

## 第4章 熱雑音

前章で議論したように、物質を構成する分子はその温度に応じて熱運動をする。気体であればその熱運動によって圧力が生じる。電気を伝導する物質の場合、電流の媒体である自由電子が熱運動をする。自由電子だけでなく、物質を構成する原子も熱運動をしている。熱運動をする自由電子は、物質を構成する原子と衝突することによって、外部から電圧を印加しなくても弾き飛ばされる。自由電子が弾き飛ばされる現象は、電圧のゆらぎとして観測される。その電圧のゆらぎが電気回路における雑音である。本章では、自由電子の熱運動による雑音を議論する。

### 4.1 ジョンソン・ナイキスト雑音

自由電子の熱運動による雑音は熱雑音と呼ばれる。熱雑音は抵抗内部で発生することが1928年にジョンソンによって観測され、その後、ナイキストによって定式化されたことから、ジョンソン雑音、または、ジョンソン・ナイキスト雑音と呼ばれる。とも呼ばれる。本節では、ナイキストの考え方に基づく定量化をする。

#### 4.1.1 雑音の定量化

図4.1のように二つの電気抵抗を伝送線路で接続した場合を考えよう。二つの電気抵抗はともに抵抗  $R$  であり、これらをつなぐ伝送線路の長さが  $l$  であるとする。図に描いた電気抵抗のうち、左側を電気抵抗 A、右側を電気抵抗 B と呼ぶことにする。この電線が十分に長ければ、電線にインピーダンスが生じるはずである。電線には単位長さあたり  $C$  の

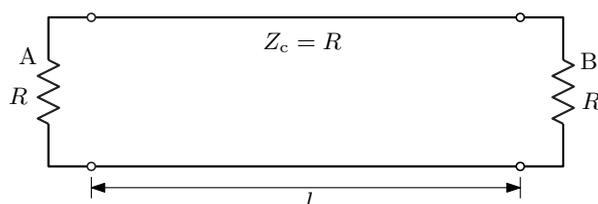


図 4.1: ナイキストによる熱雑音の定量化の回路

容量と  $L$  のインダクタンスをもっているとする。このとき、伝送線路の特性インピーダンスは  $Z_0 = \sqrt{L/C}$  となる。さらに、両端につないだ電気抵抗  $A$  と  $B$  が  $R = \sqrt{L/C}$  となるように選ばれているとする。このように電気抵抗を選べば、電気抵抗  $B$  から流れる電流は反射することなく、すべて電気抵抗  $B$  で消費される。電気抵抗  $A$  から流れる電流についても同様である。なお、伝送線路が抵抗とコンダクタンス成分をもっていないので、その伝送線路は無損失線路である。無損失線路とは、線路上を電圧が伝搬する間、その振幅が減衰しないような線路である。

電気抵抗  $A$  が温度  $T$  をもっていると、ジョンソンの実験で確かめられたように抵抗  $R$  に起電力が発生し、抵抗  $A$  から抵抗  $B$  に電流が流れる。一方、抵抗  $B$  から抵抗  $A$  へも電流が流れる。回路全体が温度  $T$  に維持され、熱平衡の状態にあれば、抵抗  $A$  から流出する電力と、抵抗  $A$  に流入する電力が等しくなる。熱平衡状態にある回路の両端を図 4.2 に示すように短絡したとしよう。現実的でないが、2箇所を同時に、しかも、瞬時に短絡したとする。そのとき線路上を伝搬している電圧波は両端を短絡した線路に閉じ込められ、両端で全反射を続けることになる。付録に示した分布定数回路によると、線路を短絡すると電

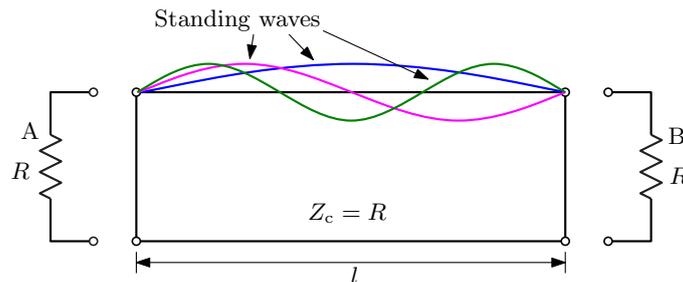


図 4.2: 線路に閉じ込められた定在波

圧信号が全反射する。正確に言うと、反射係数  $-1$  で反射するのだ。つまり、反射点で、反射波が入射波と同一振幅で位相が  $\pi$  だけ異なる。そのため、反射点では入射波と反射波がちょうど打ち消し合い、常にゼロとなる。つまり、線路の両端を短絡することで、図 4.2 に示すような定在波が閉じ込められている。図のように両端が定在波の節となるためには、電線の長さ  $l$  が半波長の整数倍でなければならない。波長を  $\lambda$  とするならば、任意の自然数  $n$  を用いて、電線の中さは  $l = n\lambda/2$  と表される。

電線を伝搬する波の伝搬速度を  $c'$  としよう。残念ながら、この速度は光速と等しいとは限らない。閉じ込められた波の波の周波数を  $\nu$  とおき、 $c' = \nu\lambda$  なる関係を用いると、

$$\nu = \frac{nc'}{2l},$$

が得られる。つまり、閉じ込められた波は離散的な周波数しかとれないのだ。この関係式によって、単位周波数あたり、 $2l/c'$  個の周波数しか選べないことがわかるだろう。言い換えると、周波数帯域  $\Delta\nu$  に含まれる周波数の選択肢は  $2l\Delta\nu/c'$  個となる。

電磁気的な情報は電磁波によって伝えられる。電磁波は横波であり、伝搬する方向が定まっても、電場が向く方向には二つの自由度がある。つまり、一つの周波数の選択肢について、二つの独立した状態が可能である。よって、帯域幅  $\Delta\nu$  に含まれる状態の数は、

$$N_\nu = \frac{4l}{c'}\Delta\nu,$$

である。前章で取り扱った等分配の法則によると、一つの自由度あたり  $k_B T/2$  が分配されるのであるから、一方の電気抵抗から伝搬されるエネルギーは、

$$N_\nu \cdot \frac{k_B T}{2} = \frac{2k_B T l}{c'}\Delta\nu$$

となる。なお、このエネルギーは長さ  $l$  の線路に閉じ込められていることから、長さ  $l/c'$  の時間にわたって抵抗から放出されるエネルギーであると考えてもよい。このエネルギーを  $l/c'$  で除すると、単位時間に放出されるエネルギー、すなわち、抵抗が放出される電力:

$$2P = 2k_B T \Delta\nu,$$

が得られる。ここで、左辺を  $2P$  と書いたのは、 $P$  を抵抗 A から放出される電力としたからである。上で述べたように、抵抗 A と抵抗 B が放出する電力が等しく、線路に閉じ込められたエネルギーは抵抗 A と抵抗 B が放出するエネルギーの和である。だから左辺が  $2P$  なのだ。したがって、抵抗 A から放出される電力は、

$$P = k_B T \Delta\nu, \quad (4.1)$$

となる。そもそも、線路の両端を短絡しなければ、抵抗 A から放出され、抵抗 B で消費されるはずだった電力である。電気抵抗 B から A へ伝搬する電力についても同様である。

これだけの電力を伝搬させるため電気抵抗 A では起電力が発生するはずである。その起電力を特定しよう。起電力を  $V$  とすると、電気抵抗 A は起電力が  $V$  であり、内部抵抗が  $R$  の電源とみなせる。例えば、図 4.3 を考えればよいだろう。そのとき、電気抵抗 B の両端の電圧は  $V/2$  となり、電気抵抗 B を流れる電流は  $V/2R$  となる。なお、図 4.3 において電圧を示す矢印は、矢印の後端を基準とした矢尻の電位を表している。電気抵抗 B で消費される電力は  $V^2/4R$  となる。つまり、

$$\frac{V^2}{4R} = k_B T \Delta\nu,$$

なる関係式が成立する。この関係式を  $V$  について解けば、温度  $T$  に保たれた電気抵抗で発生する起電力:

$$V = \sqrt{4k_B T R \Delta\nu}, \quad (4.2)$$

が導かれる。この結果は、1928 年にジョンソンが観測した熱雑音による起電力と一致する。この量を導出する際に、自由電子の熱運動エネルギー  $k_B T/2$  を用いたので、この起電

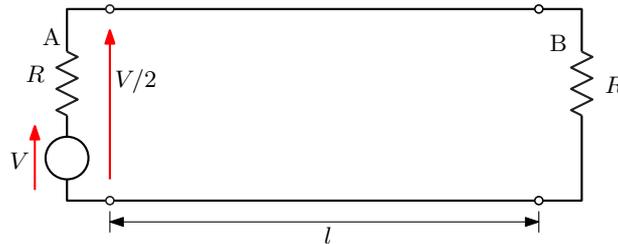


図 4.3: 電気抵抗 A から B への伝搬の概念図

力は自由電子の熱運動に起因する量である。熱運動は乱数的に発生するため、発生する起電力も乱数的である。

かなり簡素に熱雑音が定式化できたが、狐につままれた気がしないだろうか？ この熱雑音の導出では、抵抗から放出されるエネルギーは、伝送線路で定在波を形成する周波数に限られ、可能なすべての組み合わせについてエネルギー  $k_B T/2$  が分配されていることが前提となっている。その条件が適切であるか疑問を感じるかもしれない。次節以降で、ブラウン運動というランダムな運動を定式化した後に、改めて、自由電子の運動を考慮して熱雑音を調べていく。

## 4.2 ブラウン運動

熱雑音を定式化するにあたり、ブラウン運動について学んでおくことは有益である。ブラウン運動は、互いに衝突を繰り返しながら乱数的に変位する微粒子の運動である。この運動は、1827年にイギリスの植物学者ブラウンが、水中の花粉の中の微粒子の運動を顕微鏡で観察するうちに発見したことにちなむ。ブラウンが観察した微粒子は、水中で不規則な軌跡を描いていた。その不規則な軌跡は、微粒子が他の粒子と無秩序に衝突を繰り返すことを要因としていた。ブラウン運動を熱雑音の定式化に適用するには、導体内部の自由電子が無秩序に衝突を繰り返しながら運動するモデルを考えればよい。

### 4.2.1 ランジュバン方程式

自由電子の質量を  $m$ 、電荷を  $e$  とする。自由電子が運動する導体を、断面積が  $A$  で長さが  $l$  の導体であるとしよう。このとき、導体を流れる電流  $\mathbf{J}$  は、

$$\mathbf{J} = Ane\langle \mathbf{u} \rangle,$$

である。なお、 $n$  は単位体積あたりに含まれる自由電子の数である。電流が単位時間あたりに流れる電荷であることを知っていれば、この数式は容易に受け入れられるだろう。

外部から電場を与えると電荷に電磁気力が作用する。その力を  $\mathbf{F}$  としよう。このとき、自由電子に作用する力を運動方程式として書くと、

$$m \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{F},$$

となる。ここで、 $\mathbf{u}$  は自由電子の速度であるとする。導体に一定の電場を与えるということは、一定の印加電圧を入力することを意味する。電気回路におけるオームの法則によると、一定の電圧を印加すると、その電圧によって一意的に決まる一定の電流が流れる。しかし、上の数式によると、速度  $\mathbf{u}$  は加速を続けるので、自由電子が一定速度に落ち着かず、その結果  $\mathbf{J} = Ane\langle\mathbf{u}\rangle$  によって電流が自由電子の速度とともに発散することになる。オームの法則が正しいのならば、運動している自由電子を減速させる何らかの力が存在するはずである。一般的に、自由電子に作用する力は、

$$m \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{F} - m\gamma\mathbf{u} + \mathbf{R}(t), \quad (4.3)$$

と書くことができる。右辺の第1項は電場によって自由電子に作用する力、第2項は速度に比例する粘性抵抗力、第3項は自由電子に対して乱数的に発生する力である。第3項に相当する乱数的な力は揺動力と呼ばれる。このように確率的な力を導入した運動方程式はランジュバン方程式と呼ばれる。その乱数的な力は、異なる自由電子ごとに独立に作用し、それらの平均値がゼロであるとする。数式 (4.3) をすべての自由電子について平均化すると、

$$m \frac{d\langle\mathbf{u}\rangle}{dt} = \mathbf{F} - m\gamma\langle\mathbf{u}\rangle, \quad (4.4)$$

なる方程式が得られる。一定の電圧を印加して、電流が一定値を示したとき、この方程式の右辺はゼロと等しくなければならないので、

$$\langle\mathbf{u}\rangle = \frac{\mathbf{F}}{m\gamma},$$

となる。平均速度  $\langle\mathbf{u}\rangle$  に  $Ane$  を乗じると電流  $\mathbf{J}$  が得られる。一方、電子の電荷を  $e$ 、電場を  $\mathbf{E}$  とすると、断面積  $A$  を流れる電流は  $\mathbf{J} = Ane^2\mathbf{E}/m\gamma$  となる。ここで、電場に平行な方向について距離  $l$  だけ離れると電位が  $V$  だけ変化するならば、 $|\mathbf{E}| = V/l$  となるので、電流は  $J = Ane^2V/ml\gamma$  となる。電位差  $V$  は電圧とも呼ばれるので、ランジュバン方程式が電流が電圧に比例するというオームの法則を支持することが確かめられた。

揺動力  $\mathbf{R}(t)$  は自由電子の間の相互作用を表すと考えればよい。その力は、無秩序に運動する自由電子の間の位置関係によって決まる。揺動力  $\mathbf{R}(t)$  は時間の関数であるが、各自由電子は独立に揺動力が作用しているので乱数的なのだ。任意の時刻  $t$  において、揺動力を平均すると  $\langle\mathbf{R}(t)\rangle = 0$  となる。また、少しでも時間差があると  $\mathbf{R}(t)$  は相関性を失い、

$$\langle\mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{R}(t')\rangle = \langle\mathbf{R}(t)\rangle \cdot \langle\mathbf{R}(t')\rangle = 0 \quad (t \neq t'),$$

が成立する。さらに,  $\mathbf{R}(t) = [R_x(t), R_y(t), R_z(t)]$  の各成分も統計的に独立であるとする。つまり, 揺動力の統計的性質は,

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{R}(t) \rangle &= 0, \\ \langle R_\alpha(t) R_\beta(t') \rangle &= 2D_u \delta_{\alpha\beta} \delta(t - t'),\end{aligned}\tag{4.5}$$

なる数式で表現できる。ここで,  $D_u$  はランダムな力の強さを表し,  $\delta_{\alpha\beta}$  はクロネッカーのデルタ:

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{if } \alpha = \beta, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

である。クロネッカーのデルタ  $\delta_{\alpha\beta}$  は揺動力の空間成分が互いに独立であることを意味する。一方, デルタ関数  $\delta(t - t')$  は, 後に示す緩和時間  $\tau_c \equiv 1/\gamma$  に比べ, 揺動力の相関時間が無視できるくらい短いことを意味する。つまり,  $t = t'$  であれば  $\mathbf{R}(t)$  と  $\mathbf{R}(t')$  は無相関である。

#### 4.2.2 自由電子の速度ゆらぎ

ランジュバン方程式に基づいて自由電子の速度ゆらぎを評価しよう。ここで, 簡単のため外力が存在しない場合に限定する。そのとき, ランジュバン方程式は,

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \gamma\mathbf{u} - \frac{\mathbf{R}(t)}{m} = 0,$$

なる1階の常微分方程式となる。微分方程式の公式を利用してランジュバン方程式を解くと,

$$\mathbf{u}(t) = e^{-\gamma t} \mathbf{u}(0) + \int_0^t e^{-\gamma(t-t')} \frac{\mathbf{R}(t')}{m} dt',\tag{4.6}$$

なる解が得られる。この解の典型的な振る舞いとして, 図4.4に描く軌跡を描く。この図は対象とする自由電子を原点に過去の軌跡を描いている。遠い過去ほど薄い線で描いている。この軌跡は, 物質内部で自由電子が乱数的に衝突を繰り返しながら移動する軌跡を描いている。このような運動が**ブラウン運動**と呼ばれる運動である。なお, 図に書き込まれた寸法は, 銅なかを運動する自由電子を想定して計算された値である。この解に注目して速度の自乗平均  $\langle |\mathbf{u}(t)|^2 \rangle$  を計算すると,

$$\begin{aligned}\langle |\mathbf{u}(t)|^2 \rangle &= e^{-2\gamma t} |\mathbf{u}(0)|^2 + \left\langle \left| \int_0^t e^{-\gamma(t-t')} \frac{\mathbf{R}(t')}{m} dt' \right|^2 \right\rangle \\ &\quad + 2e^{-\gamma t} \int_0^t e^{-\gamma(t-t')} \frac{\langle \mathbf{u}(0) \cdot \mathbf{R}(t') \rangle}{m} dt',\end{aligned}$$

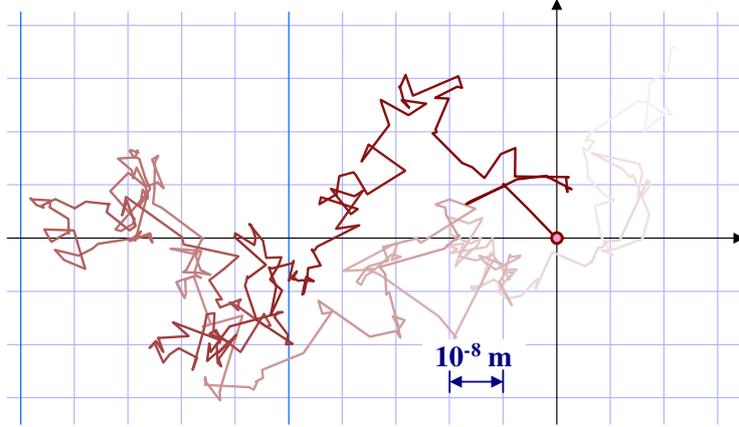


図 4.4: 銅の内部で衝突しながら移動する自由電子

が得られる。さらに、揺動力  $\mathbf{R}(t')$  が初期速度とは無相関のはずなので、 $\langle \mathbf{u}(0) \cdot \mathbf{R}(t') \rangle = 0$  ( $t \neq 0$ ) が成立する。この等式は次のように考えてもよい。速度と揺動力を、それぞれ、

$$\mathbf{u}(0) = \langle \mathbf{u}(0) \rangle + \sigma_u \mathbf{n}, \quad \mathbf{R}(t') = \sigma_R \mathbf{m}(t'),$$

とおく。ここで、 $\mathbf{n}$  と  $\mathbf{m}(t')$  は、それぞれ、平均値がゼロで分散が1の確率変数を成分とするベクトルである。しかも、これらの確率変数によるベクトルは互いに独立であるとする。さらに、 $\sigma_u$  と  $\sigma_R$  は、速度と揺動力の分散である。速度  $\mathbf{u}(0)$  はゼロ以外の平均値をもち、揺動力  $\mathbf{R}$  は平均値がゼロとした。このとき、 $\langle \mathbf{u}(0), \mathbf{R}(t') \rangle$  を計算すると、

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}(0) \cdot \mathbf{R}(t') \rangle &= \langle (\langle \mathbf{u}(0) \rangle + \sigma_u \mathbf{n}) \cdot \sigma_R \mathbf{m}(t') \rangle \\ &= \langle \langle \mathbf{u}(0) \rangle \cdot \sigma_R \mathbf{m}(t') \rangle + \langle \sigma_u \mathbf{n} \cdot \sigma_R \mathbf{m}(t') \rangle \\ &= \langle \mathbf{u}(0) \rangle \cdot \langle \sigma_R \mathbf{m}(t') \rangle = \langle \mathbf{u}(0) \rangle \cdot \langle \mathbf{R}(t') \rangle = 0, \end{aligned}$$

が得られる。第2行目から第3行目への数式変形は、 $\mathbf{n}$  と  $\mathbf{m}$  が独立であることを利用した。最終的には、 $\langle \mathbf{R}(t') \rangle = 0$  であるので速度と揺動力の内積の期待値がゼロになるのである。したがって、速度の自乗平均は、

$$\langle |\mathbf{u}(t)|^2 \rangle = e^{-2\gamma t} |\mathbf{u}(0)|^2 + \left\langle \left| \int_0^t e^{-\gamma(t-t')} \frac{\mathbf{R}(t')}{m} dt' \right|^2 \right\rangle, \quad (4.7)$$

のようになる。第1項が一意的に定まる値であり、第2項がゆらぎに相当する。この数式から、揺動力  $\mathbf{R}(t')$  がゆらぎの要因であることがわかる。

速度ゆらぎを表す数式 (4.7) の第2項を評価してみよう。第2項は2重積分:

$$\left\langle \left| \int_0^t e^{-\gamma(t-t')} \frac{\mathbf{R}(t')}{m} dt' \right|^2 \right\rangle = \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \langle \mathbf{R}(t_1) \cdot \mathbf{R}(t_2) \rangle e^{-\gamma(t-t_1)} e^{-\gamma(t-t_2)}, \quad (4.8)$$

に書き換えることができる。既に示した揺動力の各成分の相関性の関係より,

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{R}(t_1) \cdot \mathbf{R}(t_2) \rangle &= \langle R_x(t_1) \cdot R_x(t_2) \rangle + \langle R_y(t_1) \cdot R_y(t_2) \rangle + \langle R_z(t_1) \cdot R_z(t_2) \rangle \\ &= 6D_u \delta(t_1 - t_2),\end{aligned}$$

が得られるので, 二重積分で表現された (4.8) の右辺は,

$$\text{RHS of (4.8)} = 6D_u \int_0^t e^{-2\gamma(t-t_1)} dt_1 = \frac{3D_u}{\gamma} (1 - e^{-2\gamma t}),$$

のように計算できる。したがって,

$$\langle |\mathbf{u}(t)|^2 \rangle = e^{-2\gamma t} \langle |\mathbf{u}(0)|^2 \rangle + \frac{3D_u}{m^2\gamma} (1 - e^{-2\gamma t}), \quad (4.9)$$

なる関係式が得られる。考えている系が平衡状態であるならば,  $\langle |\mathbf{u}(t)|^2 \rangle$  は時刻に依存しないはずなので,

$$\langle |\mathbf{u}(t)|^2 \rangle = \langle |\mathbf{u}(0)|^2 \rangle = \frac{3k_B T}{m},$$

が成立するはずである。この等式は, 各自由度に対してエネルギー  $k_B T/2$  が分配されるという等分配の法則から得られる等式である。この等式を (4.9) に代入すると,

$$\frac{D_u}{m\gamma} = k_B T, \quad (4.10)$$

が得られる。この関係式は揺動力の強さを規定する重要な数式で, 後に何度かこの関係式を利用する。

自由電子は熱運動によって, 周囲との相互作用で軌道を乱数的に変化させながら拡散する。拡散によって生じた変位は速度  $\mathbf{u}(t)$  を時間について積分した結果であり,

$$\mathbf{x}(t) = \int_0^t \mathbf{u}(t) dt = \frac{1 - e^{-\gamma t}}{\gamma} \mathbf{u}(0) + \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 e^{-\gamma(t_1-t_2)} \frac{\mathbf{R}(t_2)}{m}, \quad (4.11)$$

によって記述できる。この積分の第2項は  $t_2$  についての積分が先行するので,  $\mathbf{R}(t_2)$  が邪魔をして積分できないように見える。しかし, それを  $t_1$  を先行するように書き換えられる。積分範囲を図4.5のように考えるのだ。図の網掛け部分が積分する領域である。上の数式では, 積分が図4.5 (a) のように  $t_2$  が先行している。しかし, 図4.5 (b) のように  $t_1$  が先行する形で数式を書き直すと,

$$\begin{aligned}\text{2nd term of RHS} &= \int_0^t dt_2 \int_{t_2}^t dt_1 e^{-\gamma(t_1-t_2)} \frac{\mathbf{R}(t_2)}{m} \\ &= \int_0^t \frac{1 - e^{-\gamma(t-t_2)}}{\gamma} \frac{\mathbf{R}(t_2)}{m} dt_2 = \int_0^t \frac{1 - e^{-\gamma t'}}{\gamma} \frac{\mathbf{R}(t-t')}{m} dt_2,\end{aligned}$$

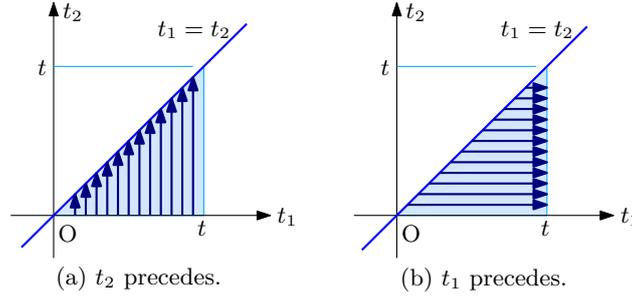


図 4.5: 二重積分の実行順序

のように計算できる。なお、第 2 行目での計算には、 $t' \equiv t - t_2$  なる置き換えを適用した。計算結果をまとめると、自由電子の変位は、

$$\mathbf{x}(t) = \frac{1 - e^{-\gamma t}}{\gamma} \mathbf{u}(0) + \frac{1}{m\gamma} \int_0^t (1 - e^{-\gamma t'}) \mathbf{R}(t - t') dt_2, \quad (4.12)$$

となる。この結果を用いて変位の自乗平均を計算すると、

$$\langle |\mathbf{x}(t)|^2 \rangle = \left( \frac{1 - e^{-\gamma t}}{\gamma} \right)^2 |\mathbf{u}(0)|^2 + \left( \frac{1}{m\gamma} \right)^2 \left\langle \left| \int_0^t (1 - e^{-\gamma t'}) \mathbf{R}(t - t') dt' \right|^2 \right\rangle, \quad (4.13)$$

が得られる。なお、この計算を実行するにあたり、速度と揺動力が独立であること、すなわち、 $\langle \mathbf{u}(0) \cdot \mathbf{R}(t - t') \rangle = 0$  に注意した。この数式の右辺の第 2 項は二重積分で計算できる。積分を実行すると、

$$\begin{aligned} \text{2nd term of RHS} &= \left( \frac{1}{m\gamma} \right)^2 \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 (1 - e^{-\gamma t_1})(1 - e^{-\gamma t_2}) \\ &\quad \times \langle \mathbf{R}(t - t_1) \cdot \mathbf{R}(t - t_2) \rangle \\ &= 6D_u \left( \frac{1}{m\gamma} \right)^2 \int_0^t (1 - e^{-\gamma t'})^2 dt', \end{aligned}$$

が得られる。積分を実行するにあたり、 $\langle \mathbf{R}(t - t_1) \cdot \mathbf{R}(t - t_2) \rangle = 6D_u \delta(t_1 - t_2)$  なる関係を利用した。この結果を代入すると、変位の自乗平均は、

$$\langle |\mathbf{x}(t)|^2 \rangle = \left( \frac{1 - e^{-\gamma t}}{\gamma} \right)^2 + 6D_u \left( \frac{1}{m\gamma} \right)^2 \int_0^t (1 - e^{-\gamma t'})^2 dt', \quad (4.14)$$

となる。さらに、 $\langle |\mathbf{u}(0)|^2 \rangle = 3k_B T/m$  と  $D_u = m\gamma k_B T$  を代入すると、

$$\langle |\mathbf{x}(t)|^2 \rangle = \frac{6k_B T}{m\gamma^2} (\gamma t + e^{-\gamma t} - 1), \quad (4.15)$$

が得られる。この変位の自乗平均は  $t \rightarrow \infty$  の極限で、

$$\langle |\mathbf{x}(t)|^2 \rangle \simeq \frac{6k_B T}{m\gamma} t = \frac{6D_u}{m^2\gamma^2} t \quad (t \rightarrow \infty), \quad (4.16)$$

のように時間に比例することが導かれる。これは、次の項で一般の拡散現象を比較として説明するが、その拡散によって生じる変位と合致する。一方、微小時間における変位については、指数関数が、 $e^{-\gamma t} \simeq 1 - \gamma t + \gamma^2 t^2 / 2$  のようにマクローリン展開できることに注意すると、 $t \rightarrow 0$  の極限で、

$$\langle |\mathbf{x}(t)|^2 \rangle \simeq \frac{3k_B T}{m} t^2 \quad (t \rightarrow 0),$$

が得られる。この数式の意味は、 $\langle |\mathbf{u}(t)|^2 \rangle = 3k_B T / m$  であることを考えれば単純である。上の数式は、平方根をとれば、微小時間における変位が、

$$\sqrt{\langle |\mathbf{x}(t)|^2 \rangle} \simeq \sqrt{\langle |\mathbf{u}(t)|^2 \rangle} t,$$

と書けることを示唆している。この近似式は、微小時間であれば自由電子が等速度運動しているとみなせることを意味しているのだ。

### 4.2.3 拡散現象との比較

自由電子が導体の構成原子と衝突を繰り返しながら移動する様子は拡散現象とまったく同じである。その理由で、前項で定式化した変位の自乗平均  $\langle |\mathbf{x}(t)|^2 \rangle$  は、拡散現象における変位の自乗平均とよい対応関係がある。

離散化された1次元の空間座標と時間座標を考えよう。空間座標は  $\Delta x$  の間隔で、時間座標は  $\Delta t$  の間隔で離散化されている。時刻  $t$  において、位置  $x$  における、ある溶液の濃度が  $\rho(x, t)$  であるとしよう。この溶液の濃度は、 $\Delta t$  の時間を経ると、それぞれ2分の1の確率で分裂して座標軸の正と負の方向に  $\Delta x$  だけ変位する。すると、時刻  $t + \Delta t$  における濃度は、

$$\rho(x, t + \Delta t) = \frac{\rho(x - \Delta x, t) + \rho(x + \Delta x, t)}{2},$$

のように記述できる。ここで、 $\Delta x$  と  $\Delta t$  が十分に小さい値とし、上の等式をテイラー展開すると、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta t = \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2},$$

が得られる。この設定を3次元空間に拡張するのは容易である。カルテシアン座標の  $x, y, z$  が、どの方向にも同じ間隔  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = \Delta a$  で離散化されているとする。時間  $\Delta t$  を経たとき、離散化した隣の座標に6分の1の確率で移ると仮定すればよい。すると、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta t = \frac{\Delta a^2}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2},$$

が導かれるはずである。位置と時間の離散化の単位がゼロに近づけた極限で  $\Delta a^2 / 2 \Delta t = D$  を仮定すると、上の方程式は、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - D \nabla^2 \rho = 0, \quad (4.17)$$

のように書き換えられる。この方程式は**拡散方程式**と呼ばれる。また、 $D$ は拡散係数である。ここで、 $\mathbf{j} \equiv -D\nabla\rho$ とおくと、

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0,$$

が得られる。この方程式は連続の方程式であり、 $\mathbf{j}$ は流れを表すベクトルである。つまり、拡散とは流れ $\mathbf{j}$ によって濃度が運び去られる現象である。流れの方向は、

$$\mathbf{j} = -D\nabla\rho,$$

より、濃度が高い場所から低い場所に向かうことがわかるだろう。この数式のように流れが濃度の勾配に比例し、高い場所から低い場所に向かう規則性は、**フィックの法則**と呼ばれる。

拡散方程式の解法を示しておこう。拡張方程式の解を求めるにあたり、解 $\rho(\mathbf{x}, t)$ が空間座標 $\mathbf{x}$ と時間座標 $t$ で変数分離し、空間座標についてのフーリエ変換:

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \Phi(t) A(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3\mathbf{x},$$

で定義してみよう。この関数を拡散方程式に代入すると、

$$-(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) D \Phi(t) = \frac{\partial\Phi}{\partial t},$$

のように、 $\Phi(t)$ についての微分方程式が得られる。この微分方程式を解くと、

$$\Phi(t) = C e^{-(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) Dt} = C e^{-|\mathbf{k}|^2 Dt},$$

が得られる。この解を $\rho(\mathbf{x}, t)$ の定義に代入すると、

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int A(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - |\mathbf{k}|^2 Dt} d^3\mathbf{k}, \quad (4.18)$$

が導かれる。この数式から明らかかなように、 $\rho(\mathbf{x}, t)$ のフーリエ変換は、

$$\hat{\rho}(\mathbf{k}; t) = A(\mathbf{k}) e^{-|\mathbf{k}|^2 Dt},$$

である。この数式から、 $A(\mathbf{k})$ は $t=0$ のときのフーリエ変換であることがわかる。特殊な解として、 $t=0$ のとき $\rho(\mathbf{k}, t) = \delta^3(\mathbf{x})$ 、すなわち、3次元のデルタ関数であるとしよう。その場合、 $A(\mathbf{k}) = 1$ である。すると、フーリエ変換 $\hat{\rho}(\mathbf{k})$ は、

$$\hat{\rho}(\mathbf{k}; t) = e^{-|\mathbf{k}|^2 Dt}, \quad (4.19)$$

となる。ここで、確率統計の公式によると確率密度関数:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2},$$

のフーリエ変換は,

$$F(k) = e^{k^2 \sigma^2 / 2},$$

となる。つまり, (4.19) のようなスペクトルをもつ関数は分散が  $2Dt$  である正規分布であることを意味している。したがって, 拡散方程式の解は,

$$\rho(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{2(4\pi Dt)^{3/2}} e^{-|\mathbf{x}|^2 / 4Dt},$$

となるはずである。これは  $\hat{\rho}(\mathbf{x}; t)$  を逆フーリエ変換しても同一の結果が得られる。この確率密度関数を用いて, 変位の自乗平均  $\langle |x(t)|^2 \rangle$  を計算するならば,

$$\langle |\mathbf{x}(t)|^2 \rangle = \frac{1}{2(4\pi Dt)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz (x^2 + y^2 + z^2) e^{-(x^2 + y^2 + z^2) / 4Dt},$$

なる積分を実行すればよい。この積分を実行するには,

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta,$$

なる座標変換にて球面座標への変換をするのが有効である。球面座標への座標変換によって, 体積素が  $dx dy dz = r^2 \sin^2 \theta dr d\theta d\varphi$  となることに注意して積分を実行すると,

$$\begin{aligned} \langle |\mathbf{x}(t)|^2 \rangle &= \frac{1}{2(4\pi Dt)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} dr r^4 e^{-r^2 / 4Dt} \\ &= \frac{4\pi}{2(4\pi Dt)^{3/2}} \int_0^{\infty} r^4 e^{-r^2 / 4Dt} dr \\ &= \frac{4\pi \cdot 6Dt}{2(4\pi Dt)^{3/2}} \int_0^{\infty} r^2 e^{-r^2 / 4Dt} dr \\ &= \frac{3}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_0^{\infty} r^2 e^{-r^2 / 4Dt} dr = 6Dt, \end{aligned}$$

が得られる。つまり, ある基準の時刻で原点に存在していた物質は, 時間  $t$  が経過すると拡散し, その位置の分散が  $6Dt$  となっているのである。位置の分散は時間に比例するのだ。

拡散と自由電子の運動を結び付けよう。自由電子は衝突を繰り返しながら, 任意の方向に移動する。多数の自由電子を同じ場所に注入したならば, 異なる経路をとりながら, 四方八方に自由電子は拡散することだろう。つまり, 自由電子の運動は拡散方程式でも説明できるのだ。

前項で自由電子の変位の自乗平均は, 経過時間を大きくとれば時間に比例することを示した。また, 拡散方程式の解においても変位の自乗平均は  $6Dt$  となることを示した。したがって, 自由電子の運動において,

$$D = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle \mathbf{x}(t) |^2 \rangle}{6t}, \quad (4.20)$$

を拡散係数の定義としよう。この定義は、

$$\begin{aligned} D &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{6t} \left\langle \left| \int_0^t \mathbf{u}(t') dt' \right|^2 \right\rangle \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{6t} \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \langle \mathbf{u}(t_1) \cdot \mathbf{u}(t_2) \rangle, \end{aligned} \quad (4.21)$$

のような2重積分で書くことができる。座標軸の選び方が自由であるので各速度成分は同じ統計にしたがう。しかも、異なる速度成分は互いに独立である。それらの性質を数式で表現すると、

$$\begin{aligned} \langle u_x(t_1) u_x(t_2) \rangle &= \langle u_y(t_1) u_y(t_2) \rangle = \langle u_z(t_1) u_z(t_2) \rangle, \\ \langle u_x(t_1) u_y(t_2) \rangle &= \langle u_y(t_1) u_z(t_2) \rangle = \langle u_z(t_1) u_x(t_2) \rangle = 0, \end{aligned}$$

となる。これらの関係式を利用して(4.21)を書き換えると、

$$D = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \langle u_x(t_1) u_x(t_2) \rangle \quad (4.22)$$

が得られる。平衡状態を仮定すると、 $\langle u_x(t_1) u_x(t_2) \rangle$  は3次元空間全体で一様であるので、 $t_1 - t_2$  のみの関数である。そこで、 $\phi(t_1 - t_2) \equiv \langle u_x(t_1) u_x(t_2) \rangle$  なる関数を定義すると、拡散係数  $D$  は、

$$D = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \phi(t_1 - t_2),$$

となる。この数式の2重積分を取り出して計算すると、

$$\begin{aligned} &\int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \phi(t_1 - t_2) \\ &= \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \phi(t_1 - t_2) + \int_0^t dt_1 \int_{t_1}^t dt_2 \phi(t_1 - t_2) \\ &= \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \phi(t_1 - t_2) + \int_0^t dt_2 \int_0^{t_2} dt_1 \phi(t_1 - t_2) \\ &= \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \phi(t_1 - t_2) + \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \phi(t_2 - t_1), \end{aligned}$$

となる。第2行目では、積分区間を  $[0, t]$  を  $[0, t_1]$  と  $[t_1, t]$  に分割した。第3行目では、第2項を図4.6にしたがって積分の順序を交換した。この図において、積分範囲は網掛け部分である。第2行目は図4.6(a)のように  $t_2$  についての積分が先行し、第3行目では同図(b)のように  $t_1$  についての積分が先行している。第4行目では、 $t_1$  と  $t_2$  を交換した。ここで、 $t' \equiv t_1 - t_2$  なる置き換えを適用すると、

$$\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \phi(t_1 - t_2) = \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt' [\phi(t') + \phi(-t')],$$

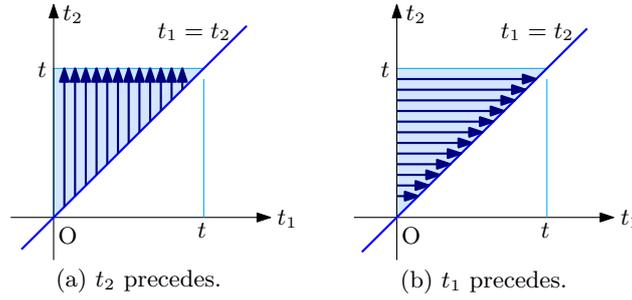


図 4.6: 二重積分の実行順序

が得られる。ここで、 $\phi(t') = \langle u_x(t+t') u_x(t) \rangle$  が  $t'$  のみの関数であると考え、その関数値は  $t$  に依存しないことになる。その自由度を利用し、 $\phi(-t') = \langle u_x(t-t') u_x(t) \rangle$  について  $t \mapsto t+t'$  とおくと、

$$\phi(t') = \langle u_x(t+t'-t') u_x(t+t') \rangle = \langle u_x(t) u_x(t+t') \rangle = \phi(-t'),$$

が得られる。つまり、 $\phi(t')$  は時間について偶関数である。よって、上で計算を続行していた2重積分は、

$$\int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \phi(t_1 - t_2) = 2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt' \phi(t'),$$

のように書き換えることができる。この2重積分も図4.6と同じ考え方で積分順序を交換することができる、

$$\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt' \phi(t') = \int_0^t dt' \int_{t'}^t dt_1 \phi(t') = \int_0^t (t-t') \phi(t') dt',$$

のように計算できる。今回の場合、図4.6の縦軸が  $t_1$ 、横軸が  $t'$  と読み替え、(b)の実行順序から(a)の順序に変更した。したがって、拡散係数  $D$  は、

$$D = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \left(1 - \frac{t'}{t}\right) \phi(t') dt' = \int_0^t \phi(t') dt', \quad (4.23)$$

となる。つまり、拡散係数は速度の相関関数を、 $t'$  がゼロから無限大まで積分した結果である。第4.3.3で改めて導出するが、平均の衝突周期を  $\tau$  としたとき、異なる時刻における速度の内積の平均値は、

$$\langle u_x(t) u_x(0) \rangle = \frac{k_B T}{m} e^{-t/\tau},$$

のようになる。この関係式を(4.23)に代入すると、

$$D = \frac{k_B T}{m} \tau, \quad (4.24)$$

であることが導かれる。一方、(4.16)と(4.20)を比較すると、 $D = k_B T / m \gamma$  が得られる。比較によって得られた拡散係数は、 $\tau = 1/\gamma$  であれば(4.24)と一致する。

## 4.3 導体内の電子の運動

準備が整ったので、電気回路における雑音の定式化にとりかかろう。電流の正体は導体内の自由電子の運動である。気体分子と同様、自由電子も等分配の法則によって、温度  $T$  の環境では一つの自由度あたり  $k_B T/2$  のエネルギーが分配されている。その運動エネルギーで運動し、衝突を繰り返すと考えると、電子の運動で決まる電流はゆらぎをもっている。そのゆらぎが熱雑音となる。本節で示すように、熱雑音は電気抵抗と密接な関係がある。

### 4.3.1 パワースペクトル

雑音のように乱数的な現象は、大域的な性質を理解することが大切である。そのために有用な手法としてパワースペクトルが挙げられる。パワースペクトルは、周波数における電力の分布を表現する手段である。

雑音を電圧として観測したとき  $t$  の関数で表現できると仮定し、それを  $V(t)$  としよう。乱数的な電圧なので、解析的に積分することはできないが、

$$V(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{V}(\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

のように逆フーリエ変換で表現できるものとする。ただし、 $\hat{V}(\omega)$  は  $V(t)$  のフーリエ変換であり、

$$\hat{V}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} V(t) e^{-i\omega t} dt,$$

によって定義される。電気抵抗  $R$  に電圧  $V(t)$  が印加されているとき、電気抵抗で消費される電力は  $|V(t)|^2/R$  で計算できる。これを実数の時間全体にわたって積分すると、

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|V(t)|^2}{R} dt = \frac{1}{R} \int_{-\infty}^{\infty} V(t) V^*(t) dt \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2 R} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_2 \hat{V}(\omega_1) e^{i\omega_1 t} \cdot \hat{V}^*(\omega_2) e^{-i\omega_2 t} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2 R} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_2 \hat{V}(\omega_1) \hat{V}^*(\omega_2) e^{i(\omega_1 - \omega_2)t} \\ &= \frac{1}{2\pi R} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_2 \hat{V}(\omega_1) \hat{V}^*(\omega_2) \delta(\omega_1 - \omega_2), \end{aligned}$$

のように計算を実行できる。ここで  $\delta(\omega_1 - \omega_2)$  はディラックのデルタ関数であり、最終行への数式変形にデルタ関数のフーリエ変換の公式:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega = \delta(t),$$

を利用した。デルタ関数の性質に注意して最終行の積分を実行すると、

$$E = \frac{1}{2\pi R} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{V}(\omega)|^2 d\omega, \quad (4.25)$$

が得られる。この公式はパーセバルの公式と呼ばれる。この公式によると、角速度 $\omega$ において、単位角速度あたり $|\hat{V}(\omega)|^2$ のエネルギーが含まれることを意味する。そのため、 $|\hat{V}(\omega)|^2$ は**エネルギースペクトル**と呼ばれる。

得られた公式は便利なようであるが、電力を無限に蓄積した結果を対象にするため工学において扱いづらい。電気工学では単位時間あたりのエネルギーの変化、すなわち、電力を取り扱うことが多い。その理由でエネルギースペクトルを電力スペクトルに変換してみよう。もっとも単純な方法は、エネルギーを観測時間で除して平均電力を算出することだろう。それを単純に数式として書くと、

$$P_{\text{mean}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{R} \int_{-T/2}^{T/2} |V(t)|^2 dt,$$

となる。この数式では積分時間を $T$ としたが、その積分時間を無限大に近づけても平均電力として意味がある値が得られることを期待して、 $T \rightarrow \infty$ の極限をとるように数式を書いている。計算をするにあたり、便宜的に、

$$V(t; T) = \begin{cases} V(t) & \text{if } |t| \leq T/2, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

なる関数 $V(t; T)$ を定義する。この関数のフーリエ変換は、

$$\hat{V}(\omega; T) = \int_{-\infty}^{\infty} V(t; T) e^{-i\omega t} dt,$$

である。関数 $V(t; T)$ が $|t| > T/2$ であるにも関わらず、積分範囲は実数全体である。フーリエ変換の積分範囲を有限な領域に制限すると、フーリエ変換は離散的になるのだが、実数全体を積分範囲としているので、フーリエ変換 $\hat{V}(\omega; T)$ は連続関数となる。

ゼロでない時刻を制限した関数 $V(t; T)$ と、そのフーリエ変換 $\hat{V}(\omega; T)$ を利用して、消費電力の平均値 $P_{\text{mean}}$ を計算すると、

$$\begin{aligned} P_{\text{mean}} &= \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{R} \int_{-T/2}^{T/2} V(t) V^*(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{R} \int_{-\infty}^{\infty} V(t; T) V^*(t; T) dt \\ &= \frac{1}{2\pi TR} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{V}(\omega; T) \hat{V}^*(\omega; T) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi TR} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} V(t_1; T) V^*(t_2; T) e^{-i\omega(t_1-t_2)} dt_1 dt_2, \end{aligned}$$

が導かれる。ここで、さらに電力の観測値の平均をとると、

$$\langle P_{\text{mean}} \rangle = \frac{1}{2\pi TR} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle V(t_1; T) V^*(t_2; T) \rangle e^{-i\omega(t_1-t_2)} dt_1 dt_2,$$

となる。この数式の被積分関数:

$$\phi(t_1 - t_2; T) \equiv \langle V(t_1; T) V^*(t_2; T) \rangle,$$

は相関関数である。前に調べてわかったように、相関関数は時間差  $t_1 - t_2$  にしか依存しない。ただし、積分時間を明示するため  $T$  をパラメータとして記しておいた。相関関数は  $\phi(t_1 - t_2; T)$  は、前に導いたように時間反転に関して複素共役となるので、 $\phi(t_1 - t_2; T) = \phi^*(t_2 - t_1; T)$  が成立する。新しい記号  $\phi(t_1 - t_2; T)$  を用いて数式を書き直すと、

$$\langle P_{\text{mean}} \rangle = \frac{1}{2\pi TR} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t_1 - t_2; T) e^{-i\omega(t_1-t_2)} dt_1 dt_2,$$

が成立する。この数式について  $\phi(t_1 - t_2; T)$  が  $|t| > T/2$  でゼロになる関数から生成されているので、平均電力  $\langle P_{\text{mean}} \rangle$  は、

$$\langle P_{\text{mean}} \rangle = \frac{1}{2\pi TR} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} \phi(t_1 - t_2; T) e^{-i\omega(t_1-t_2)} dt_1 dt_2,$$

のように書くことができる。さらに、被積分関数が  $t_1 - t_2$  の関数であるので、 $t_1 - t_2$  が一定に保つような積分変数、すなわち、 $t \equiv t_1 - t_2$  なる積分変数を用いて数式を書き直すと、

$$\begin{aligned} \langle P_{\text{mean}} \rangle &= \frac{1}{2\pi TR} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-T/2}^{T/2} (T - |t|) [\phi(t; T) e^{-i\omega t} + \phi^*(t; T) e^{i\omega t}] dt \\ &= \frac{1}{2\pi TR} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-T/2}^{T/2} (T - |t|) \text{Re} \phi(t; T) e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{\pi TR} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_0^{T/2} (T - |t|) \text{Re} \phi(t; T) e^{-i\omega t} dt, \end{aligned}$$

のように書くことができる。この数式の第1行目では  $\phi(-t; T) = \phi^*(t; T)$  なる性質を利用した。複素共役の関係にある二つの複素数の和が複素数の実部を与えるので、第2行目が得られる。まぎらわしい記号ではあるが、ローマン体の  $\text{Re}$  とイタリック体の  $\text{Re}$  は意味が異なることを注釈しておく。ローマン体の  $\text{Re}$  は複素数の実部を与える演算子である。一方、イタリック体の  $\text{Re}$  は  $R$  と  $e$  との積である。話を戻し、 $\phi(-t; T) = \phi^*(t; T)$  なる性質を再度適用すると第3行目が得られる。ここで、 $T \rightarrow \infty$  の極限をとると、

$$\langle P \rangle = \frac{1}{\pi R} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_0^{\infty} \text{Re} \phi(t) e^{-i\omega t} dt,$$

が得られる。ただし、相関関数  $\phi(t; T)$  の  $T \rightarrow \infty$  での極限を  $\phi(t)$  とおいた。さらに、 $\phi(t)$  が実数関数である場合、電力平均は、

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= \frac{1}{\pi R} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_0^{\infty} \phi(t) \cos \omega t dt \\ &= \frac{2}{\pi R} \int_0^{\infty} d\omega \int_0^{\infty} \phi(t) \cos \omega t dt, \end{aligned}$$

なる公式が得られる。この公式は**ウィーナー・ヒンチンの定理**と呼ばれる。ウィーナー・ヒンチンの定理によると、角速度  $\omega$  において単位角速度あたりに、

$$S(\omega) = \frac{2}{\pi R} \int_0^{\infty} \phi(t) \cos \omega t dt, \quad (4.26)$$

の消費電力が含まれていることを意味する。このように定義された  $S(\omega)$  はパワースペクトルと呼ばれる。一般にパワースペクトルは周波数  $\nu$  の関数で書かれることが多いので、その形に書き換えてみよう。書き換えるには、 $S(\omega) d\omega = S(\nu) d\nu$  に注意して、 $\omega = 2\pi\nu$  を代入すると、

$$S(\nu) = \frac{4}{R} \int_0^{\infty} \phi(t) \cos 2\pi\nu t dt, \quad (4.27)$$

が得られる。熱雑音の周波数における電力分布は得られたウィーナー・ヒンチンの定理を利用して計算できるのだ。具体的に計算するには、電圧の相関関数を計算すればよい。

### 4.3.2 導体内部の自由電子

前項で熱雑音の電力の周波数における分布を計算する数式を導出した。その結果、計算をするには雑音電圧の相関関数が必要であることがわかった。本項では、導体内を運動する電子について考察し、雑音電圧の相関関数を定式化する。

図 4.7 に示すように、断面積が  $A$  で長さ  $l$  の導体内を運動する電子について考えよう。導体内の電子の個数密度を  $n$ 、電子の電荷を  $e$ 、電子の平均速度を  $\langle u \rangle$  とすると、導体を流れる電流  $J$  は、

$$J = Ane\langle u \rangle,$$

である。電流は単位時間に流れる電荷であることから、この数式が得られる。電流が比較的小さいとき、電流と電圧には比例関係が成立することが経験的に知られている。それ

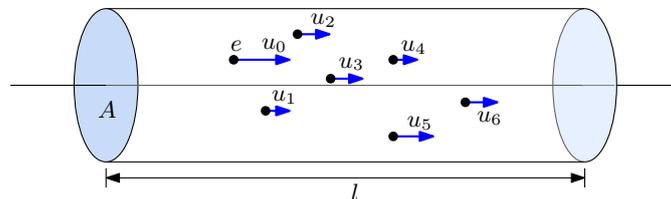


図 4.7: 導体内部を運動する自由電子

が、オームの法則と呼ばれる法則であり、電圧を電流の関数  $V = RJ$  で記述したとき比例係数が電気抵抗  $R$  である。その法則を用い、電気抵抗が  $R$  である導体の両端の電位差 (電圧) は、

$$V = RAn e \langle u \rangle,$$

のように書くことができる。導体内部を運動する第  $k$  番目の自由電子の速度を  $u_k$  とすると、自由電子の速度の総和は、

$$\sum_{k=1}^N u_k = A \ln \langle u \rangle,$$

となるはずである。なお、総和の上限に記述された  $N$  は導体内に含まれる自由電子の個数であり、 $N = A \ln$  が成立する。この関係式を利用して電圧の表現式を書き直すと、

$$V = \frac{Re}{l} \sum_{k=1}^N u_k, \quad (4.28)$$

が得られる。この数式はあたかも、一つひとつの自由電子がつくる微小な電圧成分の総和が  $V$  になるように見える。しかし、複数の電圧の総和を全体の電圧とするのは、直列接続された電気回路であり、ここで議論しているモデルとは一致しない。この数式は、電圧を物理的に説明できないように見える。実際のところ、抵抗  $R$  を他の物理量で表現すればその問題は解決するので、そのときに解決方法を説明する。

**電気抵抗のメカニズム** 導体に流れる電流  $J$  は自由電子の平均速度  $\langle u \rangle$  に比例するので、一定の電圧  $V$  が与えられると、一定の電流が流れる。一定の電流が流れるということは、自由電子の平均速度  $\langle u \rangle$  は一定速度であることを意味する。長さ  $l$  の電気抵抗に電圧  $V$  を印加すると、電気抵抗内の電場は  $E = V/l$  となる。すると、自由電子は電場から  $eV/l$  の力を受け続けていることになるので、自由電子は一定速度を保てず加速するだろう。つまり、何らかの力がその加速を阻止しなければ、電流が一定ではなくなるはずである。自由電子に作用する力を記述した運動方程式として前節で、

$$m \frac{du}{dt} = eE - \gamma mu + R(t),$$

なるランジュバン方程式を紹介した。この方程式は、ベクトルのうち電流方向の成分のみを書いている。この方程式を数多くの自由電子で平均すると、

$$m \frac{d\langle u \rangle}{dt} = eE - \frac{m\langle u \rangle}{\tau}, \quad (4.29)$$

のようになる。なお、自由電子どうしの相互作用を表す右辺の第3項について  $\langle R(t) \rangle = 0$  であることを用いた。なお、右辺の第2項について、自由電子の粘性抵抗として  $\gamma = 1/\tau$  とおいた。

平均的な運動方程式 (4.29) の右辺の第2項は自由電子が導体を構成する原子と衝突することによる抵抗力を表現している。衝突による抵抗力として、1回の衝突で受ける運動量変化を  $m\langle u \rangle$  と仮定し、その運動量に単位時間あたりの衝突回数  $1/\tau$  を乗じた。なぜなら、単位時間あたりの運動量の変化は、自由電子に作用する力と等しいからである。なお、 $\langle u \rangle$  はすべての自由電子の平均速度である。例えば、衝突時の自由電子の平均速度は  $3\langle u \rangle/2$  で、衝突後に  $\langle u \rangle/2$  まで減速されると考えれば、1回の衝突で  $m\langle u \rangle$  の運動量が減少する。

自由電子の速度成分はそれだけではない。自由電子が文字通り自由に運動できるのであれば、気体分子と同様に熱運動しているはずである。導体を構成する原子も同様に熱運動しているが、構成原子は自由運動ではなく、格子振動である。後に計算するように、自由電子の運動速度のうち、電流を担う速度  $\langle u \rangle$  よりも熱運動に起因する速度のほうが大きいのである。つまり、図 4.7 のように自由電子の運動方向がそろっているのは真実でなく、本当は図 4.4 で示したように、自由電子は導体内を四方八方に飛び回っている。ただし、その速度成分に微妙な偏りがあり、速度の平均値がゼロからずれる。平均値のゼロからのずれが電流に相当するのだ。自由電子は衝突することによって、電流に起因する運動エネルギーを部分的に導体の構成原子に渡すのだ。それによって、自由電子は電流に相当する速度を一時的に失う。失ったエネルギーは、再び、導体内の電場から供給され、供給と消費が釣り合った状態がオームの法則で計算される電圧と電流の関係である。電圧の印加によって生じる電流が一定であるためには自由電子の平均速度  $\langle u \rangle$  は加速してはならないので、(4.29) の右辺がゼロである条件を課して、

$$\langle u \rangle = \frac{e\tau}{m} E,$$

が得られる。なお、単位時間あたりの衝突回数の逆数、すなわち、 $\tau$  は自由電子が他の自由電子と衝突するまでの平均時間であり、**緩和時間**と呼ばれる。

自由電子の緩和時間と平均速度との積  $\langle u \rangle \tau$  が自由電子の平均自由行程になるかもしれないが、それは正しくない。上で述べたように、電流を担う平均速度  $\langle u \rangle$  よりも熱運動に起因する運動速度の方が大きいからである。具体的な数値で事実を示すため、断面積  $1 \text{ mm}^2$  で長さ  $1 \text{ m}$  の銅線に電圧を印加して  $1 \text{ A}$  の電流を流す場合を考えよう。銅の原子量は  $63.5 \text{ g/mol}$  であり、密度は  $8.94 \text{ g/cm}^3$  である。このデータから  $1 \text{ m}^3$  に含まれる銅原子の個数密度を計算すると、 $n = 8.47 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$  となる。銅原子は1個だけ自由電子をもつので、この個数密度は自由電子の個数密度と同一である。導体内を流れる電流が  $J = Ane\langle u \rangle$  であることを利用すると、自由電子の平均速度  $\langle u \rangle = 7.37 \times 10^{-5} \text{ m/s}$  が得られる。なお、自由電子が運ぶ電荷は  $1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$  である。つまり、電流を担う速度  $\langle u \rangle$  は、わずか秒速  $0.0737$  ミリメートルにすぎない。熱運動に起因する運動速度は  $\langle u \rangle$  よりもかなり大きな速度である。自由電子が導体の構成原子と無関係に動くと考えると、自由電子一つひとつが理想気体の分子と同様に自由度1つあたりエネルギー  $k_B T/2$  が分配されているはずだ。自由電子は単原子分子と同じ構造であるので、運動エネルギーは  $3k_B T/2$  となる。温度  $290 \text{ K}$  の環境でのエネルギーから電子の速度を計算すると、自由電子の自乗平均速度は  $\sqrt{\langle u^2 \rangle} = 1.15 \times 10^5 \text{ m/s}$  となる。そのうち、電流方向の速度成分は、 $\sqrt{\langle u_x^2 \rangle} = 6.64 \times 10^4 \text{ m/s}$  となる。自由電子の実際に運動速度に対する電流に相当する速度の比が、 $\langle u \rangle / \sqrt{\langle u_x^2 \rangle} = 3.70 \times 10^{-10}$  であることから、電流に相当する速度成分がいかに小さいかがわかるだろう。

自由電子はあらゆる方向に勝手に運動して、導体を構成する原子に頻繁に衝突している

のだ。どれくらい頻繁に衝突しているかが電気抵抗から計算できる。温度 290 K における銅の電気抵抗率  $1.66 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$  から、想定している銅線は  $1.66 \times 10^{-2} \Omega$  の電気抵抗をもつ。オームの法則によると、その銅線に 1 A の電流を流すために  $1.66 \times 10^{-2} \text{ V}$  の電圧を印加していることがわかる。このことから、銅線の内部には  $E = V/l = 1.66 \times 10^{-2} \text{ V/m}$  の電場が発生している。この電場が電子に与える加速度は、 $a = eE/m = 2.86 \times 10^9 \text{ m/s}^2$  となる。緩和時間は、既に述べたように、電子の速度を  $\langle u \rangle$  だけ変化させる時間であるので、 $\tau = \langle u \rangle / a = 2.56 \times 10^{-14} \text{ s}$  となる。つまり、自由電子は 1 秒間に 39 兆回も衝突を繰り返していることになる。平均自由行程は、 $\tau$  に  $\langle u \rangle$  でなく  $\sqrt{\langle u^2 \rangle}$  を乗じるべきであり、その結果、平均自由行程は  $2.96 \times 10^{-9} \text{ m}$  が得られる。これは銅原子の直径の約 10 倍の長さである。そのように衝突を繰り返しながら移動する電子の軌跡を計算した結果が、実は、図 4.4 だったのだ。その図は、自由電子の平均自由行程を用いてシミュレーションした軌跡である。平均自由行程は導体を構成する原子の配列で決まると考えれば、多少、温度や圧力に関係するものの、ほとんど定数と考えてよいだろう。緩和時間  $\tau$  は平均自由行程を  $\sqrt{\langle u^2 \rangle}$  で除した商である。熱運動に起因する速度が電流を担う速度  $\langle u \rangle$  の  $10^{-10}$  倍程度の小さい値であることから、温度が一定ならば  $\sqrt{\langle u^2 \rangle}$  はほぼ定数であると考えてよい。したがって、緩和時間  $\tau$  もほぼ定数である。

電気抵抗と自由電子密度の関係を考察しよう。単位面積あたり、単位時間あたりに流れる電荷、すなわち、電流密度は、

$$j = ne\langle u \rangle = \frac{ne^2\tau}{m} E,$$

となる。ここで、電気伝導率  $\sigma_c \equiv j/E$  なるパラメータを導入すると、

$$\sigma_c = \frac{ne^2\tau}{m},$$

のように書くことができる。電気伝導率は電流の流しやすさを表す指標であり、前に銅線の電気抵抗を計算するときに用いた電気抵抗率  $\rho$  とは逆数の関係 ( $\rho = 1/\sigma$ ) がある。緩和時間が長ければ、その間に電子を電場に沿って加速することができるため電気伝導率が大きくなる。さらに、電気伝導率は、 $R = l/A\sigma$  によって電気抵抗と関係づけられる。具体的に、電気抵抗を数式で書くと、

$$R = \frac{l}{A\sigma} = \frac{ml}{Ane^2\tau},$$

が得られる。先ほど電圧を電子一つひとつの速度  $u_k$  を用いて記述したとき、電圧があたかも電子一つひとつがつくる微小電圧の和であるかのような数式になっていた。そのような誤解は、得られた電気抵抗  $R$  の数式を代入すれば解消できる。代入すると電圧は、

$$V = \frac{Re}{l} \sum_{k=0}^{N-1} u_k = \frac{m}{Ane\tau} \sum_{k=0}^{N-1} u_k = \frac{ml}{e\tau} \cdot \frac{1}{Aln} \sum_{k=0}^{N-1} u_k = \frac{ml}{e\tau} \langle u \rangle,$$

のように表現できる。この数式変形において、 $Aln$  が注目する導体内部の自由電子の総数であることに注意するのだ。このように数式変形すると、電圧は自由電子の平均速度に比例すると解釈できるのだ。なお、分母に自由電子の個数密度  $n$  が含まれるから、平均速度に比例するという解釈が可能になったことを強調しておく。

電気回路の理論によると、単位時間あたりに電流が導体内部で消費するエネルギー、すなわち、電力は  $P = VJ$  である。それについて、自由電子の運動の観点で考察しよう。上で述べたように、自由電子には電圧によって  $eV/l$  の力が作用するが、自由電子同士で衝突を繰り返すため、平均速度は一定である。つまり、電場から与えられたエネルギーが、すべて導体内で消費されるのだ。平均速度が  $\langle u \rangle$  である自由電子が消費する電力の平均値は  $eV\langle u \rangle/l$  となるはずである。この微小電力に、導体内の自由電子の個数  $Aln$  を乗じると、

$$P = Aln \cdot \frac{eV\langle u \rangle}{l} = V \cdot Ane\langle u \rangle = VJ,$$

のように確かに消費電力は電圧と電流の積になっている。消費電力は、自由電子が運動の過程で衝突して失うエネルギーなのだ。失ったエネルギーは導体内部の分子に吸収されるので、導体の温度が上昇するはずだ。

消費電力についてももう少し踏み込んでみよう。電圧  $V$  も自由電子の速度で記述できることは既に述べた。その関係式を用いて消費電力を記述すると、

$$\begin{aligned} P = VJ &= \frac{ml}{e\tau} \langle u \rangle \cdot Ane\langle u \rangle = \frac{Alnm}{\tau} \langle u \rangle^2 \\ &= \frac{m}{Aln\tau} \left| \sum_{k=0}^{N-1} u_k \right|^2 = \frac{m}{Aln\tau} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} u_k u_j^*, \end{aligned}$$

となる。自由電子一つひとつの速度  $u_k$  を明示的に書くとこのように総和記号が二重になって表れるのである。

### 4.3.3 電圧の相関関数

雑音の周波数成分を評価するには、ウィーナー・ヒンチンの定理が便利であることを前項で述べた。ウィーナー・ヒンチンの定理を用いるには、電圧の相関関数を評価しなければならない。本項では自由電子の運動に着目して電圧の相関関数を計算する。

導体内部に存在する自由電子の速度に着目しよう。第  $k$  番目の自由電子の速度を  $u_k$  としたとき、長さ  $l$  の導体の両端の電位差は、

$$V(t) = \frac{Re}{l} \sum_{k=1}^N u_k(t),$$

のように書ける。その導体の電気抵抗を  $R$  とした。乱数的である電圧と自由電子の速度を時間の関数とすることには無理があるかもしれないが、あえて時間の関数  $V(t)$ ,  $u_k(t)$  として記述した。上に記述した  $V(t)$  の表現式を用いて電圧の相関関数を書くと、

$$\phi(t_1 - t_2) = \langle V(t_1) V^*(t_2) \rangle = \frac{R^2 e^2}{l^2} \left\langle \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N u_k(t_1) u_j^*(t_2) \right\rangle,$$

となる。この2重和を取り扱うとき、大部分が  $k \neq j$  であるが、わずかに  $k = j$  である組み合わせが含まれていることに注意すべきである。注意が必要な理由は後に明らかになる。添え字  $k$  と  $j$  の組み合わせに注意して数式を書き換えると、

$$\phi(t_1 - t_2) = \frac{R^2 e^2}{l^2} \left\langle \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N u_k(t_1) u_j(t_2) + \sum_{k=1}^N u_k(t_1) u_k(t_2) \right\rangle, \quad (4.30)$$

のように書くことができるだろう。ここで、 $\Sigma'$  は  $j \neq k$  となる組み合わせで和をとることを意味する。相関関数 (4.30) の計算には、第1項と第2項を個別に評価する。

相関関数 (4.30) の総和は、自由電子の速度の内積についてとられる。自由電子の瞬時的な速度は、

$$\mathbf{u}(t) = \frac{e\mathbf{E}}{m\gamma} (1 - e^{-\gamma t}) + e^{-\gamma t} \mathbf{u}(0) + \int_0^t e^{-\gamma(t-t')} \frac{\mathbf{R}(t')}{m} dt',$$

と書くことができる。この速度は、ランジュバン方程式:

$$m \frac{d\mathbf{u}}{dt} + m\gamma \mathbf{u} - e\mathbf{E} - \mathbf{R}(t) = 0,$$

の解である。なお、 $\mathbf{E}$  は導体内を貫く電場である。続いて、異なる時刻  $t_1$  と  $t_2$  における同一自由電子の速度ベクトルの内積をとり、その平均を計算すると、

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}(t_1) \cdot \mathbf{u}(t_2) \rangle &= \left\langle \frac{e\mathbf{E}}{m\gamma} \right\rangle^2 (1 - e^{-\gamma t_1})(1 - e^{-\gamma t_2}) + e^{-\gamma(t_1+t_2)} \langle |\mathbf{u}(0)|^2 \rangle \\ &\quad + \int_0^{t_1} dt' \int_0^{t_2} dt'' e^{-\gamma(t_1+t_2-t'-t'')} \frac{\langle \mathbf{R}(t') \cdot \mathbf{R}(t'') \rangle}{m} \\ &= \left\langle \frac{e\mathbf{E}}{m\gamma} \right\rangle^2 (1 - e^{-\gamma t_1})(1 - e^{-\gamma t_2}) + e^{-\gamma(t_1+t_2)} \langle |\mathbf{u}(0)|^2 \rangle + \int_0^{t_1} e^{-\gamma(t_1+t_2-2t')} \frac{6D_u}{m} dt' \\ &= \left\langle \frac{e\mathbf{E}}{m\gamma} \right\rangle^2 (1 - e^{-\gamma t_1})(1 - e^{-\gamma t_2}) + e^{-\gamma(t_1+t_2)} \langle |\mathbf{u}(0)|^2 \rangle + \frac{3D_u}{m\gamma} [e^{-\gamma(t_2-t_1)} - e^{-\gamma(t_1-t_2)}], \end{aligned}$$

が得られる。この数式の第3行目への変形は、 $\langle \mathbf{R}(t') \cdot \mathbf{R}(t'') \rangle = 6D_u \delta(t' - t'')$  なる関係を用いた。また、既に導出した関係式  $\langle |\mathbf{u}(0)|^2 \rangle = 3D_u/m\gamma$  を利用すると、

$$\langle \mathbf{u}(t_1) \cdot \mathbf{u}(t_2) \rangle = \left\langle \frac{e\mathbf{E}}{m\gamma} \right\rangle^2 (1 - e^{-\gamma t_1})(1 - e^{-\gamma t_2}) + e^{-\gamma(t_2-t_1)} \langle |\mathbf{u}(t_1)|^2 \rangle, \quad (4.31)$$

が導かれる。なお、この数式を書くにあたって、速度の自乗平均が時間に依存しない仮定、すなわち、 $\langle |\mathbf{u}(0)|^2 \rangle = \langle |\mathbf{u}(t_1)|^2 \rangle$  を用いた。得られた数式の右辺の第1項は、定常電流に起因する。異なる自由電子の速度の内積の平均  $\langle \mathbf{u}(t_1) \cdot \mathbf{v}(t_2) \rangle$  の場合、

$$\langle \mathbf{u}(t_1) \cdot \mathbf{v}(t_2) \rangle = \left\langle \frac{e\mathbf{E}}{m\gamma} \right\rangle^2 (1 - e^{-\gamma t_1})(1 - e^{-\gamma t_2}),$$

のようになることが容易にわかる。ところで、 $e\mathbf{E}/m\gamma$  は定常状態における自由電子の平均速度である。その事実は次のようにして示すことができる。ランジュバン方程式の平均値:

$$m \frac{d\langle \mathbf{v} \rangle}{dt} + m\gamma \langle \mathbf{u}(t) \rangle + e\mathbf{E} = 0,$$

について、定常状態  $d\langle \mathbf{u} \rangle / dt = 0$  を仮定すると、定常電流をつくる自由電子の平均速度  $\langle \mathbf{u}(t) \rangle = e\mathbf{E}/m\gamma$  が得られる。したがって、(4.31) は、

$$\langle \mathbf{u}(t_1) \cdot \mathbf{u}(t_2) \rangle = (1 - e^{-\gamma t_1})(1 - e^{-\gamma t_2}) \langle \mathbf{u} \rangle^2 + e^{-\gamma(t_2-t_1)} \langle |\mathbf{u}|^2 \rangle, \quad (4.32a)$$

$$\langle \mathbf{u}(t_1) \cdot \mathbf{v}(t_2) \rangle = (1 - e^{-\gamma t_1})(1 - e^{-\gamma t_2}) \langle \mathbf{u} \rangle^2, \quad (4.32b)$$

のように書き換えることができる。なお、速度の平均も速度の自乗平均も時間に依存しないはずなので変数の表示を削除した。電圧に関する相関関数 (4.30) に記述された総和記号には、(4.32a) に相当する項が  $N$  個、(4.32b) に相当する項が  $N^2 - N$  個だけ混在しているはずなので、

$$\phi(t_2 - t_1) = \frac{N^2 R^2 e^2}{l^2} \left[ (1 - e^{-\gamma t_1})(1 - e^{-\gamma t_2}) \langle \mathbf{u} \rangle^2 + \frac{e^{-\gamma(t_2-t_1)}}{N} \langle |\mathbf{u}|^2 \rangle \right],$$

となる。しかも、 $t_1, t_2 \gg 1/\gamma$  となるように時刻を設定すれば、

$$\phi(t_2 - t_1) = \frac{N^2 R^2 e^2}{l^2} \left[ \langle \mathbf{u} \rangle^2 + \frac{e^{-\gamma(t_2-t_1)}}{N} \langle |\mathbf{u}|^2 \rangle \right], \quad (4.33)$$

と書くことができる。これが電圧に関する相関関数である。なお、 $N$  は導体内部に存在する自由電子の総数である。この相関関数をウィーナー・ヒンチンの定理に代入すると、信号のパワースペクトルが得られる。

#### 4.3.4 雑音のパワースペクトル

雑音を含む電圧の相関関数を前項で導出したので、ウィーナー・ヒンチンの定理を用いて雑音のパワースペクトルを算出しよう。ウィーナー・ヒンチンの定理はフーリエ変換であるので、(4.33) の第1項と第2項のスペクトルの和が計算されることになる。第1項は

定常電流による寄与であり、第2項が雑音である。本章では雑音に興味があるので相関関数のうち、雑音に起因する成分を取り出すと、

$$\phi_n(t_2 - t_1) = \frac{4AnR^2e^2}{l} e^{-(t_2-t_1)/\tau} \langle |\mathbf{u}|^2 \rangle,$$

が得られる。ここで、 $\tau \equiv 1/\gamma$ は緩和時間と呼ばれる量であり、第4.3.2項で電気抵抗のメカニズムを説明する際、自由電子が衝突する平均時間として導入した。また、導体内部における自由電子の総数  $N$  は、導体の断面積  $A$ 、長さ  $l$ 、個数密度  $n$  を用いて  $N = Anl$  となるので、その置き換えを適用した。この相関関数をウィーナー・ヒンチンの定理(4.27)に代入してみる。計算過程を示すと、

$$\begin{aligned} S(\nu) &= \frac{4}{R} \int_0^\infty \phi_n(t) \cos 2\pi\nu t \, dt \\ &= \frac{4AnRe^2}{l} \langle |\mathbf{u}|^2 \rangle \int_0^\infty e^{-t/\tau} \cos 2\pi\nu t \, dt \\ &= \frac{4\tau}{1 + (2\pi\nu\tau)^2} \frac{AnRe^2}{l} \langle |\mathbf{u}|^2 \rangle, \end{aligned}$$

が得られる。第3行目への数式変形は、部分積分を2回繰り返すことで実行できる。このような周波数特性をもつ雑音はローレンツ雑音と呼ばれる。得られたパワースペクトルは、図4.8のような曲線を描く。このパワースペクトルは、銅の自由電子密度などを用いて計算した。

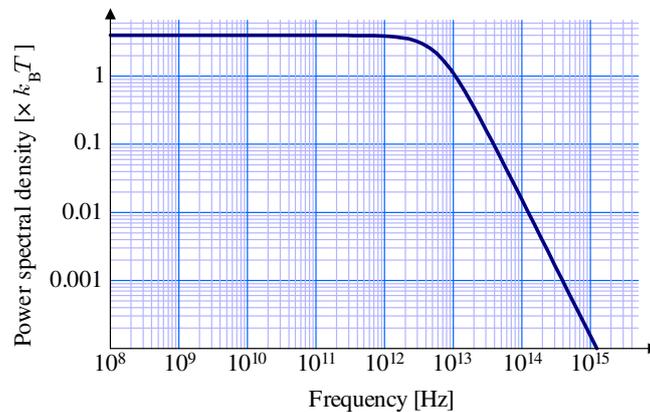


図 4.8: 銅の内部で発生する雑音のパワースペクトル密度

図4.8によると、1テラヘルツ程度の周波数まで雑音のパワースペクトルは一定である。そこで、1テラヘルツより低い周波数のパワースペクトルは近似的に、

$$S(\nu) = \frac{4AnRe^2\tau}{l} \langle |\mathbf{u}|^2 \rangle, \quad (4.34)$$

が成立すると考えてよい。このように周波数特性が一定である雑音は、**白色雑音**と呼ばれる。白色という言葉は、光の周波数からのアナロジーで、あらゆる周波数の光が混ざると白色になることに由来する。

雑音のパワースペクトルを具体的な値として表すため、再び、自由電子の運動を考えてみよう。まず、粘性係数  $\gamma$  を  $1/\tau$  で置き換えたことについて、 $\tau$  は自由電子が導体構成原子と衝突する平均周期である。すでに、平均自由行程で定式化したように、運動する粒子はその経路上で衝突をする。運動軌跡が乱数的であれば、衝突を免れる確率は時間経過に対して指数関数的に低下する。例えば、時間  $t$  にわたって自由電子が衝突を免れる確率を  $e^{-t/\tau}$  とする。そのとき、異なる時刻における同一の自由電子の速度の相関は、

$$\langle u_k(t_1) u_j(t_2) \rangle = e^{-(t_2-t_1)/\tau} \langle |u|^2 \rangle,$$

となる。これは、衝突しなければ同一速度を保ち、一度でも衝突すると乱数的に速度が変化するためである。なお、衝突に基づく速度の相関は、ランジュバン方程式の解から求めた速度の相関と一致する。

電流と同一方向の速度成分の自乗がエネルギーの等分配の法則から  $\langle u^2 \rangle = k_B T/m$  であり、第 4.3.2 項で示した電気伝導率  $\sigma_c = ne^2\tau/m$  を用いると、パワースペクトル  $S(\nu)$  は、

$$S(\nu) = \frac{4AnRe^2\tau}{l} \cdot \frac{k_B T}{m} = \frac{4\sigma_c ARk_B T}{l}$$

のように計算することができる。電気伝導率が抵抗率の逆数であることから、 $\sigma_c A/l = 1/R$  となるはずなので、パワースペクトルは、

$$S(\nu) = 4k_B T, \quad (4.35)$$

のように計算される。非常に簡単な数式に落ち着いたが、これが温度  $T$  の環境で電気抵抗が発生する雑音のパワースペクトルである。雑音電力は電圧を印加しなくても常に発生している。とは言っても、電気抵抗が無の状態からエネルギーを生成しているのではない。温度  $T$  の周囲との熱平衡において、自由電子の衝突において発生するエネルギーのゆらぎが電力として観測されるだけである。ある周波数の帯域幅  $\Delta\nu$  に注目し、その周波数帯域における雑音電力は  $P = 4k_B T \Delta\nu$  となる。発生した電力が抵抗  $R$  自身で消費されるならば、 $P = V^2/R$  なる関係から、抵抗  $R$  の両端には、

$$V = \sqrt{4k_B TR \Delta\nu},$$

の電圧が発生することを意味する。この電圧は雑音による起電力であり、ジョンソンが 1928 年に発見した電圧と一致する。これまでの導出では、熱運動する自由電子が衝突することによって熱雑音が発生することを仮定したにも関わらず、熱雑音の大きさが電気抵抗と温度のような巨視的なパラメータで定まることが導かれた。この結果は、熱雑音は電気

抵抗で発生することを示唆している。この電気抵抗を他の電気回路と接続すると、発生した電力は部分的に抵抗  $R$  で消費されず、接続先の電気回路で消費されることになる。つまり、抵抗は図 4.9 に示すような雑音源であると考えられる。

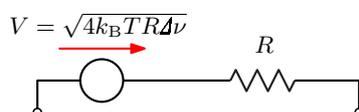


図 4.9: 雑音源としての電気抵抗の等価回路

雑音源である電気抵抗を電気回路に接続した場合を考えてみよう。図 4.10 に示すように、電気抵抗  $R$  が電気回路に接続されている。図の描き方が違うが、この思考実験の設定は第 4.1.1 項で取り扱ったナイキストによる証明と同じ設定である。図 4.10 において、接続した電気抵抗は左側に位置する淡色の長方形である。既に導いたように、自由電子の熱運動によって電気抵抗の内部で起電力が発生する。その起電力を  $V$  とする。そのとき、電気抵抗は内部抵抗が  $R$  である電源  $V$  と考えればよい。一方、電気抵抗を接続した電気回路はインピーダンスが  $Z$  であるとする。起電力によって、電気回路に電流が流れ込み、一般的に、電気抵抗で電流が反射される。電気抵抗ですべての電力が消費されるには、電気抵抗での反射が発生してはならない。反射が発生しないためには、電気抵抗側から見たイン

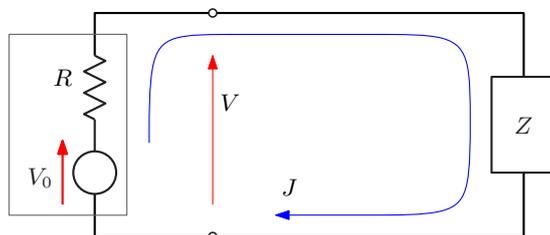


図 4.10: 雑音源を接続した電気回路

ピーダンス  $Z$  が整合条件  $Z = R$  を満足しなければならないことは電気回路理論でわかっている。単体の電気抵抗  $R$  の両端に生じる起電力が  $V_0$  であれば、電気抵抗  $R$  には電流:

$$J = \frac{V_0}{R + Z} = \frac{V_0}{2R},$$

が流れる。電気回路に接続された電気抵抗  $R$  の両端で観測される電圧は、

$$V = \frac{R}{R + Z} V_0 = \frac{V_0}{2},$$

となる。ここで、電気抵抗で発生する起電力として  $V_0 = \sqrt{4k_B T R \Delta \nu}$  を代入して、回路に接続された電気抵抗  $R$  で消費される電力を計算すると、

$$P = VJ = \frac{V_0^2}{4R} = k_B T \Delta \nu, \quad (4.36)$$

が得られる。つまり、電気抵抗では単位周波数あたりに  $k_B T$  の電力が消費されることが導かれた。通信機器の分野では、通信機の感度設計のためにこの数式を用いて回路で発生する熱雑音を計算している。

## 4.4 熱雑音の包絡線

既に説明したように熱雑音は、導体内部で自由電子が導体の構成原子と衝突を繰り返すことによって発生する。電圧として観測される熱雑音は、その発生原理ゆえに平均値がゼロの正規分布を形成する。基本的な数学モデルでは、いかに短い時間の尺度で観測しても、雑音は各瞬間で乱数的に振る舞う。実際の電気回路では、帯域制限されるため、雑音は包絡線内を変動する正弦波のような振る舞いを見せる。その包絡線はレイリー分布を形成する。本節では、熱雑音のフーリエ変換を説明した後、帯域制限された雑音を定式化する。

### 4.4.1 熱雑音のフーリエ変換

熱雑音が導体内部で自由電子が導体の構成原子と衝突を繰り返すことによって発生することをこれまでに説明した。その衝突の間隔が  $10^{-14}$  秒程度の非常に短い時間であるため、熱雑音の自己相関関数  $\phi(t)$  は、ほぼデルタ関数とみなすことができる。つまり、熱雑音  $V(t)$  は完全な乱数として与えることができる。既に示したように、熱雑音は、

$$V(t) = \frac{Re}{l} \sum_{k=1}^N u_k(t),$$

のように導体内部に含まれる自由電子の速度の総和に比例係数を乗じた値であると考えることができる。自由電子の速度は、気体分子と同様、カルテシアン座標の各成分が正規分布を形成すると考えてよい。つまり、正規分布にしたがう無数の速度  $u_k(t)$  の和であるので、中心極限定理によると、熱雑音  $V(t)$  は平均値がゼロの正規分布を形成する。

熱雑音のフーリエ変換  $\hat{V}(\omega)$  について考えよう。ここで、熱雑音は物理量であるため実数であるとする。このとき、フーリエ変換  $\hat{V}(\omega)$  は、

$$\hat{V}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} V(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} [V(t) \cos \omega t - i V(t) \sin \omega t] dt,$$

のように書くことができる。この積分は、 $V(t)$  の相関時間を  $dt$  とすれば、

$$\hat{V}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} V(n\Delta t) (\cos n\omega\Delta t - i \sin n\omega\Delta t) \Delta t$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4k_B T R}{\Delta t}} \sum_{n=-N}^N m_n (\cos n\omega\Delta t - i \sin n\omega\Delta t) \Delta t \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{4k_B T R \Delta t} \sum_{n=-N}^N m_n (\cos n\omega\Delta t - i \sin n\omega\Delta t),
\end{aligned}$$

と書くこともできる。ただし、 $m_n$  は平均値がゼロで分散が1の正規乱数である。この数式によると、フーリエ変換  $\hat{V}(\omega)$  の実部と虚部はともに分散が  $4k_B T N \Delta t$  の正規乱数となる。その理由は次のように考えるとよい。振幅が1の正弦関数と余弦関数は、平均値がゼロで自乗平均が1/2である。取り出す順序を乱数的に並べ替えると振幅が1の正弦関数と余弦関数は、平均値がゼロで分散が1/2の乱数となる。したがって、総和記号に含まれる  $m_n \cos n\omega\Delta t$  と  $m_n \sin n\omega\Delta t$  は、平均値がゼロで分散が1/2の乱数である。正規乱数と正弦関数との積:  $m_n \cos n\omega\Delta t$  と  $m_n \sin n\omega\Delta t$  は正規乱数とならないが、それらを無限に加算したフーリエ変換は中心極限定理によって正規乱数となる。しかも、総和記号によって  $2N + 1$  項だけ加算されるので、総和の結果は分散が  $N + 1/2 \simeq N$  の正規分布となる。その結果に、振幅  $\sqrt{4k_B T R \Delta t}$  を考慮すると、フーリエ変換の実部と虚部がともに平均値がゼロで分散が  $4k_B T R N \Delta t$  の正規分布になることがわかるのである。

#### 4.4.2 帯域制限された雑音

白色雑音の数学モデルは、どんな短時間の違いであっても異なる時刻において、関数値が無相関である。そのような信号は無限の帯域を占有する広帯域信号である。その広帯域信号を帯域制限すると、緩やかであるが乱数的に変化する包絡線の中を変動する信号に変換される。

任意の時刻に対する関数値がガウス分布にしたがう白色雑音  $n(t)$  を考えよう。その雑音を角周波数  $\omega_0$  を中心に帯域制限したとき、その雑音出力は  $\hat{n}(t) = x(t) \cos \omega_0 t + y(t) \sin \omega_0 t$  のように表現される。ここで、 $x(t)$  と  $y(t)$  は、角周波数  $\omega_0$  に比べゆっくりであるが、ガウス分布にしたがう。また、 $x(t)$  と  $y(t)$  の分散は互いに等しい。本項はその事実を証明する。

証明を記述する前に、帯域制限された雑音のシミュレーションを示しておこう。図4.11に(a)白色ノイズと、(b)帯域制限された雑音を描いた。帯域制限は、100 MHz を中心に60 MHzの占有帯域幅で帯域制限されている。帯域制限された雑音は、包絡線の内部に、ほぼ100 Hzの変動を伴っているその包絡線が  $x(t)$  と  $y(t)$  によって形成されているのだ。帯域制限された雑音の数式表現を導出するにあたり、白色雑音  $n(t)$  のスペクトルが  $A(\omega)$  で与えられると仮定しよう。そのスペクトルは、フーリエ変換:

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} n(t) e^{-i\omega t} dt,$$

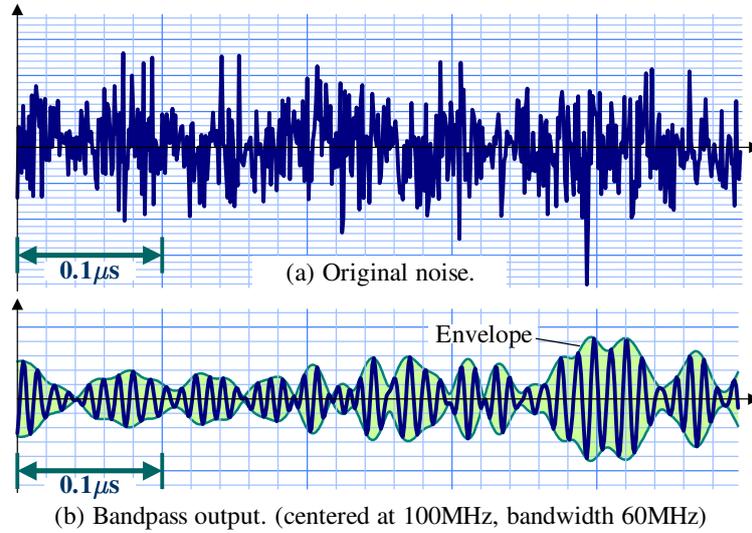


図 4.11: 帯域制限された雑音とその包絡線

で計算できる。前項で示したように、スペクトル  $A(\omega)$  はガウス分布にしたがう。逆に、白色雑音  $n(t)$  は、逆フーリエ変換:

$$n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{i\omega t} dt,$$

のように表現できる。この雑音を角周波数  $\omega_0$  を中心とするある有限の帯域に帯域制限したとする。帯域制限によって、スペクトルは  $\hat{A}(\omega)$  のように変化したとする。ここで、 $\hat{A}(\omega)$  は角周波数  $\omega_0$  から大きく逸脱した周波数において、ゼロもしくは非常に小さい値に抑圧されているものとする。その帯域制限された雑音を  $\hat{n}(t)$  とすると、

$$\begin{aligned} \hat{n}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{A}(\omega_0 + \Omega) e^{i(\omega_0 + \Omega)t} d\Omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left[ \hat{A}(\omega_0 + \Omega) e^{i(\omega_0 + \Omega)t} + \hat{A}(\omega_0 - \Omega) e^{i(\omega_0 - \Omega)t} \right] d\Omega, \end{aligned} \quad (4.37)$$

のように表現できる。このように、角周波数  $\omega_0 + \Omega$  と  $\omega_0 - \Omega$  の成分を同時に積分することが重要である。その理由は、包絡線が帯域内の比較的近い周波数成分どうしの重ね合わせによって発生する唸りの振幅だからである。そのように、 $\omega_0$  について対象となる二つの成分を重ね合わせることで、角周波数  $\omega_0$  の変動成分に関する包絡線を抽出することができるのだ。逆フーリエ変換 (4.37) をさらに数式変形すると、

$$\begin{aligned} \hat{n}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left[ \frac{\hat{A}(\omega_0 + \Omega) + \hat{A}(\omega_0 - \Omega)}{2} (e^{i(\omega_0 + \Omega)t} + e^{i(\omega_0 - \Omega)t}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\hat{A}(\omega_0 + \Omega) - \hat{A}(\omega_0 - \Omega)}{2} (e^{i(\omega_0 + \Omega)t} - e^{i(\omega_0 - \Omega)t}) \right] d\Omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left[ (\hat{A}(\omega_0 + \Omega) + \hat{A}(\omega_0 - \Omega)) \cos \Omega t \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -i \left( \hat{A}(\omega_0 + \Omega) - \hat{A}(\omega_0 - \Omega) \right) \sin \Omega t \Big] e^{i\omega_0 t} d\Omega \\
& = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left[ \left( \hat{A}(\omega_0 + \Omega) + \hat{A}(\omega_0 - \Omega) \right) \cos \Omega t \cos \omega_0 t \right. \\
& \quad \left. - i \left( \hat{A}(\omega_0 + \Omega) - \hat{A}(\omega_0 - \Omega) \right) \sin \Omega t \sin \omega_0 t \right] d\Omega, \tag{4.38}
\end{aligned}$$

のように計算できる。この計算結果は、帯域制限された雑音  $\hat{n}(t)$  が、

$$\hat{n}(t) = x(t) \cos \omega_0 t + y(t) \sin \omega_0 t, \tag{4.39}$$

なる形で表現されることを示唆している。しかし、現時点で  $x(t)$  と  $y(t)$  がどのような関数なのかはわかっていない。それらの関数の性質を確認するため、数式 (4.38) と (4.39) を比較すると、 $x(t)$  は、

$$\begin{aligned}
x(t) & = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left( \hat{A}(\omega_0 + \Omega) + \hat{A}(\omega_0 - \Omega) \right) \cos \Omega t d\Omega \\
& = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left( \hat{A}(\omega_0 + \Omega) + \hat{A}(\omega_0 - \Omega) \right) \frac{e^{i\Omega t} + e^{-i\Omega t}}{2} d\Omega \\
& = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \left( \hat{A}(\omega_0 + \Omega) + \hat{A}(\omega_0 - \Omega) \right) e^{i\Omega t} d\Omega, \tag{4.40}
\end{aligned}$$

のように逆フーリエ変換で表される。一方、 $y(t)$  も同様に、

$$\begin{aligned}
y(t) & = \frac{i}{2\pi} \int_0^\infty \left( \hat{A}(\omega_0 + \Omega) - \hat{A}(\omega_0 - \Omega) \right) \sin \Omega t d\Omega \\
& = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left( \hat{A}(\omega_0 + \Omega) - \hat{A}(\omega_0 - \Omega) \right) \frac{e^{i\Omega t} - e^{-i\Omega t}}{2} d\Omega \\
& = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \left( \hat{A}(\omega_0 + \Omega) - \hat{A}(\omega_0 - \Omega) \right) e^{i\Omega t} d\Omega, \tag{4.41}
\end{aligned}$$

なる逆フーリエ変換で表される。帯域制限された雑音の包絡線が実数関数である必要はないが、 $\hat{A}(\omega_0 + \Omega)$  と  $\hat{A}(\omega_0 - \Omega)$  が複素共役の関係であれば、 $x(t)$  と  $y(t)$  は実数関数となる。さらに、帯域制限されているという前提条件から、 $\omega_0$  から大きく逸脱する周波数では  $\hat{A}(\omega)$  が積分に寄与できない程度まで抑圧されているはずだ。そのことから、逆フーリエ変換は特定の値に確実に収束する。逆フーリエ変換において、被積分関数は  $\Omega$  の変化に対して乱数的であるので、 $x(t)$  と  $y(t)$  は中心極限定理によってガウス分布にしたがうはずだ。しかも、それらは互いに独立であり、同一の分散をもつ。正弦関数と余弦関数の合成によって、数式 (4.39) は、

$$\hat{n}(t) = \sqrt{[x(t)]^2 + [y(t)]^2} \sin(\omega_0 t + \phi(t)), \tag{4.42}$$

のように変形できる。なお、 $\tan \phi(t) = y(t)/x(t)$  である。したがって、雑音の瞬時的な振幅は、同一の分散をもつ二つの正規乱数の自乗の平方根であるので、レイリー分布にしたがう。この数式に示すように、位相に  $t$  の関数が加算されているため、包絡線の内側での変

動は厳密に  $\omega_0$  の角周波数で振動するのではない。しかし、 $\phi(t)$  が  $\omega_0$  に比べてゆっくりと変化するので、帯域制限された雑音は角周波数  $\omega_0$  に近い変化率で変動する。信号解析において包絡線を取り扱うには、次項で説明するヒルベルト変換を導入すると便利である。さらに、(4.42) から、 $\hat{n}(t)$  はガウス雑音である。なぜなら、位相オフセット  $\phi(t)$  は  $\omega_0 t$  と無関係な一様乱数であるので、レイリー分布と正規分布の関係から、 $\hat{n}(t)$  がガウス雑音と断言できるのだ。

雑音振幅の確率密度関数の例として、図 4.11 で示したシミュレーションにおける雑音振幅の分布を描くと、図 4.12 のようになる。想定する白色雑音 (original noise) はガウス雑音であるので、その振幅はガウス分布の右半分を描いている。帯域制限された雑音 (bandpass

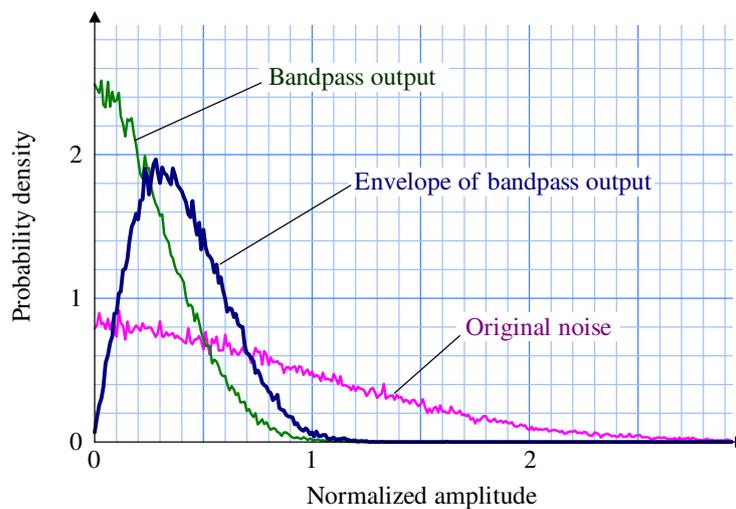


図 4.12: 雑音振幅 (図 4.11) の確率密度関数

output) も、瞬時値  $\hat{n}$  はガウス雑音であるので白色雑音と同様の分布を描く。ただし、帯域制限によって雑音電力が抑圧されるため、小さい振幅に分布が集中している。包絡線 (envelope) の分布はレイリー分布の確率密度関数を描いている。

逆フーリエ変換で表現される  $x(t)$  と  $y(t)$  は包絡線を与える。包絡線は、互いに周波数が近い複数の波を重ね合わせたときに生じるうなりに相当する振幅変化を表す。つまり、 $x(t)$  と  $y(t)$  は角周波数  $\omega$  に比べるとゆっくりと変化する。しかし、雑音からつくられている振幅変化なので、長い時間で観測すると、それらは乱数的に変化する。

#### 4.4.3 ヒルベルト変換

信号の包絡線を評価するためには、与えられた実数信号に対応する虚数信号を生成する数学変換があると便利である。例えば、 $x(t)$  が観測値として与えられ、数学変換によって  $y(t)$  が生成されたとする。これらを実部と虚部として組み合わせた複素数  $z(t) = x(t) + iy(t)$

を複素信号として定義するのである。その結果、包絡線は  $|z(t)| = \sqrt{[x(t)]^2 + [y(t)]^2}$  と考えればよい。

上記のように考えると、正弦波  $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$  が観測されたとき、望ましい数学変換によって  $y(t) = A \sin(\omega t + \phi)$  が得られれば、複素信号は  $z(t) = A e^{i(\omega t + \phi)}$  となる。その複素信号の振幅  $A$  が信号の包絡線である。そのような望ましい性質をもつ数学変換は、

$$y(t) = \frac{1}{\pi} \text{Pr} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau, \quad (4.43)$$

によって定義される。この数学変換は**ヒルベルト変換**と呼ばれる。ここで、Pr はコーシーの主値を与える。コーシーの主値とは、積分路に極を含む積分について、極の近傍を取り除いた積分を実行し、取り除いた部分の大きさをゼロに近づけた極限を積分結果として採用した値である。例えば、 $1/x$  を  $(-\infty, \infty)$  を積分する場合、

$$\begin{aligned} \text{Pr} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \int_{-\infty}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^{\infty} \right) \frac{dx}{x} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \left[ \log x \right]_{-\infty}^{-\epsilon} + \left[ \log x \right]_{\epsilon}^{\infty} \right) \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \left[ \log x \right]_{-R}^{-\epsilon} + \left[ \log x \right]_{\epsilon}^R \right) = \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \log \frac{-\epsilon}{-R} - \log \frac{R}{\epsilon} \right) \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \log \left( \frac{-\epsilon}{-R} \cdot \frac{R}{\epsilon} \right) = \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \log 1 = 0, \end{aligned}$$

とするのがコーシーの主値である。被積分関数の極  $x = 0$  を単に積分区間から取り除くのであれば、 $(-\alpha, \beta)$  のように極について非対称な区間を取り除いてもよさそうである。しかし、非対称な区間を取り除くようにすると、積分値が特定できないのだ。コーシーの主値は、取り除く区間を極に対して対称に設定することに意義がある。

コーシーの主値に注意しながら積分を実行し、関数  $e^{i\omega t}$  のヒルベルト変換を計算しよう。この積分の実行には、 $\omega$  の値によって積分路を選択すればよい。図 4.13 に示す二つの積分路のどちらをとっても、積分路の内側に極を含まないため、その積分は留数定理によってゼロになる。さらに、無限遠の積分路  $C_R$  に沿った積分は、 $\omega > 0$  のとき図 4.13 (a) の積分路でゼロになる。一方、 $\omega < 0$  のとき図 4.13 (b) の積分路でゼロになる。ところで、コー

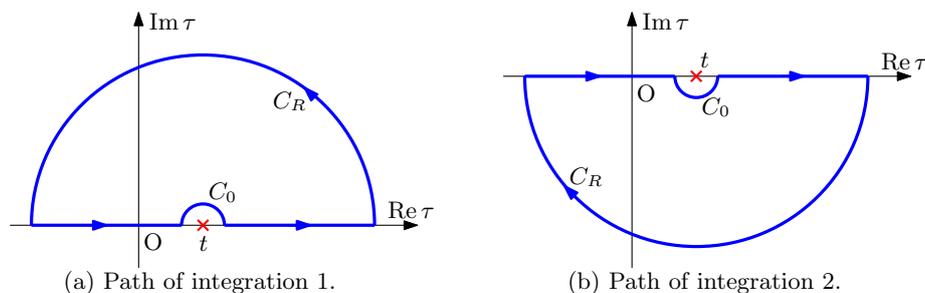


図 4.13: ヒルベルト変換のための積分路

シーの主値による区間  $(-\infty, \infty)$  の積分は、図 4.13 において  $C_0$  と  $C_R$  を除いた積分である。複素関数におけるジョルダンの補助定理によれば、図 4.13 (a) では  $C_0$  に沿った積分が  $-ie^{i\omega t}$  となり、図 4.13 (b) では  $ie^{i\omega t}$  となる。この考察を総合すると、積分結果は、

$$\frac{1}{\pi} \text{Pr} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega\tau}}{t-\tau} d\tau = \begin{cases} -ie^{i\omega t} & \text{if } \omega < 0, \\ 0 & \text{if } \omega = 0, \\ ie^{i\omega t} & \text{if } \omega > 0, \end{cases} \quad (4.44)$$

のように、 $\omega$  がとる符号の条件によって分類することができる。この結果を用いて  $x(t) = \cos \omega t$  をヒルベルト変換すると、

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{\pi} \text{Pr} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \omega\tau}{t-\tau} d\tau = \frac{1}{2\pi} \text{Pr} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega\tau} + e^{-i\omega\tau}}{t-\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{2} (-ie^{i\omega t} + ie^{-i\omega t}) = \frac{1}{2i} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) = \sin \omega t, \end{aligned}$$

が得られる。与えられた信号  $x(t)$  を実部に、ヒルベルト変換の結果  $y(t)$  を虚部として組み合わせると、複素信号  $e^{i\omega t}$  が得られることが確認できた。

上の説明は、包絡線が一定の場合にヒルベルト変換が都合のよい虚部を生成できることを示した。さらに、変動する包絡線  $A(t)$  についてもヒルベルト変換が都合のよい虚部を生成することを証明しよう。与えられた実数信号が  $A(t) \cos \omega t$  であるとする。ここで、包絡線  $A(t)$  は、

$$A(t) = \sum A_n \cos(\Omega_n t + \phi_n),$$

であると仮定しよう。ここで、 $A_n$  は定数である。この総和がフーリエ変換であると思えば、この定義式は一般的な包絡線である。ただし、 $A(t)$  が  $\cos \omega t$  の包絡線を与えるのであれば、 $\Omega_n < \omega$  でなければならない。三角関数の加法定理に注意して  $x(t)$  を計算すると、

$$\begin{aligned} x(t) &= A(t) \cos \omega t = \sum A_n \cos(\Omega_n t + \phi_n) \cos \omega t \\ &= \sum \frac{A_n}{2} \left\{ \cos [(\omega + \Omega_n)t + \phi_n] + \cos [(\omega - \Omega_n)t - \phi_n] \right\}, \end{aligned}$$

が得られる。ヒルベルト変換が線形演算であるので、ヒルベルト変換によって得られる  $y(t)$  は、上の第2行目の数式に対し、余弦関数 ( $\cos$ ) を正弦関数 ( $\sin$ ) に置き換えるだけでよく、

$$y(t) = \sum \frac{A_n}{2} \left\{ \sin [(\omega + \Omega_n)t + \phi_n] + \sin [(\omega - \Omega_n)t - \phi_n] \right\}$$

となる。実は、ここで  $\omega > \Omega_n$  の関係が重要である。実数関数では負の周波数が定義できないので、差の周波数は  $\Omega_n - \omega$  としてはならない。この条件に注意しないと、間違った結果が導き出されるのだ。続いて、三角関数の加法定理を用いて  $y(t)$  を計算すると、

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum \frac{A_n}{2} \left[ \cos(\Omega t + \phi_n) \sin \omega t + \sin(\Omega t + \phi_n) \cos \omega t \right. \\ &\quad \left. + \cos(\Omega t + \phi_n) \sin \omega t - \sin(\Omega t + \phi_n) \cos \omega t \right] \\ &= \sum A_n \cos(\Omega t + \phi_n) \sin \omega t = A(t) \sin \omega t, \end{aligned}$$

が得られる。したがって、複素関数としての包絡線が,

$$|z(t)| = |A(t) (\cos \omega t + i \sin \omega t)| = A(t) |e^{i\omega t}| = A(t),$$

となり、ヒルベルト変換によって希望どおりの包絡線が得られることが示された。実は、前項のシミュレーション (図 4.11) において、帯域制限された雑音の包絡線は、ヒルベルト変換を用いて特定していたのだ。

