u} \times \mathbf{D} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{H}) \frac{\mathbf{u}}{c^2} - \frac{u^2}{c^2} \mathbf{H} = \epsilon \left[\mathbf{u} \times \mathbf{E} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{u} - u^2 \mathbf{E} \right], \quad (4.47)$$

が得られる。一方, (4.46a) の両辺に \mathbf{u} を内積した場合, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{u} \cdot \mathbf{E}$ が得られるので, (4.47) は

$$\mathbf{u} \times \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{u} \times \mathbf{E} + \left(\varepsilon - \frac{1}{c^2 \mu} \right) (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{u} - \varepsilon u^2 \mathbf{B} + \frac{u^2}{c^2} \mathbf{H},$$

のように変形できる。これを (4.46b) に代入すれば \mathbf{D} を消去できるので, \mathbf{H} を \mathbf{B} と \mathbf{E} の関係式で表現することができる。同様の操作をすれば, \mathbf{D} についても解くことができる。その結果として,

$$\mathbf{D} = \frac{1}{1 - u^2/c^2} \left\{ \left(\varepsilon - \frac{u^2}{c^4 \mu} \right) \mathbf{E} + \left(\varepsilon - \frac{1}{c^2 \mu} \right) \left[\mathbf{u} \times \mathbf{B} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{E}) \frac{\mathbf{u}}{c^2} \right] \right\}, \quad (4.48)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{1 - u^2/c^2} \left\{ \left(\frac{1}{\mu} - u^2 \varepsilon \right) \mathbf{B} + \left(\varepsilon - \frac{1}{c^2 \mu} \right) \left[\mathbf{u} \times \mathbf{E} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{u} \right] \right\}, \quad (4.49)$$

が得られる。これが等速運動する物質内の電磁場の関係式である。この関係を逆に解けば,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{1 - u^2/c^2} \left\{ \left(\frac{1}{\varepsilon} - u^2 \mu \right) \mathbf{D} + \left(\frac{1}{c^2 \varepsilon} - \mu \right) \left[\mathbf{u} \times \mathbf{H} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{D}) \mathbf{u} \right] \right\}, \quad (4.50)$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{1 - u^2/c^2} \left\{ \left(\mu - \frac{u^2}{c^4 \varepsilon} \right) \mathbf{H} + \left(\frac{1}{c^2 \varepsilon} - \mu \right) \left[\mathbf{u} \times \mathbf{D} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{H}) \frac{\mathbf{u}}{c^2} \right] \right\}, \quad (4.51)$$

なる関係を得ることができる。非相対論では電荷密度 \mathbf{D} は単純に電場 \mathbf{E} に比例していたが, 相対性理論では電荷密度 \mathbf{D} は電場 \mathbf{E} にも磁束密度 \mathbf{B} にも依存し, 観測者に対する物質の相対速度 \mathbf{u} の依存性が含まれている。特別な場合として, 誘電率が ε_0 , 透磁率が μ_0 のときは速度 \mathbf{u} についての依存性が消える。一般の誘電率と透磁率の場合について, u/c の1次近似をとると,

$$\mathbf{D} \simeq \varepsilon \mathbf{E} + \left(\varepsilon - \frac{1}{c^2 \mu} \right) \mathbf{u} \times \mathbf{B}, \quad \mathbf{H} \simeq \frac{\mathbf{B}}{\mu} + \left(\varepsilon - \frac{1}{c^2 \mu} \right) \mathbf{u} \times \mathbf{E},$$

となるので, 非相対論的電磁気学における \mathbf{E} と \mathbf{D} , または, \mathbf{B} の \mathbf{H} 関係は, u/c の0次近似にすぎないことがわかる。

次にその物質内の電荷密度と電流密度を考えてみよう。K系から観測した電流密度は, 物質自体がK系に対して相対速度 \mathbf{u} で運動しているため,

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_c + \rho \mathbf{u},$$

のように伝導電流と運搬電流の和で表される。それを考慮して物質と併走する K^* 系から観測した電荷密度を求めると,

$$\rho^* = \sqrt{1 - u^2/c^2} \rho - \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{j}_c)/c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}},$$

が得られる。これを K 系から見た電荷密度 ρ について解くと、

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} + \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{j}_c)/c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad (4.52)$$

となる。ここで、静止電荷密度の意味で $\rho_0 \equiv \rho^*$ という記号に置き換えた。相対速度をもつ別の慣性系から見ると、伝導電流が電荷密度に変換されてしまうことがこの結果からわかる。すると、当然、その変換は運搬電流密度にも当てはまることなので、電流密度を伝導電流と運搬電流に分けた場合、その混合率は観測者の速度によって異なるということである。

一方、電流密度に関して変換則を書いてみると、

$$\mathbf{j}_{\parallel}^* = \frac{(\mathbf{j}_{c\parallel} + \rho \mathbf{v}) - \rho \mathbf{v}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad \mathbf{j}_{\perp}^* = \mathbf{j}_{\perp},$$

となる。慣性系 K^* は物質と併走しているので、この系から見ると運搬電流が存在しない、すなわち、 $\mathbf{j}^* = \mathbf{j}_c^*$ である。よって、伝導電流密度は、

$$\mathbf{j}_{c\parallel}^* = \frac{\mathbf{j}_{c\parallel}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad \mathbf{j}_{c\perp}^* = \mathbf{j}_{c\perp}, \quad (4.53)$$

のような変換則にしたがうことがわかる。さらに、物質と併走する K^* 系からの観測量は非相対論的な近似が成り立つので、オームの法則 $\mathbf{j}_c^* = \sigma \mathbf{E}'$ が成り立つ。これを K 系から見た観測量に変換すると、

$$\mathbf{j}_c = \frac{\sigma}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \left[\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{u}) \frac{\mathbf{u}}{c^2} \right], \quad (4.54)$$

となる。これが運動する物質におけるオームの法則である。

4.7 分極ベクトルと磁化ベクトル

物質内部の誘電率と透磁率が ϵ_0 と μ_0 でないのは、物質内部で電気分極と磁化が発生するからである。電気分極は、物質分子が電場の影響を受けて物質内部に電氣的な偏りが現れる現象である。磁化は、磁場によって物質の電子軌道、または、電子スピンの影響を受ける現象である。この節では、相対性理論的な分極と磁化を扱う。

前節と同じように、ある物質が K 系に対して速度 \mathbf{u} で運動している。この速度は x 軸方向とは限らない任意のベクトルであるとする。この物質と併走する慣性系を K^* とし、この慣性系から観測される電場や磁束密度のような観測量は \mathbf{E}^* , \mathbf{B}^* のようにアスタリスク (*) を右肩に付した記号で表すものとする。この物質内部に発生する分極と磁化を、それ

ぞれ, \mathbf{P}^* , \mathbf{M}^* とすれば, 物質と併走する慣性系 K^* から見れば非相対論的な近似が成り立つので,

$$\mathbf{D}^* = \varepsilon_0 \mathbf{E}^* + \mathbf{P}^*, \quad \mathbf{H}^* = \frac{\mathbf{B}^*}{\mu_0} - \mathbf{M}^*, \quad (4.55)$$

と書くことができる。

ところで, 分極ベクトルと磁化ベクトル以外の観測量は既に座標変換に対してどのように変換されるのかがわかっている。電場 \mathbf{E}^* と磁束密度 \mathbf{B}^* を速度ベクトル \mathbf{u} に平行な成分と垂直な成分に分離すると,

$$\mathbf{E}_{\parallel}^* = \mathbf{E}_{\parallel}, \quad \mathbf{E}_{\perp}^* = \frac{\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad (4.56a)$$

$$\mathbf{B}_{\parallel}^* = \mathbf{B}_{\parallel}, \quad \mathbf{B}_{\perp}^* = \frac{\mathbf{B}_{\perp} - \mathbf{u} \times \mathbf{E}/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad (4.56b)$$

のように, K 系から観測される量との関係を表すことができる。当然, (4.55) は,

$$\mathbf{D}_{\parallel} = \mathbf{D}_{\parallel}^*, \quad \mathbf{D}_{\perp} = \frac{\mathbf{D}_{\perp}^* - \mathbf{u} \times \mathbf{H}^*/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad (4.57a)$$

$$\mathbf{H}_{\parallel} = \mathbf{H}_{\parallel}^*, \quad \mathbf{H}_{\perp} = \frac{\mathbf{H}_{\perp}^* + \mathbf{u} \times \mathbf{D}^*}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad (4.57b)$$

によって K 系から見た観測量に変換できる。それでは, (4.57a) を適用して, K 系から見ると分極がどのように観測されるかを導出してみよう。まず, (4.57a) に (4.55) を代入すると,

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{\parallel} &= \varepsilon_0 \mathbf{E}_{\parallel}^* + \mathbf{P}_{\parallel}^*, \\ \mathbf{D}_{\perp} &= \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \left[\varepsilon_0 \mathbf{E}_{\perp}^* + \mathbf{P}_{\perp}^* - \frac{\mathbf{u}}{c^2} \times \left(\frac{\mathbf{B}^*}{\mu_0} - \mathbf{M}^* \right) \right], \end{aligned}$$

が得られる。この式の右辺に含まれる \mathbf{E}^* と \mathbf{B}^* に (4.56a) と (4.56b) を代入すると,

$$\mathbf{D}_{\parallel} = \varepsilon_0 \mathbf{E}_{\parallel} + \mathbf{P}_{\parallel}^*, \quad \mathbf{D}_{\perp} = \varepsilon_0 \mathbf{E}_{\perp} + \frac{\mathbf{P}_{\perp}^* + \mathbf{u} \times \mathbf{M}^*/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad (4.58)$$

であることが導かれる。磁場 \mathbf{H} についても同様の数式変形をすると,

$$\mathbf{H}_{\parallel} = \frac{\mathbf{B}_{\parallel}}{\mu_0} - \mathbf{M}_{\parallel}^*, \quad \mathbf{H}_{\perp} = \frac{\mathbf{B}_{\perp}}{\mu_0} + \frac{\mathbf{M}_{\perp}^* - \mathbf{u} \times \mathbf{M}^*}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad (4.59)$$

が得られる。これらの結果を見ると, 速度 \mathbf{u} に対する平行成分と垂直成分はともに, 右辺第2項が K 系から見た分極ベクトル, 磁化ベクトルであると考えられる。よって, これらの式を単純に

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}, \quad (4.60)$$

のように書き換えても構わない。この関係式は(4.55)と同じ形であり、しかも、速度ベクトル \mathbf{u} の任意性から、どの慣性系から見ても、(4.60) が成り立つことがわかる。さらに、結果の予想はつくだろうが、(4.60) を (4.15) と (4.16) に代入すれば、K 系に対して x 軸方向に速度 v で運動する K' 系から見た分極ベクトルと磁化ベクトル:

$$\mathbf{P}'_{\parallel} = \mathbf{P}_{\parallel}, \quad \mathbf{P}'_{\perp} = \frac{\mathbf{P}_{\perp} - \mathbf{v} \times \mathbf{M}/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (4.61)$$

$$\mathbf{M}'_{\parallel} = \mathbf{M}_{\parallel}, \quad \mathbf{M}'_{\perp} = \frac{\mathbf{M}_{\perp} + \mathbf{v} \times \mathbf{P}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (4.62)$$

を得ることができる。この関係は、(4.59) と (4.59) の右辺第 2 項に現れる分極ベクトルと磁化ベクトルとも矛盾しない変換式になっている。

4.8 電磁放射

荷電粒子が印加される交流電場などによって加速度運動すると、荷電粒子は電磁波を周囲に放射し、エネルギーを失うことが電磁気学によってわかっている。放射される電磁波こそが光である。本節では、電磁波の放射に関わる物理現象を調べる。

4.8.1 荷電粒子のエネルギー損失

加速する荷電粒子は、電磁波の形で電磁エネルギーを放射する。その放射によって、荷電粒子はエネルギーを失う。単位時間あたりにどれくらいのエネルギーを失うのか、本項で考察してみよう。

電磁場のエネルギーの収支は、電荷と電流の関係と同様に、流れの方程式で記述できる。真空中では、電磁場のエネルギーに関する流れの方程式は、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0,$$

なる方程式で記述できる。ここで、 u は電磁エネルギー密度、 \mathbf{S} はポインティングベクトルであり、

$$u = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 |\mathbf{E}|^2 + \frac{|\mathbf{B}|^2}{\mu_0} \right), \quad \mathbf{S} = \mathbf{E} \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0},$$

のように定義される。流れの方程式を積分形式に書き換えると、

$$-\frac{dW}{dt} = \int \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (4.63)$$

なる形で記述できる。ここで、右辺の積分域は荷電粒子を中心とする半径が無限大の球面であり、 W は球の内部に含まれるエネルギー (u を球の内部でタイ積分した量) である。左辺は単位時間あたりの W の減少率である。言い換えると、左辺は単位時間あたりに荷電粒子が失うエネルギーである。一方、右辺に含まれる \mathbf{n} は積分域である球面の法線ベクトルである。そのベクトルは同時に電磁波の伝搬方向であると考えてもよい。

放射電場と放射磁束密度は、非相対論近似で、

$$\mathbf{E}_{\text{rad}} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta})}{R}, \quad \mathbf{B}_{\text{rad}} = \frac{e\mu_0}{4\pi} \mathbf{n} \times \frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta})}{R},$$

である。放射場の振幅は、放射源からの距離に反比例するのだ。ポインティングベクトルは、

$$\mathbf{S} = \frac{|\mathbf{E}_{\text{rad}}|}{c\mu_0} \mathbf{n} = \frac{e^2}{16\pi^2\epsilon_0 c} \frac{|\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})|^2}{R^2} \mathbf{n},$$

のように計算される。ポインティングベクトルをエネルギーの放射率 (4.63) に代入して具体的に計算しよう。ただし、積分範囲は半径 R の球面とするので、水平角 φ と天頂角 θ を積分変数として用いる。座標の設定としては、図 4.8 に示すように、加速度 $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ が z 軸になるように設定している。速度 $\boldsymbol{\beta}$ の方向については特に気にしなくてよい⁵。このとき、

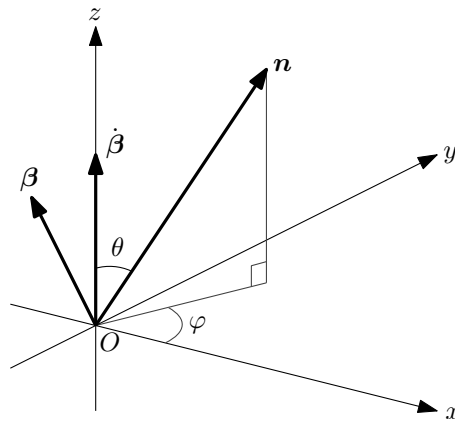


図 4.8: 放射電磁場のベクトルの関係

電磁波の放射方向として、水平角 φ と天頂角 θ を設定する。すると、球面上の微小面積が $dS = R^2 d\theta d\varphi$ となるので、

$$\begin{aligned} -\frac{dW}{dt} &= \frac{e^2}{16\pi^2\epsilon_0 c} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi |\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})|^2 \sin\theta d\theta \\ &= \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 c} \int_0^\pi |(\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) \mathbf{n} - \dot{\boldsymbol{\beta}}|^2 \sin\theta d\theta \end{aligned}$$

⁵この時点で相対論的效果を考慮する場合、被積分関数に速度ベクトル $\boldsymbol{\beta}$ が含まれるので、 $\boldsymbol{\beta}$ の方向を気にしなければならない。

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 c} \int_0^\pi |\dot{\beta} \cos \theta \cdot \mathbf{n} - \dot{\beta}|^2 \sin \theta \, d\theta \\
&= \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 c} \int_0^\pi \dot{\beta}^2 (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta \, d\theta \\
&= \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 c} \int_{-1}^1 \dot{\beta}^2 (1 - \cos^2 \theta) \, d \cos \theta = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c} \dot{\beta}^2,
\end{aligned}$$

のように数式変形できる。第2行目への数式変形には、 φ についての積分を実行し、さらに、ベクトル公式:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{C},$$

を利用した。第3行目への数式変形では、 $\dot{\beta}$ と \mathbf{n} が θ の角度をなすことを利用した。得られた数式は、

$$-\frac{dW}{dt} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \dot{u}^2, \quad (4.64)$$

と書き換えることができる。この数式は、加速度運動する荷電粒子が単位時間に放射する電磁エネルギーの非相対論近似である。この数式は単位時間に放射されるエネルギーであるので、この量は無線工学の分野で放射電力と呼ばれる。無線機から放射される電磁波のエネルギーは(4.64)にしたがうのだ。放射される電磁波は交流電磁場である。交流電磁場をつくるには、荷電粒子の往復運動が必要になる。往復運動するということは、荷電粒子に加速度が生じているため、電磁放射をするのである。

素粒子物理学の検証に用いる粒子加速器では、電子や陽子がほぼ光速まで加速され、加速器内を周回するため、その加速度で強烈な電磁放射が発生する。粒子加速器で発生する電磁放射は相対論的効果を見捨てることはできない。上で導出した(4.64)を相対論的な数式に書き換えよう。書き換えるには、加速度の自乗 $\dot{\beta}^2$ を相対論的な量に書き換えればよい。第3.2節で導出した加速度の変換公式をベクトル形式に書き直すと、

$$\begin{aligned}
\dot{\beta}'_{u//} &= \frac{(1 - \beta^2)^{3/2}}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta}_u)^3} \dot{\beta}_{u//}, \\
\dot{\beta}'_{u\perp} &= \frac{1 - \beta^2}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta}_u)^3} \left[(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta}_u) \dot{\beta}_{u\perp} + (\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}_u) \boldsymbol{\beta}_{u\perp} \right],
\end{aligned}$$

が得られる。この数式では、速度も加速度も光速 c で正規化している。この数式は、二つの慣性系 K と K' の間の加速度変換であり、 K 系に対して K' 系が正規化速度 $\boldsymbol{\beta}$ で運動している。 K 系と K' 系から見た荷電粒子の正規化速度が $\boldsymbol{\beta}_u$ と $\boldsymbol{\beta}'_u$ 、正規化加速度が $\dot{\boldsymbol{\beta}}_u$ と $\dot{\boldsymbol{\beta}}'_u$ である。また、添え字 $//$ と \perp は、それぞれ、正規化速度 $\boldsymbol{\beta}$ に平行な成分と垂直な成分を表す。

電磁放射エネルギーの数式(4.64)に相対論効果を入れるには次のように考える。 K' 系はある時点で(おそらく一瞬だけ)荷電粒子と並走している。その時点の短い期間で、 K' から見ると荷電粒子の速度はゼロか非常に小さいので非相対論近似が成立する。つまり、電

磁波の放射電力が,

$$P'_{\text{rad}} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c} \dot{\beta}'^2,$$

となるのである。この量をK系の変数で書き換えるのである。荷電粒子がK'と並走していることから、 $\beta_u = \beta$ である。当然ながら、 $\beta_{u\perp} = 0$ であることにも注意しておこう。すると、加速度の変換公式は,

$$\dot{\beta}'_{u\parallel} = \frac{\dot{\beta}_{\parallel}}{(1-\beta^2)^{3/2}}, \quad \dot{\beta}'_{u\perp} = \frac{\dot{\beta}_{\perp}}{1-\beta^2},$$

となるはずである。この変換公式を用いて正規化加速度の自乗を計算すると,

$$\dot{\beta}'^2 = \frac{\dot{\beta}_{\parallel}^2}{(1-\beta^2)^3} + \frac{\dot{\beta}_{\perp}^2}{(1-\beta^2)^2} = \frac{\dot{\beta}^2 - \beta^2 \dot{\beta}_{\perp}^2}{(1-\beta^2)^3} = \frac{\dot{\beta}^2 - |\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}}|^2}{(1-\beta^2)^3},$$

が得られる。右辺を得るためには、二つのベクトルの外積の大きさがベクトルによって貼られる平行四辺形の面積と等しいことを利用した(図4.9)。したがって、相対論的效果を

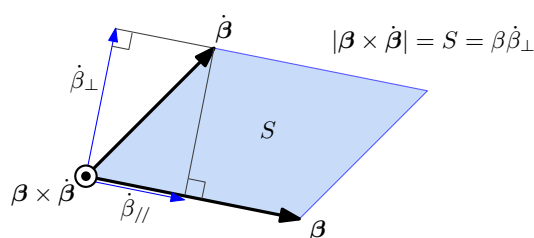


図 4.9: 外積ベクトルの大きさ

考慮した電磁波の放射電力は,

$$P_{\text{rad}} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c} \frac{\dot{\beta}^2 - |\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}}|^2}{(1-\beta^2)^3}, \quad (4.65)$$

なる数式で表現できる。実は、電磁気学に特殊相対性理論の効果が対応しているので、電磁気学から導かれる放射電磁場の数式から近似を用いずに厳密に計算すると同一の数式が得られる。しかし、直接的に計算すると、同じ結果を得るにしても本書の何倍もの計算労力を要する。計算労力の面から、相対性理論の効果を実感することができるという例であった。

サイクロトロン放射 ここでサイクロトロン放射について述べておこう。サイクロトロン放射とは、円運動する荷電粒子による電磁波の放射である。円運動をすれには、向心力による加速度が必要であるので、その加速度によって電磁放射が起きるのである。ここでは、

荷電粒子が等速円運動をしていると仮定しよう。その場合、速度ベクトル β と加速度ベクトル $\dot{\beta}$ は必ず直交するので、

$$P_{\text{rad}} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c} \frac{\dot{\beta}^2}{(1 - \beta^2)^2}, \quad (4.66)$$

となる。さらに円運動の回転半径を r とすると、 $\dot{\beta} = c\beta^2/r$ であるので、サイクロトロン放射によって荷電粒子が単位時間あたりに失うエネルギーは、

$$P_{\text{rad}} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0} \frac{c\beta^4}{r^2(1 - \beta^2)^2},$$

となる。特に、荷電粒子の周回速度が光速に近い場合、この現象はサイクロトロン放射と区別し、シンクロトロン放射と呼ばれる。シンクロトロン放射は、素粒子物理学の実験設備である粒子加速器で発生する。先ほど導出した式によって半径が小さいほど荷電粒子が失うエネルギーが大きくなるので、それを避けるため、高エネルギーの粒子加速器は大きな敷地⁶を要する。

古典論による水素原子の寿命 正の電荷をもった原子核の周りを負の電荷をもった電子が運動する原子モデルは、量子力学によって安定性が保証されている。量子力学が提唱される前、周回運動する電子は電磁波を放射することによってエネルギーを失い、原子核に向かって落下すると考えられていた。つまり、すぐに原子が崩壊してしまうので電子が原子核を周回するモデルは受け入れられなかったのである。ここでは、量子力学を無視し、水素原子が崩壊するまでの時間を計算してみよう。

水素原子の中心には電荷 e の原子核が存在し、その周りを電荷 $-e$ をもつ電子が周回している。電子の質量を m 、速度を v 、電子と原子核の距離を r としよう。電子の速度が光速に比べて無視できる程度とすると、電子のエネルギーは

$$E = \frac{2}{m}v^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r},$$

となる。この式の第1項が運動エネルギー、第2項がポテンシャルエネルギーである。また、原子核と電子の間に作用するクーロン力が、電子を円運動させるための向心力となっているとすると、

$$m\dot{v} = \frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

となる。この関係式から v を消去すると、電子のエネルギーは

$$E = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}, \quad (4.67)$$

⁶欧州原子核研究機構 (Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire; CERN) の世界最大の円形粒子加速器 (large hadron collider; LHC) は、全周 27 km の規模である。

のように変形される。ところが、電子が周回運動をするとこのエネルギーは電磁放射によって失われていく。非相対論近似で、単位時間に電子が失うエネルギーは

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \dot{v}^2 = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left(\frac{e^4}{4\pi\epsilon_0 m r^2} \right)^2, \quad (4.68)$$

である。電子がエネルギーを失うと、電子は徐々に原子核に向かって落下していくはずである。初期状態で r_0 の距離にあった電子が原子核に衝突するまでの時間 T を算出しよう。時間 T は

$$T = \int_{r=r_0}^{r=0} dt = \int_{r_0}^0 \frac{dt}{dr} dr, \quad (4.69)$$

のように計算できる。この計算に必要な dr/dt はエネルギー (4.67) を r について微分し、その結果を (4.68) と比較すれば得られる。結果を書くと、

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{4}{3} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{1}{m^2 c^3 r^2},$$

となる。これを (4.69) に代入すると、

$$T = -\int_{r_0}^0 \frac{3}{4} \left(\frac{4\pi\epsilon_0}{e^2} \right)^2 m^2 c^3 r^2 dr = \frac{1}{4} \left(\frac{4\pi\epsilon_0}{e^2} \right)^2 m^2 c^3 r_0^3,$$

となる。初期状態での原子核までの距離 r_0 として、ボーア半径:

$$r_0 \equiv \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{e^2 m} \approx 0.529 \times 10^{-10} \text{ m},$$

を設定し、さらに、数式を簡略化するために、微細構造定数:

$$\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \approx \frac{1}{137}$$

を用いて T を書くと、

$$T = \frac{\hbar}{4mc^2\alpha^5},$$

となる。この時間を具体的に計算すると 1.56×10^{-11} 秒という非常に短い時間になる。つまり、量子力学が提唱される前、このように原子が一瞬のうちに崩壊するため、原子核を電子が周回するモデルは支持されなかったのである。

4.8.2 電磁放射の反作用

これまで学んだように、加速する荷電粒子は電磁波を放射するため、エネルギーを失う。エネルギーを失うことは運動エネルギーが失うことであるので、荷電粒子は減速するので

ある。端的に言うと、加速する荷電粒子は放射によって減速する力の作用を受けるのである。その減速のための力の作用は電磁放射の反作用と呼ばれる。

前項で導出したエネルギー損失を評価して、電磁放射する荷電粒子に生じる力を特定しよう。時刻 t_0 から t_1 にかけて、荷電粒子の運動エネルギーが $E_k(t_0)$ から $E_k(t_1)$ に変化したとする。この運動エネルギーの変化が電磁放射に起因するのであれば、

$$E_k(t_1) - E_k(t_0) = - \int_{t_0}^{t_1} \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \dot{v}^2 dt,$$

が成立する。ただし、荷電粒子の速度が光速に比べ十分低速であるとし、この運動エネルギーの変化は非相対論近似で記述している。前項で導出したように、 $e^2/6\pi\epsilon_0 c^3$ が単位時間に減少するエネルギーなので、それを時間積分すれば運動エネルギーの変化がわかるということだ。ここで、 $\dot{v}^2 = \dot{\mathbf{v}} \cdot \dot{\mathbf{v}}$ であることに注意すると、運動エネルギーの変化が

$$E_k(t_1) - E_k(t_0) = - \left[\frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} \right]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \ddot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} dt,$$

のように計算できる。この計算に関して、右辺の第1項は時刻 t_0 と t_1 の物理量に依存する定数である。一方、荷電粒子に力 \mathbf{K} が作用しているならば、単位時間あたりの運動エネルギーの増加量が $\mathbf{K} \cdot \mathbf{v}$ となるので、荷電粒子には、

$$\mathbf{K}_{\text{dec}} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \ddot{\mathbf{v}}, \quad (4.70)$$

なる力が作用している。これが電磁放射による反作用力だ。この数式によると、電磁放射の反作用は荷電粒子の加速度の増加方向に作用する。荷電粒子が振動運動をしているならば、反作用力は荷電粒子に減速させる力となる。その事実は、速度 \mathbf{v} が単位ベクトル \mathbf{e} の方向に振動している場合:

$$\mathbf{v}(t) = v_0 \mathbf{e} \cos \omega t,$$

である場合を考えればよい。ここで、単位ベクトル \mathbf{e} は定ベクトルとする。このとき、

$$\ddot{\mathbf{v}}(t) = -v_0 \omega^2 \mathbf{e} \cos \omega t,$$

となるので、電磁放射の反作用は速度ベクトルと逆方向に作用していることになる。すなわち、荷電粒子を減速させる力として作用しているのだ。一方、荷電粒子が円運動を描いている場合も、同様の考察によって放射の反作用が荷電粒子を減速させる力として作用することがわかる。方程式 (4.70) は、速度が小さい場合の電磁放射の反作用力である。それに対して、相対論的効果が現れるような大きな速度での反作用力を次の段落で考察する。

導出した (4.70) は速度が小さい場合の近似式であるので、光速と比較できる程度の速度にも対応できるように (4.70) を拡張してみよう。つまり、電磁放射の反作用を相対論に対

応させようということだ。そのために、次のように考えてみる。対象とする荷電粒子は、静止系 (K 系) からみて x 軸方向に速度 v で運動している。もう一つの慣性系 K' 系を考える。 K' 系は K 系に対して x 軸方向に速度 v で運動している。ある時点において、荷電粒子は K' 系からみると静止している。同時に、K 系からみると荷電粒子は x 軸方向に速度 v で運動している。荷電粒子の加速度は xy 平面上となるように座標軸が選ばれている。このような設定において、 K' 系からみると、荷電粒子に作用する放射の反作用は非相対論近似が成り立つので、 K' 系からみた放射の反作用を \mathbf{K}' とおくと、

$$\mathbf{K}' = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \dot{\mathbf{u}}',$$

が成り立つ。ここで、 \mathbf{u}' は K' 系からみた荷電粒子の速度とする。同様に、K 系からみた荷電粒子の速度を \mathbf{u} とおくと、上記の条件設定より、 $\mathbf{u} = \mathbf{v}$, $\mathbf{u}' = 0$ である。K 系からみた放射の反作用は、速度成分と平行成分と垂直成分に分離すると力のローレンツ変換より、

$$\mathbf{K}_{\parallel} = \mathbf{K}'_{\parallel}, \quad \mathbf{K}_{\perp} = \sqrt{1 - \beta^2} \mathbf{K}'_{\perp},$$

となる。K 系からみた放射の反作用を計算するには、加速度の時間微分 $\dot{\mathbf{u}}'$ をローレンツ変換し、 \mathbf{K}'_{\parallel} と \mathbf{K}'_{\perp} を K 系からみた物理量で記述する。その後、力のローレンツ変換によって K 系からみた力に変換する。

加速度の時間微分の変換を導出するため、加速度のローレンツ変換を書いておこう。加速度のローレンツ変換は、座標のローレンツ変換を時間について 2 階微分すれば得られる。そのうち、 x 軸と y 軸方向の成分について結果を書くと、

$$\begin{aligned} \dot{u}'_x &= \frac{(1 - \beta^2)^{3/2}}{(1 - vu_x/c^2)^3} \dot{u}_x, \\ \dot{u}'_y &= \frac{(1 - \beta^2)^{3/2}}{(1 - vu_x/c^2)^3} \left[\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right) \dot{u}_y + \frac{v\dot{u}_x}{c^2} u_y \right], \end{aligned}$$

である。また、座標のローレンツ変換から、時間微分を与える演算子は、

$$\frac{d}{dt'} = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - vu_x/c^2} \frac{d}{dt},$$

のように変換される。この規則性を利用して加速度のローレンツ変換を時間について微分すると、

$$\begin{aligned} \ddot{u}'_x &= \frac{(1 - \beta^2)^2}{(1 - vu_x/c^2)^5} \left[\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right) \ddot{u}_x + \frac{3v(\dot{u}_x)^2}{c^2} \right], \\ \ddot{u}'_y &= \frac{(1 - \beta^2)^{1/2}}{(1 - vu_x/c^2)^3} \left[\frac{3v\dot{u}_x}{c^2} \dot{u}_y - \frac{3v^2\dot{u}_x^2}{c^4(1 - \beta^2)} u_y + (1 - \beta^2) \ddot{u}_y + \frac{v\ddot{u}_x}{c^2} u_y \right], \end{aligned}$$

が得られる。ここで、速度ベクトルに関する設定条件 $\mathbf{u} = \mathbf{v}$, $\mathbf{u}' = 0$ を代入し、加速度の時間微分を、速度に対して平行成分と垂直成分としてベクトル表記すると、

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{v}}'_{\parallel} &= \frac{(\ddot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v})}{v^2(1-\beta^2)^2} \mathbf{v} + \frac{3(\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v})^2}{c^2 v^2 (1-\beta^2)^3} \mathbf{v}, \\ \ddot{\mathbf{v}}'_{\perp} &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left[\frac{\ddot{\mathbf{v}}}{1-\beta^2} + \frac{3(\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v})}{c^2(1-\beta^2)^2} \dot{\mathbf{v}} - \frac{3(\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v})^2}{c^2 v^2 (1-\beta^2)^2} \mathbf{v} - \frac{3(\ddot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v})}{v^2(1-\beta^2)} \mathbf{v} \right],\end{aligned}$$

のようになる。ここで、 K' 系からみた放射の反作用が、

$$\mathbf{K}'_{\parallel} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \ddot{\mathbf{u}}'_{\parallel}, \quad \mathbf{K}'_{\perp} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \ddot{\mathbf{u}}'_{\perp},$$

であることに注意し、力のローレンツ変換によって K 系からみた放射の反作用が、

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{\parallel} + \mathbf{K}_{\perp} = \mathbf{K}'_{\parallel} + \sqrt{1-\beta^2} \mathbf{K}'_{\perp},$$

によって計算できるので、

$$\mathbf{K} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3 (1-\beta^2)} \left\{ \ddot{\mathbf{v}} + \frac{3(\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}) \dot{\mathbf{v}}}{c^2(1-\beta^2)} + \frac{\mathbf{v}}{c^2(1-\beta^2)} \left[(\mathbf{v} \cdot \ddot{\mathbf{v}}) + \frac{3(\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}})^2}{c^2(1-\beta^2)} \right] \right\}, \quad (4.71)$$

が得られる。この数式は、光速 c で正規化した速度、加速度、その導関数で記述することもできる。正規化した量を用いると、

$$\mathbf{K} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^2 (1-\beta^2)} \left\{ \ddot{\boldsymbol{\beta}} + \frac{3(\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) \dot{\boldsymbol{\beta}}}{(1-\beta^2)} + \frac{\boldsymbol{\beta}}{1-\beta^2} \left[(\boldsymbol{\beta} \cdot \ddot{\boldsymbol{\beta}}) + \frac{3(\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})^2}{1-\beta^2} \right] \right\}, \quad (4.72)$$

と数式に現れる係数が少しだけ簡素になる。得られた数式 (4.71) と (4.72) が、相対論的な放射の反作用である。この数式は、相対性理論前の電磁気学からも導出することができるが、これよりも大きな計算労力が必要だろう。

等加速度運動 非相対論近似が成立する場合、(4.70) によると、等加速度運動する荷電粒子には電磁放射の反作用が発生しない。言い換えると、等加速度運動する荷電粒子は電磁放射をしない。ところが、荷電粒子の速度が大きくなると相対論が必要になり、電磁放射の反作用は、(4.72) のように形を変える。この場合でも、等加速度運動する荷電粒子に電磁放射の反作用が発生しないことを示そう。

加速度が常に一直線上を向いている荷電粒子を考えよう。そのような荷電粒子を観測するとき、慣性系を選べば $\boldsymbol{\beta}$, $\dot{\boldsymbol{\beta}}$, $\ddot{\boldsymbol{\beta}}$ を同一直線上にとることができる。そのような慣性系で議論することにし、(4.72) のベクトルを成分表示すると、

$$K_x = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^2 (1-\beta^2)} \left[\ddot{\beta} + \frac{3\beta\dot{\beta}^2}{(1-\beta^2)} + \frac{\beta}{1-\beta^2} \left(\beta\ddot{\beta} + \frac{3\beta^2\dot{\beta}^2}{1-\beta^2} \right) \right],$$

が得られる。ここで、加速度が x 軸方向であるとした。この数式は、さらに簡略化することができ、

$$K_x = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^2 (1 - \beta^2)^2} \left(\ddot{\beta} + \frac{3\beta\dot{\beta}^2}{1 - \beta^2} \right), \quad (4.73)$$

なる形で記述できる。このような簡略化は、加速度が常に一直線上を向いている条件において可能である。任意の加速度に対してこの簡略が成立しないことを改めて注意しておく。得られた方程式に、相対性理論における等加速度運動、すなわち、双曲線運動の数式:

$$\beta = \frac{\alpha t}{\sqrt{1 + \alpha^2 t^2}},$$

を代入してみよう。この数式は、前章での考察によって得られた相対論的な等加速度運動の速度 (3.5) である。なお、数式を簡略化するため $t_0 = 0$ とし、 $\alpha \equiv a/c$ なる記号を用いている。この数式から、計算に必要な要素として、

$$1 - \beta^2 = \frac{1}{1 + \alpha^2 t^2}, \quad \dot{\beta} = \frac{\alpha}{(1 + \alpha^2 t^2)^{3/2}}, \quad \ddot{\beta} = -\frac{3\alpha^2 t}{(1 + \alpha^2 t^2)^{5/2}},$$

が得られる。これらを組み合わせると、

$$K_x = 0,$$

が導かれる。したがって、相対性理論においても等加速度運動、正確に言うと、双曲線運動をする荷電粒子は電磁放射をしない。

第5章 共変形式

5.1 数学的準備

本節では、相対性理論を簡潔に記述するための手法としてリーマン幾何学の記法を紹介する。リーマン幾何学は一般相対性理論を記述するためにアインシュタインによって採用されたが、座標変換に関する物理量を記述する上では特殊相対性理論であっても非常に有用な数学的な道具である。

5.1.1 座標と座標変換

座標系 K における座標を x^μ と書き、それを K' 系に座標変換して得られる座標を x'^μ と書く。ここで、右上に付した文字 μ はベクトルの添え字である。リーマン幾何学では、座標については右上に添え字を書くことになっている。 K 系から K' 系への座標変換が $x'^\mu \equiv x'^\mu(x^0, x^1, \dots, x^{N-1})$ のような関数で与えられているとする。ここで、 N は想定している空間の次元を表す。相対性理論では $N = 4$ である。この変換式を微分すると、

$$dx'^\mu = \sum_{\nu=0}^{N-1} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu, \quad (5.1)$$

となることは解析学の公式から明らかである。ところで、リーマン幾何学ではこのような総和を用いた数式が頻繁に登場する。そのような数式では、(5.1) で使用される ν のようにペアになっている添え字について総和をとることが常である。つまり、ペアになっている添え字について和をとるという約束をしていけば、総和記号 Σ を省略して書いたとしても不都合は生じない。よって、リーマン幾何学では (5.1) を

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu, \quad (5.2)$$

のように記述する。この省略記法はアインシュタインの総和の規約と呼ばれる。名前のとおり、この怠惰な記法はアインシュタインが一般相対性理論のために提案した方法で、便利さゆえに使われ続けている。正確に言うと、総和をとるための添え字はどのような組み合わせでもよいわけではない。一方の添え字が共変成分であれば、対となるもう一方は反

変成分でなければならないという制限がある。共変成分, 反変成分という言葉については後に説明するので今のところは特に気にしないでもよいだろう。

K系から K'系への座標変換がローレンツ変換ならば, 座標の完全微分 (5.2) に見られる係数 $\partial x'^{\mu}/\partial x^{\nu}$ をヤコビアン行列の第 μ 行目, 第 ν 列目の成分とすると, そのヤコビアン行列は,

$$\begin{bmatrix} \partial x'^{\mu} \\ \partial x^{\nu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

のようにローレンツ変換の展開係数を表す行列となる。これに対して,

$$\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\nu}} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\nu}} = \delta^{\mu}_{\nu},$$

であることから, 逆変換を表す $\partial x^{\mu}/\partial x'^{\alpha}$ は, $\partial x'^{\alpha}/\partial x^{\nu}$ の逆行列であることがわかる。このようなローレンツ変換の展開係数とヤコビアン行列の関係は, 物理量の変換を考える際に役に立つ。

5.1.2 スカラとベクトル

スカラとベクトルはリーマン幾何学で導入された概念ではないが, リーマン幾何学は座標変換に対する性質として, スカラとベクトルを論理的に分類している。スカラは座標変換に対して不変な値であり, ベクトルは座標変換に伴って変換される量である。さらにその変換の性質により, ベクトルは共変ベクトルと反変ベクトルに分類される。

既に述べたように, **スカラ**とは座標変換に対して不変となる量である。特殊相対性理論においては, ローレンツ変換に対して不変となる質量や電荷がスカラである。数式で表現するならば, ある座標系で定義されたスカラを ϕ とし, 別の座標系において ϕ に対応する量を ϕ' とすれば,

$$\phi' = \phi, \tag{5.3}$$

となる。電磁気では, ベクトルポテンシャルに対して静電ポテンシャルのことをスカラポテンシャルと呼ぶことがある。しかし, 静電ポテンシャルがローレンツ変換に対して (5.3) の関係が成り立たないため, 本書では静電ポテンシャルをスカラポテンシャルとは呼ばない。

任意のスカラ ϕ を座標 x^{μ} で偏微分することによって定義されるベクトル $\partial\phi/\partial x^{\mu}$, いわゆる勾配ベクトルは, 解析学の公式より,

$$\frac{\partial\phi}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial\phi}{\partial x^{\nu}},$$

という性質がある。これと同じ性質をもつベクトルを**共変ベクトル**という。共変ベクトルは、 u_μ のように添え字を右下に書く習慣になっている。座標変換に関する性質を改めて書くと、共変ベクトル u_μ は、

$$u'_\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} u_\nu, \quad (5.4)$$

なる関係を満足する。つまり、ローレンツ変換に対して、共変ベクトルは座標変換の逆変換にしたがう。また、容易に示せるが、勾配ベクトルのほかに、共変ベクトルをスカラで微分したベクトルも共変ベクトルである。

前項でも書いたように、微小な座標変化 dx^μ は、座標変換に対して、

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu,$$

のように変換される。これと同じ性質をもつベクトルを**反変ベクトル**という。共変ベクトルは、 v_μ のように添え字を右上に書く習慣になっている。座標変換に関する性質を改めて書くと、反変ベクトル v^μ は、

$$v'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} v^\nu, \quad (5.5)$$

なる関係を満足する。つまり、ローレンツ変換に対して、反変ベクトルは座標変換と同一の変換にしたがう。また、容易に示せるが、反変ベクトルをスカラで微分したベクトルも反変ベクトルである。

5.1.3 2階テンソル

共変ベクトル、または、反変ベクトルのダイアド積をとることによって添え字を2つもつ量 $T_{\mu\nu} \equiv u_\mu v_\nu$, $T^{\mu\nu} \equiv u^\mu v^\nu$, $T_\mu{}^\nu \equiv u_\mu v^\nu$ などを定義できる。添え字がともに下にある量を共変テンソル、添え字がともに上にある量を反変テンソル、添え字が上と下にある量を混合テンソルという。ベクトルと同様、座標変換に対して、共変な成分は逆変換にしたがい、反変な成分は座標変換と同一変換にしたがう。その性質を数式で表現するならば、

$$\begin{aligned} T'_{\mu\nu} &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} T_{\alpha\beta}, \\ T'^{\mu\nu} &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} T^{\alpha\beta}, \\ T'^\mu{}_\nu &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} T^\alpha{}_\beta, \end{aligned}$$

となる。同様にダイアド積を重ねてさらに高階のテンソルを定義することもできるが、特殊相対性理論で登場するのは2階のテンソルまでである。

逆に、高階のテンソルの階数を下げる操作を縮約という。例えば、2階の共変テンソル $T_{\mu\nu}$ に反変ベクトル u^μ を掛けて、添え字 μ について縮約をとると、

$$T_{\mu\nu}u^\mu \equiv v_\nu,$$

のような共変ベクトルが得られる。容易に予想できるように、ベクトルに対して縮約をとった値 $u_\mu v^\mu$ はスカラ量になる。このスカラ量は、次項で紹介するベクトルの内積である。

5.1.4 計量テンソル

座標 x^μ の微小変化によって得られるベクトル dx^μ の長さ ds は線素と呼ばれる。三次元のユークリッド空間であれば、線素は $ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$ のように三平方の定理で表される。まぎらわしい記法だが、括弧の外の右肩の数値は自乗を意味する。一般的には、各項に1以外の係数を伴い、 $dx^1 dx^2$ のように異なる成分の混合項を伴うこともある。そのような一般形式は、

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu,$$

のような2次形式で表現できる。この2次形式の係数を与える行列 $g_{\mu\nu}$ を計量テンソルという。この2次形式において、 dx^μ と dx^μ の順序を交換しても ds^2 が変化しないので、 $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ である。つまり、計量テンソルは対称テンソルである。計量テンソルの具体例として、カルテシアン座標系では $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ となる。また、2本の座標軸が角度 θ で交わるような2次元の斜交座標系では $g_{00} = g_{11} = 1$, $g_{01} = g_{10} = \cos\theta$ となる。係数行列 $g_{\mu\nu}$ は計量テンソルと呼ばれるように、テンソル性をもつので、座標変換に対して、

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta},$$

のような変換にしたがう。このテンソル性は ds^2 がスカラであることから容易に証明できる。さらに、計量テンソルの添え字を上にした記号 $g^{\mu\nu}$ は、計量テンソル $g_{\mu\nu}$ の逆行列を表す。

計量テンソルはその座標系における長さの尺度を定義する量であり、その尺度を用いてベクトルの内積を定義することができる。二つの反変ベクトル u^μ と v^μ の内積は $g_{\mu\nu}u^\mu v^\nu$ によって与えられる。つまり、線素の自乗 ds^2 は位置ベクトルの微小変化 dx^μ の自分自身との内積である。

計量テンソルには、ベクトルやテンソルの共変性と反変性を交換するはたらきがある。例えば、反変ベクトル u^μ に $g_{\mu\nu}$ を掛けて μ について縮約をとれば、 $u^\mu g_{\mu\nu} = u_\nu$ のように共変ベクトルに変換できる。逆に、共変ベクトル v_μ に $g^{\mu\nu}$ を掛けて μ について縮約をとると、 $v_\mu g^{\mu\nu} = v^\nu$ のように反変ベクトルに変換できる。このことから、 u^μ と v^μ の内積は $u^\mu v_\mu (= u_\mu v^\mu)$ と書くこともできる。

計量テンソル $g_{\mu\nu}$ と座標についての2階偏微分演算子には下に記述する定理が成り立つ。

定理 1 ある座標系に関する計量が $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ で与えられているとする。座標 x^μ を座標変換によって x'^μ に変換したとき、計量テンソル $g_{\mu\nu}$ が不変であれば、

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = g'^{\mu\nu} \frac{\partial^2}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu},$$

が成り立つ。

これを証明するには、左辺を座標変換すればよい。

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} \frac{\partial^2}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} &= g^{\mu\nu} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \right) \\ &= g^{\mu\nu} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \left(\frac{\partial \delta_\alpha^\beta}{\partial x'^\nu} + \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \frac{\partial^2}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta} \right) \\ &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g^{\mu\nu} \frac{\partial^2}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta} = g'^{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta}. \end{aligned}$$

座標変換後も軽量テンソルが一定であるので、 $g_{\mu\nu} = g'_{\mu\nu}$ が成立する。したがって、上の式が証明された。この定理は、平行移動や座標回転を適用しても、ラプラスの微分方程式が不変であることに直結している。また、次節で説明するミンコフスキー計量にも関係する定理である。

5.2 ミンコフスキー計量

Galilei 変換に対して不変となる空間はラプラス演算子が不変であることが条件となる。これに対し、ローレンツ変換に対して不変となる空間 (時空) は、マクスウェルの方程式に関する不変性を調べたときに明らかになったように、

$$\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

なる演算子が不変であることが条件となる。この演算子は、ダランベルシアンと呼ばれているので、特殊相対性理論では、ローレンツ変換に対してダランベルシアンが不変であることが条件となる。この条件は、

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2, \quad (5.6)$$

が不変であることと等価である。この式がリーマン幾何学における線素の2次形式になっているので、時刻 t も位置を表す座標と同じ扱いをすることにする。そのため、 ct が長さ

と同じ次元をもつことを利用すれば、 $[x^0, x^1, x^2, x^3] \equiv [ct, x, y, z]$ のように座標を対応づければよい。すると、ローレンツ変換に対して不変となる空間の計量 $\eta_{\mu\nu}$ は、

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

となる。この計量 $\eta_{\mu\nu}$ をミンコフスキー計量と呼び、この計量で長さが定義される空間をミンコフスキー空間と呼ぶ。つまり、特殊相対性理論は、ユークリッド空間の代わりに時間を座標として加えたミンコフスキー空間を取り扱う物理学である。既に述べたように、ミンコフスキー空間の微小距離を表す線素 ds はスカラーであるが、相対性理論では $d\tau^2 = -ds^2$ を満たすパラメータ τ を使用することが多い。ここで、微小パラメータ $d\tau$ を、

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right]} dt, \quad (5.7)$$

のように書き換えれば、その物理的な意味が見えてくるだろう。状況としては、ある特定の質点 P を観測している場合を考えればよい。その場合、 $[x, y, z]$ は 3次元空間における質点 P の位置ベクトルで、 t は時刻である。質点 P の速度を u とすれば、(5.7) は $d\tau = \sqrt{1 - u^2/c^2} dt$ のように書き換えられる。この関係式は、速度 u で運動する慣性系における時計の遅れを表す式である。よって、 $d\tau$ は質点 P と併走する時計による時間の尺度を表すと考えられるので、 τ は質点 P における時刻を表すパラメータである。そのため、 τ は固有時間と呼ばれる。

5.3 4元速度と運動量

ニュートン力学とは異なり、相対性理論では慣性系によって長さや時間の尺度が異なる。前節で学んだように、特殊相対性理論で扱う空間はミンコフスキー空間であるため、時刻 t は座標 $[x, y, z]$ と同じように扱われ、もはや、全宇宙で共通のスカラーパラメータではなくなった。そのため、速度を dx/dt のように、 t についての導関数として表現すると扱いづらい。

これに関して、運動する物体の固有時間 τ がスカラーであることは前節で説明した。つまり、 τ はいかなる慣性系から見ても共通の尺度で変化する時間であるので、 t の代わりに τ を用いて速度を定義することが有効と思われる。よって、

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau},$$

によって定義される u^μ を 4 元速度と呼ぶ。ここで、 $x^0 = ct$, $d\tau = \sqrt{1 - v^2/c^2} dt$ であることに注意すると、新たに定義した 4 元速度 u^μ と、3 次元ベクトルによる速度 \mathbf{u} の間には、

$$[u^\mu] = \left[\frac{c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \frac{\mathbf{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \right], \quad (5.8)$$

のような対応関係がある。定義によれば、座標をスカラパラメータについて微分して得られる 4 元速度 u^μ は反変ベクトルであるので、座標と同じ変換を受ける。例えば、K 系とは相対的に x 軸方向に速度 v で等速運動する慣性系 K' 系から同じ物体を見た相対論的速度は

$$u'^0 = \frac{u^0 - \beta u^1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad u'^1 = \frac{u^1 - \beta u^0}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad u'^2 = u^2, \quad u'^3 = u^3, \quad (5.9)$$

となる。この変換式から、第 3.1 節で導出した速度の変換式 (3.2) を導くこともできる。また、3 次元における速度が光速 c に等しいとき、4 元速度が無限大となるため、光速は到達不可能な究極の速さであることを意味している。

得られた公式 (5.9) のように、4 元ベクトルの速度変換則が座標変換とまったく同じ形式であるのは便利であるが、第 3 章で導出した速度変換則と違うのことに違和感があるかもしれない。その違和感を取り除くため、(5.9) から第 3 章の速度変換則が導出できることを示そう。K 系における 3 元速度ベクトルの成分を $[u_x, u_y, u_z]$ とし、そのベクトルの大きさを u とする。一方、K' 系における観測量はプライム (') を付して表すことにする。相対論的速度の変換則 (5.9) に注意して、 $\sqrt{1 - u'^2/c^2}$ を計算すると、

$$\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}} = \frac{\sqrt{(1 - \beta^2)(1 - u^2/c^2)}}{1 - u_x v/c^2},$$

が得られる。K 系における 4 元速度ベクトル (5.8) の定義は、K' 系でも同様、すなわち、

$$[u'^\mu] = \left[\frac{c}{\sqrt{1 - u'^2/c^2}}, \frac{\mathbf{u}'}{\sqrt{1 - u'^2/c^2}} \right],$$

である。この法則性に注意して、K' 系における速度成分 u'_x , u'_y , u'_z を特定すると、

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - u_x v/c^2}, \quad u'_y = \frac{\sqrt{1 - u^2/c^2} u_y}{1 - u_x v/c^2}, \quad u'_z = \frac{\sqrt{1 - u^2/c^2} u_z}{1 - u_x v/c^2},$$

が得られる。いうまでもなく、第 3 章で導出した速度変換則が得られた。この速度ベクトルのように、4 元と 3 元で異なる形式の物理量は、変換則が異なるように見えるが、ここで実演したように 4 元ベクトルの変換則から 3 元ベクトルの変換則を導くことができる。ここで実演した速度変換は、計算が容易とは言えないが、物理的な考察をすることなく、数学的な処方にしたがうだけで変換則を導出できることが共変形式で記述したことの意義であるといえる。

運動量は、我々が観測する運動量と4元ベクトルが形式的に一致する例である。運動量に対応する4元ベクトル(4元運動量ベクトル)は、4元速度ベクトル u^μ に物体の質量 m を乗じて得られるベクトル:

$$p^\mu \equiv mu^\mu = m \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad (5.10)$$

を考えよう。この4元ベクトルは、

$$[p^\mu] = \left[\frac{mc}{\sqrt{1-u^2/v^2}}, \frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1-u^2/v^2}} \right] = \left[E/c, \mathbf{p} \right],$$

のように書くことができるので、エネルギー E と運動量 \mathbf{p} と同じ形式で数学表現されている。しかも、4元運動量は反変ベクトルをスカラー倍した量なので、反変ベクトルである。よって、4元運動量は座標変換と同一の変換:

$$p^0 = \frac{p^0 - \beta p^1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad p^1 = \frac{p^1 - \beta p^0}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad p^2 = p^2, \quad p^3 = p^3,$$

にしたがう。この変換式は、まさに運動量とエネルギーの変換(3.20)そのものである。運動量とエネルギーの関連性は、座標変換の共変性から導かれる性質ということができらる。

5.4 4元加速度と力

前節に引き続き、4元速度 u^μ をさらに固有時間 τ で微分すると、やはり、反変ベクトルが得られる。この反変ベクトルは、4元速度を固有時間について微分したベクトルなので、4元加速度をよばれる。記号を用いて書くと、4元加速度は、

$$B^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}, \quad (5.11)$$

のように定義される。相対論的な性質であるが、4元加速度は4元速度と直交する。なぜなら、ミンコフスキー空間における線素の2次形式 $\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -c^2 d\tau^2$ を変形して得られる $\eta_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -c^2$ の両辺を τ について微分すると、

$$\eta_{\mu\nu}u^\mu B^\nu = 0,$$

が導かれるからである。この結果は、4元加速度と4元速度の内積がゼロであること、すなわち、4元加速度が4元速度と直交することを表している。

上のように定義された4元加速度(5.11)は、3次元の加速度ベクトル \mathbf{a} との間の関係はいささか複雑である。前節で定義した4元速度ベクトルが3元速度ベクトルとの間にローレンツ因子 $(1 - u^2/c^2)^{-1/2}$ を含んでいたため、それをさらに τ で微分すると、複雑さが増し、

$$[B^\mu] = \left[\frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{u})/c}{(1 - u^2/c^2)^2}, \frac{\mathbf{a}}{1 - u^2/c^2} + \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{u})/c}{(1 - u^2/c^2)^2} \frac{\mathbf{u}}{c} \right],$$

なる関係で記述される。この式の右辺は何か似ていないだろうか？ この式は (4.41) で導出した力のベクトルと類似した形をしている。よって、4元加速度 B^μ に質量 m を乗じた量:

$$K^\mu = m \frac{d^2 u^\mu}{d\tau^2}, \quad (5.12)$$

を4元力として定義するのがよさそうである。しかも、この式の形はニュートン力学における力の定義 $\mathbf{K} = m \, dv/dt$ と類似しているので、この式を相対論的力と呼んでも違和感はないだろう。このように定義された4元力は、3次元の力ベクトル \mathbf{K} との間に、

$$[K^\mu] = \left[\frac{P/c}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \frac{\mathbf{K}}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \right],$$

なる関係が成立する。ここで、 P は (3.17) に示した仕事率である。この4元力も反変ベクトルであるので、座標変換と同じ変換にしたがう。つまり、 K 系に対して x 軸方向に速度 v で運動する K' 系からみた4元力 K'^μ は

$$K'^0 = \frac{K^0 - \beta K^1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad K'^1 = \frac{K^1 - \beta K^0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad K'^2 = K^2, \quad K'^3 = K^3,$$

のように変換される。当然、この式から3次元の力の変換 (4.42) も容易に導出できる。4元力ベクトルの成分が4元速度ベクトルに類似した成分表示になっているため、3元力ベクトルに関するローレンツ変換は速度ベクトルと類似した変換式にしたがうわけだ。

5.5 光行差とドップラ効果

本章では、既に運動学の章で導いたローレンツ変換に対する各物理量の変換を共変形式で記述した。これに対し、本節では、共変形式を用いて新たに物理量の変換を導出し、共変形式が相対性理論記述において有効な手段であることを示す。本節のタイトルのように、光のドップラ効果を求めてみよう。

マクスウェルが彼の方程式によって予言したように、光は電磁波の一種である。例えば、平面波であるような光を考えると、その波動関数は、

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}),$$

となる。ただし、 $\mathbf{k} \equiv [k_x, k_y, k_z]$ は波数ベクトルと呼ばれ、光波の伝播方向を向いているベクトルである。しかも、光の波長を λ としたとき、波数ベクトルの長さは $k = 2\pi/\lambda$ となる。また、 ω は光の角周波数である。電磁気学の章で述べたように、電磁波の位相 φ は座標変換に対して不変であるので、

$$\varphi = \omega t - k_x x - k_y y - k_z z,$$

はスカラである。さらに、このスカラを座標について偏微分して得られる4元ベクトル:

$$k_\mu = -\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu},$$

を定義しよう。この4元ベクトルはスカラの勾配ベクトルであるので、共変ベクトルである。また、このベクトルに計量テンソル $\eta^{\mu\nu}$ を掛けて縮約をとれば反変ベクトル:

$$k^\mu = \eta^{\mu\nu} k_\nu,$$

に変換することができる。さて、この反変ベクトルを具体的に書き下すと、

$$k^\mu = \left[\omega/c, \mathbf{k} \right],$$

となることは明らかであろう。新たに定義された反変ベクトルは、角周波数と波数ベクトルを成分とすることから、4元波数ベクトルとよばれる。既に学んだように、座標がローレンツ変換されれば、反変ベクトルもまったく同じ変換にしたがうので、K系に対して x 軸方向に速度 v で運動する K'系から見た4元波数ベクトル k'^μ は

$$k'^0 = \frac{k^0 - \beta k^1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad k'^1 = \frac{k^1 - \beta k^0}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad k'^2 = k^2, \quad k'^3 = k^3,$$

なる変換にしたがう。この変換式を角周波数と3元波数ベクトルとの表記に書き換えると、

$$\omega' = \frac{\omega - v k_x}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad k'_x = \frac{k_x - v \omega/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad k'_y = k_y, \quad k'_z = k_z,$$

が得られる。もちろん、この変換式は第2章のように、座標をローレンツ変換した上で位相が不変となるように角周波数と波数ベクトルを決定する方法によっても導出できる。しかし、ベクトルの共変性を利用すればほとんど計算をすることなく、波数ベクトルの変換を得ることができる。これが、共変性を利用した数学の利点である。

5.6 電磁場の共変形式

力学における力や運動量では、共変形式を用いることで相対論的な関係式を簡潔に記述することができた。電磁場の場合においても共変形式を用いることで方程式を簡潔に記述することができる。本節では、真空中におけるマクスウェルの方程式を共変形式によって記述する。

電磁場を共変形式で記述するために、静電ポテンシャル ϕ とベクトルポテンシャル \mathbf{A} を持ち出そう。これらは、電磁場の表記を簡略化するために導入される数学的な量であり、自由度をもった量である。その自由度を規定するため、

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial\phi}{\partial t} = 0,$$

なるローレンツ条件をしばしば適用する。当然、相対性原理があるためローレンツ条件はいかなる慣性系でも成立しなければならない。このローレンツ条件は、電磁場を共変形式で記述する上で重要な役割を果たす。というのは、

$$[\phi^\mu] = \left[\phi/c, \mathbf{A} \right], \quad (5.13)$$

なるベクトル ϕ^μ を定義すると、ローレンツ条件は、

$$\frac{\partial \phi^\mu}{\partial x^\mu} = 0, \quad (5.14)$$

のような形で記述できるからである。ローレンツ条件の右辺はいかなる慣性系でも、必ず、ゼロであるので、その量はスカラーである。静電ポテンシャル ϕ とベクトルポテンシャル \mathbf{A} を (5.13) のような 4 元ベクトルとして定義すれば、その 4 元ベクトルの発散がローレンツ条件と一致するのである。当然、反変ベクトル ϕ^μ には、

$$\phi'^0 = \frac{\phi^0 - \beta\phi^1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \phi'^1 = \frac{\phi^1 - \beta\phi^0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \phi'^2 = \phi^2, \quad \phi'^3 = \phi^3, \quad (5.15)$$

なるローレンツ変換が成立する。この式を、通常の静電ポテンシャルとベクトルポテンシャルの記号を用いて書くと、

$$\phi' = \frac{\phi - vA_x}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad A'_x = \frac{A_x - \frac{v}{c^2}\phi}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad A'_y = A_y, \quad A'_z = A_z,$$

が得られるが、これは既に学んだ変換式と一致している。

これから、電磁場を表す \mathbf{E} や \mathbf{B} の共変形式を探すわけだが、ここで $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ を参考にしてみよう。これは、磁束密度 \mathbf{B} がベクトルポテンシャル \mathbf{A} の回転であることを意味している。これに習って、4 元ベクトル ϕ^μ のテンソル回転:

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial \phi_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \phi_\mu}{\partial x^\nu}, \quad (5.16)$$

を評価してみよう。ここで、 $\phi_\mu = \eta_{\mu\alpha}\phi^\alpha$ である。この定義式より、2 階のテンソル $F_{\mu\nu}$ は、 $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$ なる交代テンソルである。つまり、 $F_{\mu\nu}$ は独立な 6 個の成分をもつテンソルである。この式を実際に計算してみると、

$$[F_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.17)$$

が得られる。つまり、独立な 6 成分のうち、3 成分は電場 \mathbf{E} を表し、残りの 3 成分は磁束密度 \mathbf{B} を表す。この 2 階の共変テンソルは座標変換に対して、

$$F'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} F_{\lambda\sigma}, \quad (5.18)$$

のように変換される。その座標変換がローレンツ変換であれば、 $\partial x^\lambda / \partial x'^\mu$ はその逆変換行列、すなわち、

$$\left[\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} \right] = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

となるので、これを (5.18) に代入すれば、電場の変換 (4.17) と磁束密度の変換 (4.17) が得られる。ただし、 $\gamma \equiv (1 - \beta^2)^{-1/2}$ とおいた。この2階の共変テンソル $F_{\mu\nu}$ は、(5.16) によって定義されているため、テンソルの回転に関して、

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} = 0, \quad (5.19)$$

なる関係が成り立つ。この関係式がマクスウェルの方程式のうちどの法則に対応しているか調べてみよう。 $F_{\mu\nu}$ が交代テンソルであることから、 (μ, ν, λ) のうち2つに同じ番号が当てられた場合、そのテンソルの回転は明示的にゼロとなる。明示的にはゼロとならない成分について回転を計算すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{12}}{\partial x^3} + \frac{\partial F_{31}}{\partial x^2} + \frac{\partial F_{23}}{\partial x^1} &= \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}, \\ \frac{\partial F_{02}}{\partial x^3} + \frac{\partial F_{30}}{\partial x^2} + \frac{\partial F_{23}}{\partial x^0} &= \frac{1}{c} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + \frac{\partial B_x}{\partial t} \right), \\ \frac{\partial F_{01}}{\partial x^3} + \frac{\partial F_{30}}{\partial x^1} + \frac{\partial F_{13}}{\partial x^0} &= -\frac{1}{c} \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial t} \right), \\ \frac{\partial F_{01}}{\partial x^2} + \frac{\partial F_{20}}{\partial x^1} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x^0} &= \frac{1}{c} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial t} \right), \end{aligned}$$

となる。上で述べたように、これらの成分もゼロとなるので、最初の成分は磁束保存の法則、残りの3成分はファラデーの法則に対応する。

次にテンソル $F_{\mu\nu}$ の発散を計算してみよう。ただし、共変テンソルでは発散を計算するには都合が悪いので、 $F^{\mu\nu} \equiv \eta^{\mu\lambda} \eta^{\nu\sigma} F_{\lambda\sigma}$ のように変換された2階の反変テンソルを用いることにする。リーマン幾何学における2階のテンソルの発散は、ミンコフスキー空間のように曲率をもたない座標系に限り、

$$\mu_0 j^\mu = \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu},$$

のように計算される。この式は、テンソル $F^{\mu\nu}$ の発散が反変ベクトルであることも意味している。ただし、後の便宜のため、左辺には真空中の透磁率 μ_0 を係数として付加しておいた。具体的に発散を計算してみると、

$$\frac{\partial F^{0\nu}}{\partial x^\nu} = \frac{1}{c} \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) = \mu_0 c \rho,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial F^{1\nu}}{\partial x^\nu} &= \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} = \mu_0 j_x, \\ \frac{\partial F^{2\nu}}{\partial x^\nu} &= \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t} = \mu_0 j_y, \\ \frac{\partial F^{3\nu}}{\partial x^\nu} &= \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t} = \mu_0 j_z,\end{aligned}$$

が得られる。ただし、これらの式の右辺への変形に関しては、取り扱っている電磁場が真空であることを仮定し、真空中の誘電率と透磁率に関する関係 $\varepsilon_0\mu_0 = 1/c^2$ を用いた。つまり、計算したテンソルの発散は真空中におけるガウスの法則とアンペールの法則に対応する。また、この結果から、電荷密度 ρ と電流密度 \mathbf{j} が、

$$[j^\mu] = [c\rho, \mathbf{j}], \quad (5.20)$$

のような反変ベクトル s^μ で表現できることを意味している。これまでと同様、 s^μ はローレンツ変換に対して、

$$j'^0 = \frac{j^0 - \beta j^1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad j'^1 = \frac{j^1 - \beta j^0}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad j'^2 = j^2, \quad j'^3 = j^3,$$

のように変換される。これを、電荷密度 ρ と電流密度 \mathbf{j} に関して明示的に記述すると、

$$\rho' = \frac{\rho - \frac{v}{c^2} j_x}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad j'_x = \frac{j_x - v\rho}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad j'_y = j_y, \quad j'_z = j_z,$$

となる。これも既に導出されている変換式と一致する。

改めて、結果を書くと、テンソル表現によってマクスウェルの方程式は、

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} = 0, \quad (5.21)$$

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = \mu_0 j^\mu, \quad (5.22)$$

のように書き換えることができる。既に述べたように、(5.21) は磁束保存の法則とファラデーの法則に、(5.22) は真空中におけるガウスの法則とアンペールの法則に対応する方程式である。ベクトル記法によるマクスウェルの方程式もシンプルにまとまった方程式であるが、共変形式を用いると、その方程式もさらに簡潔にまとまっている。

5.7 分極テンソル

前節では真空中のマクスウェルの方程式をテンソルを用いて記述した。それを引き継ぎ、本節では物質内のマクスウェルの方程式をテンソルによって記述する。前節で記述し

たうち, (5.21) は物質内でも成り立つ。修正が必要なのは, (5.22) である。簡単な方法としては, 前節に習って,

$$[H^{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} 0 & cD_x & cD_y & cD_z \\ -cD_x & 0 & H_z & -H_y \\ -cD_y & -H_z & 0 & H_x \\ -cD_z & H_y & -H_x & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.23)$$

のようなテンソルを定義することである。このテンソルを用いれば, ガウスの法則とアンペールの法則を,

$$\frac{\partial H^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = j^\mu$$

の形に書くことができる。座標変換に関しては, 2階の反変テンソルである $H^{\mu\nu}$ は,

$$H'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} H^{\lambda\sigma},$$

にしたがう。実際に計算してみれば, この変換式が, 電束密度に関する変換 (4.15) と, 磁場に関する変換 (4.16) に対応していることがわかる。さて, 新たに定義されたテンソル $H^{\mu\nu}$ は $F^{\mu\nu}$ とどのような関係があるだろうか? 古典的な電磁気学のように $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ や $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu$ を期待してはいけない。既に説明したように, この関係が成り立つのは取り扱う物質との相対速度がゼロの場合に限る。一般的には,

$$H^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0} F^{\mu\nu} - M^{\mu\nu}, \quad (5.24)$$

のような関係を仮定すればよいだろう。この式に付加された $M^{\mu\nu}$ は物質によって異なる要素であり, 真空中ではゼロになる。しかも, $F^{\mu\nu}$ と $H^{\mu\nu}$ がテンソルであるので, $M^{\mu\nu}$ もテンソルである。この新たなテンソルの正体を決定するには,

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M},$$

の関係を用いればよい。ここで, \mathbf{P} は分極ベクトル, \mathbf{M} は磁化ベクトルである。この関係より, テンソル $M^{\mu\nu}$ が,

$$[M^{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} 0 & -cP_x & -cP_y & -cP_z \\ cP_x & 0 & M_z & -M_y \\ cP_y & -M_z & 0 & M_x \\ cP_z & M_y & -M_x & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.25)$$

であることが, 容易に導かれる。この新たなテンソル $M^{\mu\nu}$ は分極テンソルと呼ぶことにする。また, このテンソル性より, 分極ベクトル \mathbf{P} と磁化ベクトル \mathbf{M} が, (4.61), (4.62) の変換にしたがうことは明らかである。

上のような考察によって、物質中の電磁場に関するマクスウェルの方程式を共変形式で書くことができる。共変形式による電磁場の表記は、電場と磁束密度を表現するテンソル $F^{\mu\nu}$ 、電束密度と磁場を表現するテンソル $H^{\mu\nu}$ 、それから、電荷密度と電流密度を表現する4元ベクトル s^μ を用いて、

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} = 0, \quad (5.26)$$

$$\frac{\partial H^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = j^\mu, \quad (5.27)$$

のように記述される。ベクトル形式ではマクスウェルの方程式は4つの方程式であったが、相対性理論における共変形式では2つの方程式にまとめられている。ついでに、ガウスの法則とアンペールの法則を表す(5.27)の発散を評価してみよう。

$$\frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} = \frac{\partial^2 H^{\mu\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\nu}, \quad (5.28)$$

ここで、テンソル $H^{\mu\nu}$ が交代テンソルであることを利用すると、

$$\text{RHS of (5.28)} = -\frac{\partial^2 H^{\nu\mu}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = -\frac{\partial^2 H^{\mu\nu}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} = -\frac{\partial^2 H^{\mu\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\nu}, \quad (5.29)$$

のように変形される。この数式変形は、縮約をとる添え字 μ と ν の記号を入れ替え、その後、微分演算子の順序を入れ替えることによって実行されている。このような変形をしたとしても、(5.28) と (5.29) はまったく同じ式であるはずなので等号で結ぶと、

$$\frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} = 0 \quad (5.30)$$

であることがわかる。この結果は、

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

すなわち、電荷に関する連続の方程式である。つまり、電荷に関する連続の方程式は、4元電流密度ベクトルの発散がゼロであることを表す数式となる。

ところで、4元電流密度 j^μ を成分表示すると、 $[j^\mu] = [c\rho, \mathbf{j}]$ のようになる。そのうち、 ρ は電場 \mathbf{E} が存在しなくても存在する電荷密度、いわゆる真性電荷密度である。もう一方、 \mathbf{j} は伝導電流密度である。物質内部では、電荷密度や電流密度に、分極や磁化による影響が重ね合わされる。分極や磁化による電荷密度と電流密度への影響は、

$$\left[-c\nabla \cdot \mathbf{P}, \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M} \right] = \left[\frac{\partial M^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} \right],$$

なる関係より、分極テンソル $M^{\mu\nu}$ の各行の発散によって表される。この発散によってつくられるベクトルは、第0成分が分極電荷密度を表し、残りの3成分が分極による変位電流

密度と磁化電流密度の和になっている。よって、電場や磁束密度中の物質内部の全電荷密度と電流密度を4元電流密度 $\tilde{j}^\mu \equiv [c\tilde{\rho}, \tilde{\mathbf{j}}]$ とすれば、

$$\tilde{j}^\mu = \frac{\partial H^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial M^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu}, \quad (5.31)$$

のように書くことができる。

5.8 マクスウェルの応力テンソル

電場 \mathbf{E} と磁束密度 \mathbf{B} の中を電荷 e をもつ荷電粒子が速度 \mathbf{u} で運動するとき、その荷電粒子には、 $\mathbf{K} = e(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$ のローレンツ力が作用する。すでに説明したように、ローレンツ力は運動する電荷に働く相対論的な力であり、ローレンツ変換に対して共変性を示す力である。

対象が荷電粒子ではなく、連続的に広がる物質についても同様の考察ができる。例えば、その物質中の全電荷密度を $\tilde{\rho}$ 、全電流密度を $\tilde{\mathbf{j}}$ としたとき、物質中の単位体積あたりに作用する電磁気力は、 $\mathbf{f} = \tilde{\rho}\mathbf{E} + \tilde{\mathbf{j}} \times \mathbf{B}$ となる。この単位体積あたりの力を共変形式で書くと、

$$f^\mu = F^{\mu\nu} \tilde{j}_\nu, \quad (5.32)$$

となることは容易にわかるだろう。ただし、物質中の全電荷密度と全電流密度を表す4元ベクトル \tilde{j}^μ は、(5.31) の関係を満たす。電磁気力の密度(5.32) は、ある2階のテンソル $T^{\mu\nu}$ を用いて、

$$f^\mu = \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu}, \quad (5.33)$$

のような形で表すことができる。本節では、この関係を導出し、テンソル $T^{\mu\nu}$ の物理的な意味を考察する。

まず、(5.31) の関係を用いて(5.32) の右辺を変形すると、

$$\begin{aligned} \text{RHS of (5.32)} &= \frac{1}{\mu_0} \eta_{\nu\lambda} F^{\mu\nu} j^\lambda = \frac{1}{\mu_0} \eta_{\nu\lambda} F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\lambda\alpha}}{\partial x^\alpha} \\ &= \frac{1}{\mu_0} \left[\frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\eta_{\nu\lambda} F^{\mu\nu} F^{\lambda\alpha}) - \eta_{\nu\lambda} F^{\lambda\alpha} \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right], \end{aligned} \quad (5.34)$$

となるが、この式の右辺第2項に透磁率 μ_0 を乗じると、

$$\eta_{\nu\lambda} F^{\lambda\alpha} \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} = \eta^{\nu\beta} \eta^{\nu\kappa} \eta_{\nu\lambda} F^{\lambda\alpha} \frac{\partial F_{\beta\kappa}}{\partial x^\alpha} = \eta^{\mu\beta} F^{\lambda\alpha} \frac{\partial F_{\beta\lambda}}{\partial x^\alpha}, \quad (5.35)$$

が得られる。そこで、テンソル $F^{\mu\nu}$ が交代テンソルであることを利用して、(5.35) の右辺を変形すると、

$$\text{RHS of (5.35)} = \eta^{\mu\beta} F^{\alpha\lambda} \frac{\partial F_{\lambda\beta}}{\partial x^\alpha} = \eta^{\mu\beta} F^{\lambda\alpha} \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x^\lambda}, \quad (5.36)$$

となる。一方、テンソル $F^{\mu\nu}$ の回転がゼロであること (磁束保存の法則とファラデーの法則) に注意すると、(5.35) の右辺は、

$$\text{RHS of (5.35)} = -\eta^{\mu\beta} F^{\lambda\alpha} \left(\frac{\partial F_{\lambda\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x^\lambda} \right), \quad (5.37)$$

のようにも変形される。当然、(5.36) と (5.37) は同じ式であるので、等号で結ぶことができ、

$$\eta^{\mu\beta} F^{\lambda\alpha} \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial \lambda} = -\frac{1}{2} \eta^{\mu\beta} F^{\lambda\alpha} \frac{\partial F_{\lambda\alpha}}{\partial \beta}, \quad (5.38)$$

なる関係が得られる。この関係式の左辺と右辺を、それぞれ、さらに変形すると、

$$\text{LHS of (5.38)} = \eta_{\nu\lambda} F^{\lambda\alpha} \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha},$$

$$\text{RHS of (5.38)} = -\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\eta^{\mu\alpha} F^{\lambda\nu} F_{\lambda\nu}),$$

となるので、(5.38) の関係は、

$$\eta_{\nu\lambda} F^{\lambda\alpha} \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} = -\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\eta^{\mu\alpha} F^{\lambda\nu} F_{\lambda\nu}), \quad (5.39)$$

のように書き換えられる。この関係を (5.34) に代入すると、単位体積あたりに作用する電磁気力は、

$$f^\mu = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\eta_{\nu\lambda} F^{\mu\nu} F^{\alpha\lambda} - \frac{1}{4} \eta^{\mu\alpha} F^{\lambda\nu} F_{\lambda\nu} \right), \quad (5.40)$$

のように書くことができる。ここで、

$$T^{\mu\nu} = -\frac{1}{\mu_0} \left(\eta_{\alpha\lambda} F^{\mu\alpha} F^{\nu\lambda} - \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F^{\lambda\alpha} F_{\lambda\alpha} \right), \quad (5.41)$$

なる量を定義すると、その量がテンソルの1次結合であるので、やはり、 $T^{\mu\nu}$ はテンソルであり、(5.33) が成立することが示された。

それでは、新たに定義されたテンソル $T^{\mu\nu}$ がどのような量を表すのかを調べてみよう。まず、 $F^{\mu\nu}$ が交代テンソルであるので、 $T^{\mu\nu}$ は対象テンソル、すなわち、 $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$ が成り立つことがわかる。さらに、具体的に要素を計算してみると、

$$T^{00} = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{\mathbf{B}^2}{\mu_0} \right), \quad (5.42)$$

$$T^{0k} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})_k, \quad (5.43)$$

$$T^{ik} = \varepsilon_0 E_i E_k + \frac{1}{\mu_0} B_i B_k - \frac{1}{2} \delta^{ik} \left(\varepsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{\mathbf{B}^2}{\mu_0} \right), \quad (5.44)$$

が導かれる。ここで、添え字 i と k は1から3までの整数である。まず、(5.42) は単位体積あたりの電磁エネルギーである。また、(5.43) はポインティングベクトルと呼ばれる電磁エネルギーの流れを表すベクトルである。実際に f^0 について展開してみると、

付録A 応力テンソル

相対性理論ではエネルギーや運動量を議論する際に応力テンソルが現れる。応力テンソルは流体などの連続体の物理学で扱う量である。すでに連続体の物理学を習得している者はこの章を読む必要は特にない。ここでは、相対性理論への応用ができる範囲で連続体の物理学を紹介する。

A.1 連続体の運動方程式

ある連続体の中の一点 (x^1, x^2, x^3) が速度 u^i で運動しているとしたとき、その連続体の運動方程式を導出してみよう。この u^i は、速度ベクトル \mathbf{u} の x^i 成分であるとする。この連続体の加速度は単純に du^i/dt を計算すればよいというわけではない。なぜなら、ここでは連続体中の一点 (x^1, x^2, x^3) に着目しているのであって、決して、その連続体に含まれるある粒子などの剛体を追跡しているのではない。つまり、連続体の速度 u^i は単なる時間の関数ではなく、座標 (x^1, x^2, x^3) にも依存した量である。よって、その加速度は剛体の加速度とは区別する意味で Du^i/Dt のような記号を用いるが、

$$\frac{Du^i}{Dt} = \frac{\partial u^i}{\partial t} + u^k \frac{\partial u^i}{\partial x^k} \quad (\text{A.1})$$

という関係で表される。ただし、この数式は Einstein の総和の規約にしたがい、添え字 k を 1, 2, 3 のように変化させて和をとっている。

連続体の加速度 (A.1) は次のような考察によっても導かれる。ある時刻 t に座標 (x^1, x^2, x^3) に存在する連続対中の粒子の速度を $\tilde{u}^i(t)$ とする。つまり、

$$\tilde{u}^i(t) = u^i(x^1, x^2, x^3; t)$$

が成り立っている。それから微小時間 δt が経過した時刻 $t + \delta t$ において、その粒子は座標 $(x^1 + u^1 \delta t, x^2 + u^2 \delta t, x^3 + u^3 \delta t)$ に移動しているはずだから、その時点での粒子の速度は

$$\tilde{u}^i(t + \delta t) = u^i(x^1 + u^1 \delta t, x^2 + u^2 \delta t, x^3 + u^3 \delta t; t)$$

と表される。よって、微小時間 δt の間の粒子の速度変化は

$$\tilde{u}^i(t + \delta t) - \tilde{u}^i(t) = \left(\frac{\partial u^i}{\partial t} + u^k \frac{\partial u^i}{\partial x^k} \right) \delta t$$

となるので, (A.1) が成立する。また, この連続体の単位体積あたりの質量を ρ とすると

$$\rho \frac{Du^i}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial u^i}{\partial t} + u^k \frac{\partial u^i}{\partial x^k} \right) \quad (\text{A.2})$$

が連続体の単位体積あたりに働く力である。

具体的に, 連続体に働く力とは圧力 (または, 張力), および, ひずみ力がある。連続体に含まれるある微小体積片を考えたとき, 圧力はその体積片表面の法線方向に働く力, そして, ひずみ力は体積片表面の接線方向に働く力である。圧力とひずみ力は, ともにまとめて応力と呼ばれる。応力の強さはその力を受ける表面積に比例する。例えば, 表面積 δS , 法線ベクトルが n^i の面に働く応力は

$$F_{(s)}^i = -\sigma^{ik} n_k \delta S$$

で与えられる。この σ^{ik} は応力テンソルと呼ばれる 3×3 行列のような形で表される量である。上式を見てわかるように, 応力テンソルの対角成分は圧力を表し, その他の成分はひずみ力を表す。この応力テンソルを

$$[\sigma^{ik}] \equiv \begin{bmatrix} \sigma^1 \\ \sigma^2 \\ \sigma^3 \end{bmatrix}$$

のように書いたとすると, 応力 $F_{(s)}^i$ は

$$F_{(s)}^i = -\sigma^i \cdot \mathbf{n} \delta S$$

のようなベクトルの内積の形で書くことができる。さらに, Gauss の発散定理を用いると, ある体積片 V に作用する応力の総和は

$$-\int_{S=\partial V} \sigma^i \cdot \mathbf{n} dS = -\int_V \nabla \cdot \sigma^i dV$$

のような体積積分に書き換えることができる。よって, 連続体のある微小体積片に注目したとき, その体積片の単位体積に働く応力 (の x^i 成分) は $-\nabla \cdot \sigma^i$ となる。

さらに, 連続体には単位体積あたりに f^i の力が作用している仮定して, 先ほど計算した単位体積あたりの応力との合力が連続体の加速度から計算される力の密度と等しいことを表す式を書くと,

$$\rho \left(\frac{\partial u^i}{\partial t} + u^k \frac{\partial u^i}{\partial x^k} \right) = -\frac{\partial \sigma^{ik}}{\partial x^k} + f^i \quad (\text{A.3})$$

となる。数式 (A.3) の左辺は

$$\begin{aligned} \text{LHS of (A.3)} &= \rho \frac{\partial u^i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^k} \rho u^i u^k - u^i \frac{\partial}{\partial x^k} \rho u^i \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \rho u^i + \frac{\partial}{\partial x^k} \rho u^i u^k \end{aligned}$$

のように変形できる。この変形に関し、連続の方程式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{u} = 0$$

を利用した。よって、(A.3)は

$$f^i = \frac{\partial}{\partial t} \rho u^i + \frac{\partial}{\partial x^k} (\rho u^i u^k + \sigma^{ik}) \quad (\text{A.4})$$

のように書き換えることができる。これが連続体における運動方程式である。

A.2 応力テンソル

連続体に発生する圧力とひずみ力を表す応力テンソルは、その名前のおり、テンソルとしての性質をもっている。ここでは、そのテンソル性を証明する。そのためには、連続体の単位体積あたりに作用する応力

$$\mathbf{s} = \frac{\partial \sigma^{ik}}{\partial x^k} \mathbf{e}_i$$

を考えればよいだろう。この式において、 \mathbf{e}_i は x^i 軸方向の単位ベクトルである。応力テンソル σ^{ik} のテンソル性を証明するには、単位体積あたりに作用する応力を座標 x'^i によって記述できるように座標変換してやればよい。まず、単位ベクトルは

$$\mathbf{e}_i = \frac{\partial x'^r}{\partial x^i} \mathbf{e}'_r$$

のように変換される。また、 σ^{ik} の偏微分は

$$\frac{\partial \sigma^{ik}}{\partial x^k} = \frac{\partial x'^p}{\partial x^k} \frac{\partial \sigma^{ik}}{\partial x'^p}$$

のように変換されるので、連続体の単位体積あたりに作用する応力は

$$\mathbf{s} = \frac{\partial x'^r}{\partial x^i} \frac{\partial x'^p}{\partial x^k} \frac{\partial \sigma^{ik}}{\partial x'^p} \mathbf{e}'_r = \frac{\partial}{\partial x'^p} \left(\frac{\partial x'^r}{\partial x^i} \frac{\partial x'^p}{\partial x^k} \sigma^{ik} \right) \mathbf{e}'_r$$

と書き換えることができる。

付録B 電磁場の運動量密度

B.1 Poyntingベクトル

Maxwell の方程式

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \mathbf{j}, \\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0,\end{aligned}$$

に対し、それぞれ、 \mathbf{E} と \mathbf{H} を内積し、その結果の差をとると、

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}, \quad (\text{B.1})$$

が得られる。真空中に限定すると、この式は、

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_0 \mathbf{E}^2 + \mu_0 \mathbf{H}^2) = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}, \quad (\text{B.2})$$

のように書き換えることができる。ここで、

$$U = \frac{1}{2} (\varepsilon_0 \mathbf{E}^2 + \mu_0 \mathbf{H}^2) = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{\mathbf{B}^2}{\mu_0} \right),$$

なる U を定義すると、上の式は、

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \frac{\partial U}{\partial t} = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}, \quad (\text{B.3})$$

のように書き換えられる。上のように定義された U は単位体積辺りの電磁エネルギーであり、 $-\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}$ は電場 \mathbf{E} によって与えられる電力である。つまり、(B.3) は電磁エネルギーに対する連続の方程式になっている。よって、Poynting ベクトルと呼ばれる $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ は電磁エネルギーの流れを表すベクトルである。

ところで、物質中の電磁場における物理量は、分極ベクトル \mathbf{P} と磁化ベクトル \mathbf{M} を用いて、

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M},$$

なる関係で記述することができる。この関係を用いて、電磁エネルギーの連続の方程式を変形すると、

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_0 \mathbf{E}^2 + \mu_0 \mathbf{H}^2) + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{j} \quad (\text{B.4a})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\varepsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{\mathbf{B}^2}{\mu_0} \right) + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \mathbf{M} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}, \quad (\text{B.4b})$$

のように書き換えることができる。ここで、

$$U_1 = \frac{1}{2} (\varepsilon_0 \mathbf{E}^2 + \mu_0 \mathbf{H}^2), \quad U_2 = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{\mathbf{B}^2}{\mu_0} \right),$$

とおくと、真空中では U_1 と U_2 が等しかったのであるが、物質中では $U_1 \neq U_2$ である。このように、物質中では電磁エネルギー密度に関する量 U_1 と U_2 が一致しないが、真空の場合の類推を使うことにし、(B.4a) と (B.4b) は電磁エネルギーに関する連続の方程式であると解釈してみよう。その解釈のもと、

$$\frac{\partial \tilde{U}_1}{\partial t} = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}, \quad (\text{B.5a})$$

$$\frac{\partial \tilde{U}_2}{\partial t} = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \mathbf{M} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (\text{B.5b})$$

なる量を定義しておこう。これらの量は、真空中ではゼロであるので、物質固有の物理量である。また、このような記号を用いると (B.4a) と (B.4b) は、

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \frac{\partial}{\partial t} (U_1 + \tilde{U}_1) = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{j} \quad (\text{B.6a})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \frac{\partial}{\partial t} (U_2 + \tilde{U}_2) = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}, \quad (\text{B.6b})$$

のように書き換えることができ、 $U_1 + \tilde{U}_1$ 、または、 $U_2 + \tilde{U}_2$ がエネルギー密度のような表現になっている。上で解釈したように、 U_1 と U_2 が電磁エネルギー密度に対応するならば、 \tilde{U}_1 と \tilde{U}_2 は電磁場による物質の内部エネルギーに対応していると考えるとよいだろう。

上で定義した (B.4a) と (B.4b) は熱力学における断熱変化にあたる。対象とする物質が、単位体積あたり、単位時間あたりに受ける熱量を $\partial Q / \partial t$ とすると、それらの式は、

$$\frac{\partial \tilde{U}_1}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t},$$

$$\frac{\partial \tilde{U}_2}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \mathbf{M} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

のように拡張することができる。これらの式は、

$$d\tilde{U}_1 = \delta Q + \mathbf{E} \cdot d\mathbf{P} + \mu_0 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{M},$$

$$d\tilde{U}_2 = \delta Q + \mathbf{E} \cdot d\mathbf{P} + \mathbf{M} \cdot d\mathbf{B},$$

のように表現することもできる。ただし、熱量 Q に対する微分演算子が d の代わりに d となっているのは、 Q が完全微分でないことを区別するためである。しかし、物質の単位体積あたりのエントロピーを S とすれば、準静的な変化に関して、

$$d\tilde{U}_1 = T dS + \mathbf{E} \cdot d\mathbf{P} + \mu_0 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{M},$$

$$d\tilde{U}_2 = T dS + \mathbf{E} \cdot d\mathbf{P} + \mathbf{M} \cdot d\mathbf{B},$$

が成り立つ。

B.2 Maxwell の応力

次に電荷密度が分布する連続体内部における電磁気力について考える。物体内部の電場 \mathbf{E} は電荷密度に作用する力となり、磁束密度 \mathbf{B} は電流密度に作用する力となる。その物質内部にもとから存在する電荷密度 (真性電荷密度) を ρ とし、物質内部の分極ベクトルを \mathbf{P} とすれば、

$$\nabla \cdot (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho,$$

が成り立つ。この分極のため、物質内部には $\rho_p \equiv \nabla \cdot \mathbf{P}$ の分極電荷密度が発生する。つまり、電界の影響を受ける電荷密度は、真性電荷密度と分極電荷密度の和 $\rho + \rho_p$ である。一方、磁場 \mathbf{H} によって磁化ベクトル \mathbf{M} が発生したとすると、物質内部の磁束密度 \mathbf{B} は

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M},$$

となる。

よって、その電荷密度が速度 \mathbf{u} で運動しているならば、その電荷密度によって電流密度 $\mathbf{j} \equiv \rho \mathbf{u}$ が発生する。そのとき、電荷密度に働く相対論的な電磁気力、すなわち、Lorentz 力の密度 \mathbf{f} は

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= (\rho + \rho_p) \mathbf{E} + (\mathbf{j} + \mathbf{j}_M + \mathbf{j}_P) \times \mathbf{B} \\ &= (\rho - \nabla \cdot \mathbf{P}) \mathbf{E} + \left(\mathbf{j} + \nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right) \times \mathbf{B}, \end{aligned}$$

となる。この力の密度は単位体積あたりの力を表している。ここで、

$$\nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho, \quad \nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) - \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \mathbf{j},$$

であることに注意すると、

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= (\nabla \cdot \varepsilon_0 \mathbf{E}) \mathbf{E} + \left(\nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_0 \mathbf{E} \right) \times \mathbf{B} \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}) - \varepsilon_0 \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) + (\nabla \cdot \varepsilon_0 \mathbf{E}) \mathbf{E} + \left(\nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \right) \times \mathbf{B}, \end{aligned}$$

となる。ここで, Lorentz 力密度を成分ごとに書くと

$$f_i = - \left[\frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B} \right]_i + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^k} \left[\varepsilon_0 E_i E_k + \frac{1}{\mu_0} B_i B_k - \frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) \right], \quad (\text{B.7})$$

となる。ここで, E と B の右肩の添え字 i, j は 1 が x 成分, 2 が y 成分, 3 が z 成分に対応する。また, 座標については $(x^1, x^2, x^3) \equiv (x, y, z)$ のような対応関係があるものとする。ここで,

$$T^{ik} = \varepsilon_0 E^i E^k + \frac{1}{\mu_0} B^i B^k - \frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2 \right), \quad (\text{B.8})$$

とすると, Lorentz 力密度は

$$f^i = - \left[\frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B} \right]^i + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k},$$

と書くことができる。この T^{ik} は Maxwell の応力テンソルと呼ばれる。